УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЯХ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача об определении напряжений в изолированных эллипсоидальных жестких включениях, содержащихся в изотропном упругом пространстве, подвергнутом на бесконечности воздействию равномерно распределенных внешних сил. Исследуются примеры включений в виде сплющенного и вытянутого сфероидов, когда эта задача имеет единственное решение.

Ключевые слова: изолированные жесткие включения, однородное поле напряжений, сплющенный и вытянутый сфероиды.

В работе [1], в которой рассматривались плоские задачи об определении напряженно-деформированного состояния упругой области с жестким включением произвольной формы, показано, что поле напряжений в нем определяется однозначно. В случае плоскости с эллиптическим включением поле напряжений является однородным, а напряжения на бесконечности и во включении связаны взаимно однозначными соотношениями.

Доказать возможность определения напряжений в эллипсоидальном жестком включении (ЭЖВ) общего вида не удается. В настоящей работе исследуется задача об ЭЖВ в виде сплющенного и вытянутого сфероидов, для которых это оказалось возможным.

1. Упругое пространство с изолированными ЭЖВ. Рассмотрим упругое пространство с ЭЖВ, подвергнутое воздействию равномерно распределенных на бесконечности напряжений σ_{kl}^{∞} $(k, l = 1, 2, 3)$. Расстояние между центрами любых двух включений велико по сравнению с их размерами, поэтому влиянием одного из них на напряженное состояние любого другого можно пренебречь (изолированные ЭЖВ). В данных предположениях решение задачи сводится к независимому решению N (N — общее число всех ЭЖВ) задач об определении напряженно-деформированного состояния упругого пространства v с одним включением v^* под действием внешних напряжений на бесконечности. Аналогичная задача исследовалась в работе [2] для случая эллипсоидального физически нелинейного включения (ЭФНВ) с определяющими уравнениями достаточно общего вида $\varepsilon^* = F(\sigma^*)$, $\sigma^* = G(\varepsilon^*)$ (F, G — нелинейные тензорные операторы, действующие на тензоры напряжений σ^* и деформаций ε^*). В области v справедлив закон Гука $\varepsilon = a : \sigma$, $\sigma = b : \varepsilon$ (a, b — взаимно обратные тензоры упругих податливостей и упругих модулей соответственно).

В работе [2] между напряженно-деформированным состоянием в ЭФНВ и на бесконечности установлены следующие связи:

$$\varepsilon^* = \varepsilon^{\infty} + S : (\varepsilon^* - \tilde{\varepsilon}^*), \qquad \varepsilon^{\infty} = a : \sigma^{\infty}, \qquad \tilde{\varepsilon}^* \equiv a : \sigma^*. \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00168) и Совета по грантам Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-3066.2008.1).

Здесь тензор четвертого ранга S не зависит от координат x_k ($k = 1, 2, 3$), а определяется геометрией области v^* и упругими характеристиками окружающей среды v. Для случая изотропной области v компоненты тензора S приведены в работе [2].

Для рассматриваемого жесткого включения v^* при $\varepsilon^* = 0$ из (1.1) получаем

$$S : \tilde{\varepsilon}^* = \varepsilon^\infty. \tag{1.2}$$

Из соотношений (1.1), (1.2) следует, что компоненты тензора напряжений σ^* как функции заданного на бесконечности тензора ε^∞ можно найти, если определитель матрицы размером 6×6, соответствующей тензору S [2], не равен нулю. Заметим, что поле напряжений в жестком включении v^* является однородным.

2. Случай изотропной области v. Предположим, что упругая среда v с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν является изотропной. Тогда в системе координат, связанной с осями симметрии эллипсоида v^*, компоненты тензора S в (1.1), (1.2) принимают вид [2]

$$\begin{gathered} S_{kkkk} = Qa_k^2 I_{kk} + RI_k, \qquad S_{kkll} = Qa_l^2 I_{kl} - RI_k, \\ 2S_{klkl} = 2S_{kllk} = Q(a_k^2 + a_l^2)I_{kl} + R(I_k + I_l), \\ Q = 3/[8\pi(1-\nu)], \qquad R = (1-2\nu)/[8\pi(1-\nu)], \\ I_k = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^\infty \frac{du}{(a_k^2 + u)\Delta}, \qquad I_{kk} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^\infty \frac{du}{(a_k^2 + u)^2\Delta}, \\ 3I_{kl} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^\infty \frac{du}{(a_k^2 + u)(a_l^2 + u)\Delta}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь a_k — полуоси эллипсоида; $\Delta^2 = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)$ ($k, l = 1, 2, 3$; $k \ne l$; суммирование по k и l не проводится); остальные компоненты $S_{klmn} = 0$.

