

УДК 539.3

## РАССЛОЕНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ БАЛОК В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. Ризов, Х. Альтенбах\*

Университет архитектуры, гражданского строительства и геодезии,  
1046 София, Болгария

\* Магдебургский университет Отто фон Герике, 39106 Магдебург, Германия  
E-mails: v\_rizov\_fhe@uacg.bg, holm.altenbach@ovgu.de

Получены выражения для скорости высвобождения энергии деформации в многослойной неоднородной балке при наличии в ней трещины расслоения. Поведение материала балки, неоднородного по ее толщине, описывается соотношениями нелинейной ползучести. Для проверки точности решения используется  $J$ -интеграл. Исследовано изменение скорости высвобождения энергии деформации со временем в условиях нелинейной ползучести.

Ключевые слова: многослойная балка, неоднородный материал, нелинейная ползучесть, трещина расслоения.

DOI: 10.15372/PMTF20220515

**Введение.** Многослойные неоднородные балки состоят из адгезивно связанных слоев различных неоднородных материалов. Широкое применение многослойных материалов и конструкций в различных областях современного машиностроения обусловлено, главным образом, их большими прочностью и жесткостью при малом весе [1, 2]. Основным недостатком многослойных материалов, особенно при использовании в несущих конструкциях, является возможность их расслоения [3].

Особое внимание уделяется исследованию расслоения при нелинейном поведении материала многослойных конструкций. В отличие от работ [4, 5], в которых изучалось расслоение в нелинейных упругих многослойных неоднородных балках, в данной работе основное внимание уделяется исследованию расслоения в многослойных неоднородных балках, поведение материала которых подчиняется нелинейному закону ползучести. Следует отметить, что явление ползучести характерно для материалов различных многослойных конструкций [6–8]. Целью настоящей работы является получение общего зависящего от времени выражения для скорости высвобождения энергии деформации, в случае когда ползучесть материала описывается нелинейными зависящими от времени соотношениями между напряжением и деформацией.

**1. Общее решение.** На рис. 1 показан фрагмент многослойной неоднородной балки с трещиной расслоения. Свойства материала каждого слоя балки непрерывно изменяются по толщине. Поперечное сечение балки представляет собой прямоугольник шириной  $b$  и высотой  $h$ . Части балки, расположенные ниже и выше трещины, имеют высоту, рав-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Службы академических обменов Германии (DAAD).

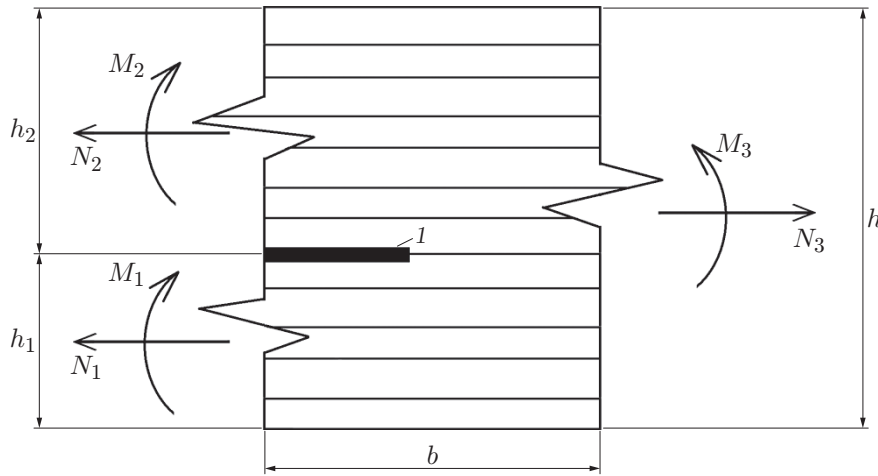


Рис. 1. Фрагмент многослойной балки с трещиной расслоения (1 — трещина)