Величины I_k, I_{kk}, I_{kl} в (2.1) выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода и удовлетворяют соотношениям [2]

$$\begin{gathered} I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi, \quad I_{k1} + I_{k2} + I_{k3} = 4\pi/(3a_k^2), \quad a_1^2 I_{k1} + a_2^2 I_{k2} + a_3^2 I_{k3} = I_k, \\ I_{kl} = I_{lk} = (I_l - I_k)/[3(a_k^2 - a_l^2)] \qquad (k \ne l, a_k \ne a_l), \\ 3I_{kl} = I_{kk} \qquad (k \ne l, a_k = a_l) \quad (k, l = 1, 2, 3), \end{gathered} \tag{2.2}$$

позволяющим по известным значениям I_1, I_2 находить остальные указанные величины. В частности, для сплющенного сфероида ($a_1 = a_2 = \alpha$, $a_3 = \delta\alpha$, $\delta < 1$) имеем

$$I_1 = I_2 = I = 2\pi\delta(1-\delta^2)^{-3/2}[\arccos\delta - \delta(1-\delta^2)^{1/2}]; \tag{2.3}$$

$$I_3 = 4\pi - 2I, \qquad I_{11} = I_{22} = 3I_{12} = \frac{3I - 4\pi\delta^2}{4\alpha^2(1-\delta^2)},$$

$$I_{13} = I_{23} = \frac{4\pi - 3I}{3\alpha^2(1-\delta^2)}, \qquad I_{33} = \frac{4\pi(1-3\delta^2) + 6I\delta^2}{3\alpha^2\delta^2(1-\delta^2)},$$

для вытянутого сфероида ($a_1 = \alpha$, $a_2 = a_3 = \delta\alpha$, $\delta < 1$) —

$$I_2 = I_3 = I = 2\pi\delta^{-1}(\delta^{-2} - 1)^{-3/2}[\delta^{-1}(\delta^{-2} - 1)^{1/2} - \operatorname{arch}\delta^{-1}]. \tag{2.4}$$

Тогда из выражения (2.3) получаем

$$I_1 = 4\pi - 2I, \qquad I_{11} = \frac{4\pi(3-\delta^2) - 6I}{3\alpha^2(1-\delta^2)},$$

$$I_{22} = I_{33} = 3I_{23} = \frac{4\pi - 3I\delta^2}{4\alpha^2\delta^2(1-\delta^2)}, \qquad I_{12} = I_{13} = \frac{3I - 4\pi}{3\alpha^2(1-\delta^2)}.$$

Представим равенство (1.2) в матричной форме

$$s_{kl}\tilde{f}_l^* = f_k^\infty \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6), \tag{2.5}$$

где $\tilde{f}_k^*$, f_k^∞ — компоненты 6-мерных векторов, соответствующих тензорам деформаций $\tilde{\varepsilon}^*$ и ε^∞; s_{kl} — элементы матрицы размером 6×6 вида $s_{kl} = S_{kkll}$ ($k, l = 1, 2, 3$; по k и l суммирование не проводится); $s_{44} = 2S_{1212}$, $s_{55} = 2S_{1313}$, $s_{66} = 2S_{2323}$, остальные элементы s_{kl} равны нулю.

Из соотношений (2.1), (2.5) и неравенств $s_{kk} > 0$ ($k = 4, 5, 6$; суммирование по k не проводится) следует, что сформулированная выше задача об определении однородного поля напряжений в изолированном ЭЖВ имеет единственное решение, если матрица $\|s_{kl}^0\| \equiv \|s_{kl}\|$ ($k, l = 1, 2, 3$) является невырожденной:

$$\det \|s_{kl}^0\| \neq 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

2.1. *ЭЖВ в виде сплющенного сфероида.* С использованием соотношений (2.1)–(2.3), опуская громоздкие выкладки, для величины указанного в (2.6) определителя $\Delta_0 \equiv \det \|s_{kl}^0\|$ находим

$$\Delta_0 = \frac{1+\nu}{32\pi^2(1-\nu)^3(1-\delta^2)} \Big(\frac{3I - 4\pi\delta^2}{4(1-\delta^2)} + (1-2\nu)I\Big) \times$$
$$\times \Big[\big(3 - 4\nu(1-\delta^2)\big)I - 4\pi\delta^2 - (1-2\nu)(1-\delta^2)\,\frac{I^2}{\pi}\Big]. \tag{2.7}$$

Из формул (2.7), (2.3) следует, что Δ_0 является функцией δ ($0 < \delta < 1$) и $3I > 4\pi\delta^2$. Заменяя δ на x и вводя новую переменную $t = 1 - x^2$ ($0 < t < 1$), получаем, что условие $\Delta_0 = 0$ эквивалентно равенству

$$\Psi(t) \equiv 2(1-2\nu)tF^2 + (4\nu t - 3)F + 2(1-t) = 0, \tag{2.8}$$

где

$$F(t) \equiv I/(2\pi) = (1-t)^{1/2}t^{-3/2}[\arccos(1-t)^{1/2} - (1-t)^{1/2}t^{1/2}].$$

Рассмотрим случай несжимаемой упругой среды при $\nu = 0{,}5$. Из выражения (2.8) находим

$$f_1(t) \equiv \arccos(1-t)^{1/2} = f_2(t) \equiv 3(t - t^2)(3-2t)^{-1}. \tag{2.9}$$

Поскольку $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1'(t) = 0{,}5(t - t^2)^{-1/2} > f_2'(t) = (4{,}5 - 6t)(3-2t)^{-2}(t - t^2)^{-1/2}$, уравнение (2.9) относительно t при $0 < t < 1$ не имеет корней, поэтому $f_1(t) > f_2(t)$.

Таким образом, при $\nu = 0{,}5$ уравнение (2.8) не имеет решений, следовательно, $\Delta_0 \neq 0$ и компоненты тензора напряжений σ^* из соотношения (1.2) определяются однозначно.

Пусть $0 \leqslant \nu < 0{,}5$. Рассматривая (2.8) как уравнение относительно F, находим его корни

$$F_{1,2} = \frac{3 - 4\nu t \pm \sqrt{D}}{4(1-2\nu)t}, \qquad D = 16(1-\nu)^2t^2 - 8(2-\nu)t + 9 > 0, \tag{2.10}$$

где неравенство имеет место в силу того, что

$$\min_{0<t<1} D(t) = (1-2\nu)(5-4\nu)(1-\nu)^{-2} > 0.$$

Для функции $\Psi(t)$ из (2.8) получаем

$$\Psi(t) = 2(1-2\nu)t(F-F_1)(F-F_2). \tag{2.11}$$

Поскольку $I_{kl} > 0$ $(k, l = 1, 2, 3)$, из (2.3) следует $(1-t)2/3 < F < 2/3$, а из соотношений (2.10) и $9 - 8t + 4\nu t > 0$ находим неравенство

$$F_1 > \frac{3-4\nu t}{4(1-2\nu)t} > \frac{2}{3}.$$

Поэтому $F - F_1 < 0$ и условие $\Psi(t) = 0$ в силу (2.11) эквивалентно $F = F_2$. Покажем, что при $0 < t < 1$ это уравнение относительно t не имеет корней.

Действительно, при $\nu \to 0{,}5$ неравенство $f_1(t) > f_2(t)$ для функций из (2.9) равносильно неравенству

$$F > F_2 \equiv \frac{3-4\nu t-\sqrt{D}}{4(1-2\nu)t} = \frac{4(1-t)}{3-4\nu t+\sqrt{D}} \tag{2.12}$$

(F, F_2, D определены в (2.8), (2.10)).