ную  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. Осевые силы и изгибающие моменты в этих частях балки обозначены через  $N_1$ ,  $N_2$  и  $M_1$ ,  $M_2$  соответственно. Осевая сила и изгибающий момент в неразрушенной части балки обозначены через  $N_3$  и  $M_3$  соответственно (см. рис. 1). В работе [4] показано, что выражение для скорости высвобождения энергии деформации  $G$  для балки, показанной на рис. 1, при наличии в ней трещины расслоения записывается в виде

$$G = \sum_{i=1}^{n_1} \int_{z_{1i}}^{z_{1i+1}} u_{01i}^* dz_1 + \sum_{i=1}^{n_2} \int_{z_{2i}}^{z_{2i+1}} u_{02i}^* dz_2 - \sum_{i=1}^{n_3} \int_{z_{3i}}^{z_{3i+1}} u_{03i}^* dz_3, \quad (1)$$

где  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  — количество слоев в частях балки, расположенных ниже и выше трещины, и в неразрушенной части балки соответственно;  $u_{01}^*$ ,  $u_{02}^*$ ,  $u_{03}^*$  — плотности дополнительной энергии деформации в частях балки, расположенных ниже и выше трещины, и в неразрушенной части балки соответственно;  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  — координаты, отсчитываемые вдоль центральных осей поперечных сечений в частях балки, расположенных ниже и выше трещины, и в неразрушенной части балки;  $z_{1i}$ ,  $z_{1i+1}$  — координаты верхней и нижней поверхностей  $i$ -го слоя в части балки, расположенной ниже трещины (рис. 2);  $z_{2i}$ ,  $z_{2i+1}$  — координаты верхней и нижней поверхностей  $i$ -го слоя в части балки, расположенной выше трещины;  $z_{3i}$ ,  $z_{3i+1}$  — координаты верхней и нижней поверхностей  $i$ -го слоя в неразрушенной части балки.

Для материала в  $i$ -м слое балки принимается нелинейное соотношение между напряжением и деформацией в случае ползучести:

$$\varepsilon = f_i(\sigma_i, t), \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — деформация;  $\sigma_i$  — напряжение в слое;  $t$  — время.

В соответствии с гипотезой Бернулли плоских сечений распределение деформаций по высоте в части балки, расположенной ниже трещины, определяется по формуле

$$\varepsilon = \kappa_1(z_1 - z_{1n}), \quad (3)$$

где  $\kappa_1$  — кривизна нейтральной оси;  $z_{1n}$  — координата нейтральной оси (см. рис. 2). Для определения  $\kappa_1$  и  $z_{1n}$  используются уравнения равновесия

$$N_1 = b \sum_{i=1}^{n_1} \int_{z_{1i}}^{z_{1i+1}} \sigma_i dz_1, \quad M_1 = b \sum_{i=1}^{n_1} \int_{z_{1i}}^{z_{1i+1}} \sigma_i z_1 dz_1. \quad (4)$$

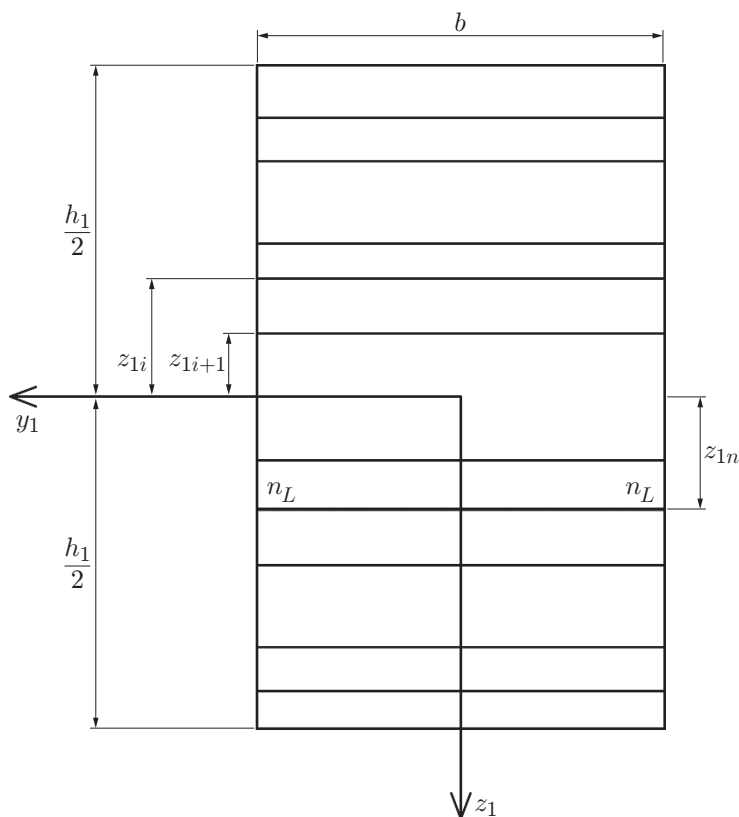


Рис. 2. Поперечное сечение части балки, расположенной ниже трещины ( $n_L n_L$  — положение нейтральной оси)

Для того чтобы использовать уравнения (4), напряжение  $\sigma_i$  нужно определить как функцию  $z_1$ . Поскольку  $f_i$  является нелинейной функцией  $\sigma_i$ , в общем случае напряжение  $\sigma_i$  не выражается явно из соотношения (2). Поэтому выражение для  $\sigma_i$  записывается в виде ряда Тейлора с сохранением первых трех членов:

$$\sigma_i(z_1) \approx \sigma(z_{Li}) + \frac{\sigma'(z_{Li})}{1!} (z_1 - z_{Li}) + \frac{\sigma''(z_{Li})}{2!} (z_1 - z_{Li})^2, \quad (5)$$

где  $z_{Li} = (z_{1i} + z_{1i+1})/2$ . Формулу (5) можно представить в виде

$$\sigma_i(z_1) \approx \alpha_{Li} + \beta_{Li}(z_1 - z_{Li}) + \delta_{Li}(z_1 - z_{Li})^2. \quad (6)$$

Коэффициенты  $\alpha_{Li}$ ,  $\beta_{Li}$ ,  $\delta_{Li}$  определяются следующим образом. Из (3), (2) получаем равенство

$$\mathcal{K}_1(z_1 - z_{1n}) = f_i(\sigma_i, t). \quad (7)$$

Затем, заменяя в (7)  $z_1$  на  $z_{Li}$ , находим

$$\mathcal{U}_1(z_{Ii} - z_{1n}) = f_i(\sigma_i, t). \quad (8)$$

Далее вычисляем в (7) первую и вторую производные по  $z_1$  и заменяем  $z_1$  на  $z_{Li}$ . В результате получаем

$$\mathfrak{x}_1 = f'_i(\sigma_i, t), \quad 0 = f''_i(\sigma_i, t). \quad (9)$$

Уравнения, аналогичные уравнениям (8), (9), можно получить для каждого слоя части балки, расположенной ниже трещины. Таким образом, имеется  $3n_1$  уравнений с  $3n_1 + 2$  неизвестными величинами:  $\varkappa_1, z_{1n}, \alpha_{Li}, \beta_{Li}, \delta_{Li}$  ( $i = 1, 2, \dots, n_1$ ). Полученные после подстановки (6) в (4) два уравнения равновесия с учетом (8), (9) решаются относительно  $\varkappa_1, z_{1n}, \alpha_{Li}, \beta_{Li}, \delta_{Li}$  с использованием пакета MatLab.