Рассматривая F_2 в качестве функции ν, найдем ее производную

$$F_2'(\nu) = \frac{16(1-t)t}{(3-4\nu t+\sqrt{D})^2}\Big(1 + \frac{4(1-\nu)t-1}{\sqrt{D}}\Big).$$

Отсюда следует, что при $f_3 \equiv 4(1-\nu)t - 1 \geqslant 0$ $F_2'(\nu) > 0$. При $f_3 < 0$ также имеем $F_2'(\nu) > 0$, поскольку $D - (-f_3)^2 = 8(1-t) > 0$. Следовательно, функция $F_2 = F_2(\nu)$ является возрастающей, и из (2.12) получаем $F > F_2\big|_{\nu=0,5} > F_2\big|_{\nu<0,5}$. Тогда, учитывая, что $F - F_1 < 0$, из (2.10), (2.11) находим

$$\Psi(t) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5.$$

2.2. *ЭЖВ в виде вытянутого сфероида.* В случае если ЭЖВ имеет вид вытянутого сфероида, проводя вычисления, аналогичные вычислениям в подп. 2.1, из соотношений (2.1), (2.2), (2.4) получаем, что условие $\det \|s_{kl}^0\| = 0$ эквивалентно равенству

$$\Psi^0(t) \equiv 2(1-2\nu)t(F^0)^2 + [(4\nu-3)t+3]F^0 - 2 = 0, \tag{2.13}$$

где

$$F^0 \equiv \frac{1}{t} - \frac{1-t}{t^{3/2}} \ln \frac{1+t^{1/2}}{(1-t)^{1/2}}.$$

При $\nu = 0{,}5$ имеем

$$f_1^0(t) \equiv \ln \frac{1+t^{1/2}}{(1-t)^{1/2}} = f_2^0(t) \equiv \frac{3t^{1/2}}{3-t}. \tag{2.14}$$

Как и соотношение (2.9), уравнение (2.14) при $0 < t < 1$ не имеет корней, поскольку $f_1^0(0) = f_2^0(0) = 0$ и

$$(f_1^0(t))' = \frac{1+t^{1/2}}{2(1+t^{1/2})(1-t)} > (f_2^0(t))' = \frac{3}{2}\,\frac{3t^{-1/2}+t^{1/2}}{(3-t)^2}.$$

Следовательно, $f_1^0(t) > f_2^0(t)$.

По аналогии с (2.11) при $0 \leqslant \nu < 0{,}5$ из выражения (2.13) получаем

$$\Psi^0(t) = 2(1-2\nu)t(F^0 - F_1^0)(F^0 - F_2^0),$$

$$F_1^0 \equiv \frac{(3-4\nu)t - 3 + \sqrt{D_0}}{4(1-2\nu)t} = \frac{4}{3-(3-4\nu)t + \sqrt{D_0}}, \tag{2.15}$$

$$F_2^0 = \frac{(3-4\nu)t - 3 - \sqrt{D_0}}{4(1-2\nu)t} < 0, \qquad D_0 = (3-4\nu)^2t^2 - 2(1+4\nu)t + 9 > 0.$$

Условие $\Psi^0(t) = 0$ сводится к уравнению $F^0 = F_1^0$, которое не имеет решений при $0 < t < 1$. Действительно, для функций из (2.14) неравенство $f_1^0(t) > f_2^0(t)$ эквивалентно неравенству $F^0 < F_1^0$ при $\nu \to 0{,}5$. Поскольку $[1 + (3-4\nu)t]^2 - D_0 = 8(t-1) < 0$, для производной функции F_1^0 по ν имеем

$$(F_1^0(\nu))' = \frac{16t}{[3-(3-4\nu)t + \sqrt{D_0}\,]^2}\Big(\frac{1+(3-4\nu)t}{\sqrt{D_0}} - 1\Big) < 0.$$

Следовательно, функция $F_1^0 = F_1^0(\nu)$ является убывающей, поэтому

$$F^0 < F_1^0\big|_{\nu=0,5} < F_1^0\big|_{\nu<0,5},$$

а из соотношений (2.15) находим

$$\Psi^0(t) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5.$$

Таким образом, показано, что в рассмотренных случаях изолированных жестких включений в виде сплющенного и вытянутого сфероидов выполняется условие (2.6). Это обеспечивает единственность решения задач об определении напряжений в этих включениях при заданных на бесконечности равномерно распределенных внешних силах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** К определению напряжений в жестких включениях. Плоские задачи // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 183–186.
2. **Цвелодуб И. Ю.** Эллипсоидальное физически нелинейное включение в линейно-упругой среде // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 1. С. 84–91.

Поступила в редакцию 8/VI 2009 г.