Плотность дополнительной энергии деформации равна площади области, которая дополняет область, заключенную между кривой напряжение — деформация и осью абсцисс, до прямоугольника. Поскольку деформация определяется через напряжение в соответствии с соотношением (2), плотность дополнительной энергии деформации в  $i$ -м слое части балки, расположенной ниже трещины, вычисляется в результате интегрирования этого соотношения:

$$u_{01i}^* = \int f_i(\sigma_i, t) d\sigma_i. \quad (10)$$

Формула (10) применяется также для вычисления плотности дополнительной энергии деформации в  $i$ -м слое части балки, расположенной выше трещины. Для этого  $\sigma_i$  заменяется на напряжение в указанном слое  $\sigma_{Ui}$ . Напряжение  $\sigma_{Ui}$  получается путем замены величин  $\alpha_{Li}, \beta_{Li}, \delta_{Li}, z_1, z_{Li}$  в (6) на  $\alpha_{Ui}, \beta_{Ui}, \delta_{Ui}, z_2, z_{Ui} = (z_{2i} + z_{2i+1})/2$ . Кроме того, величины  $\varkappa_1, z_{1n}, \alpha_{Li}, \beta_{Li}, \delta_{Li}, n_1, N_1, M_1, z_{1i}, z_{1i+1}$  в уравнениях (4), (8), (9) заменяются на  $\varkappa_2, z_{2n}, \alpha_{Ui}, \beta_{Ui}, \delta_{Ui}, n_2, N_2, M_2, z_{2i}, z_{2i+1}$  ( $\varkappa_2, z_{2n}$  — кривизна и координата нейтральной оси поперечного сечения части балки, расположенной выше трещины). Затем уравнения (4), (8), (9) решаются относительно  $\varkappa_2, z_{2n}, \alpha_{Ui}, \beta_{Ui}, \delta_{Ui}$  с использованием пакета MatLab.

Напряжение  $\sigma_{Di}$  в  $i$ -м слое неразрушенной части балки вычисляется путем замены величин  $\alpha_{Li}, \beta_{Li}, \delta_{Li}, z_1, z_{Li}$  в уравнении (6) на величины  $\alpha_{Di}, \beta_{Di}, \delta_{Di}, z_3, z_{Di} = (z_{3i} + z_{3i+1})/2$ . Уравнения (4), (8), (9) используются для определения  $\varkappa_3, z_{3n}, \alpha_{Di}, \beta_{Di}$  и  $\delta_{Di}$  ( $\varkappa_3, z_{3n}$  — кривизна и координата нейтральной оси в неразрушенной части балки). Для этого в уравнениях (4), (8), (9) величины  $\varkappa_1, z_{1n}, \alpha_{Li}, \beta_{Li}, \delta_{Li}, n_1, N_1, M_1, z_{1i}, z_{1i+1}$  заменяются на  $\varkappa_3, z_{3n}, \alpha_{Di}, \beta_{Di}, \delta_{Di}, n_3, N_3, M_3, z_{3i}, z_{3i+1}$  соответственно. Плотность дополнительной энергии деформации в  $i$ -м слое неразрушенной части балки вычисляется путем замены  $\sigma_i$  в уравнении (10) на  $\sigma_{Di}$ .

Скорость высвобождения энергии деформации определяется путем подстановки плотностей дополнительной энергии деформации в соотношение (1). Интегралы в соотношении (1) вычисляются с использованием пакета MatLab. Следует отметить, что скорость высвобождения энергии деформации (1) зависит от времени, поскольку дополнительная энергия деформации является функцией времени. Таким образом, можно исследовать изменение скорости высвобождения энергии деформации со временем в условиях нелинейной ползучести.

**2. Пример численного решения.** Вычислим скорость высвобождения энергии деформации с использованием соотношений, полученных в п. 1. Рассматривается свободно опертая многослойная неоднородная балка, в которой имеется трещина расслоения длиной  $a$  (рис. 3). Нижняя и верхняя части балки имеют высоту, равную  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. На балку на расстоянии  $s$  от свободного конца ее верхней части действует внешняя сила  $F$ , направленная вертикально вверх. Длина балки равна  $l$ . Для  $i$ -го слоя балки используется соотношение нелинейной ползучести между напряжением и деформацией [9]

$$\varepsilon = \frac{\sigma_i}{E_i} + e^{\sigma_i m_i / B_i} \left( \frac{\psi_i t}{m_i} \right)^{m_i}, \quad (11)$$

где  $E_i$  — модуль упругости материала;  $B_i, m_i, \psi_i$  — константы, характеризующие свой-

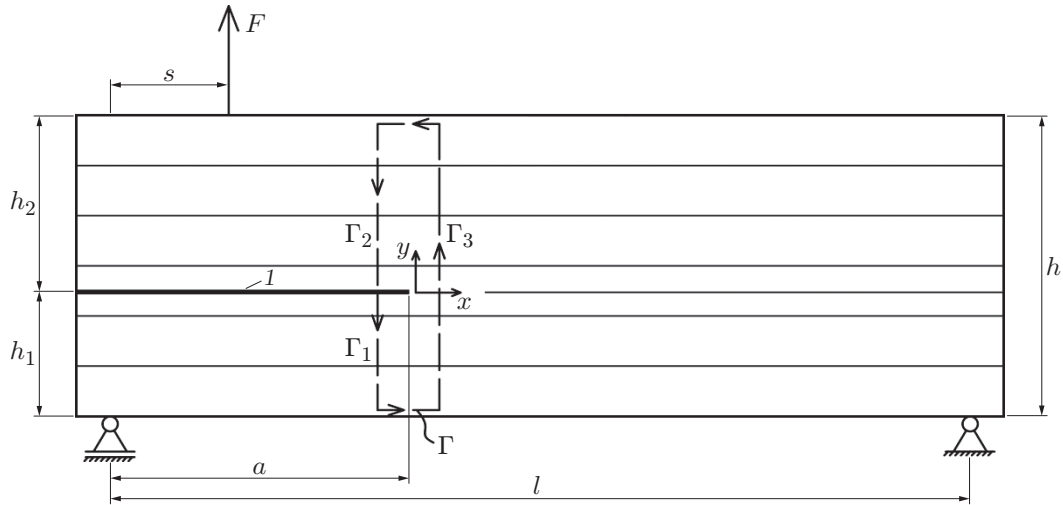


Рис. 3. Свободно опертая балка с трещиной расслоения (1 — трещина)

ства материала. Модуль упругости изменяется по толщине  $i$ -го слоя по закону

$$E_i = E_{ui} + \frac{E_{li} - E_{ui}}{(z_{1i+1} - z_{1i})^{r_i}} (z_1 - z_{1i})^{r_i}, \quad (12)$$

где  $z_{1i} \leq z_1 \leq z_{1i+1}$ ;  $E_{ui}$ ,  $E_{li}$  — значения модуля упругости на верхней и нижней поверхностях слоя;  $r_i$  — показатель степени. Следует отметить, что неравномерность распределения по толщине балки предполагается только для упругих характеристик.

Подставляя (11) в (10), получаем следующее выражение для плотности дополнительной энергии деформации в  $i$ -м слое части балки, расположенной ниже трещины:

$$u_{01i}^* = \frac{\sigma_i^2}{2E_i} + \frac{B_i}{m_i} (e^{\sigma_i m_i / B_i} - 1) \left( \frac{\psi_i t}{m_i} \right)^{m_i}. \quad (13)$$

Подставляя (6), (11), (12) в (8), (9) при  $z_1 = z_{Li}$ , получаем

$$\begin{aligned} \varkappa_1(z_{Li} - z_{1n}) &= \frac{\alpha_{Li}}{\eta_i} + \left( \frac{\psi_i t}{m_i} \right)^{m_i} e^{\alpha_{Li} m_i / B_i}, \\ \varkappa_1 &= \frac{\beta_{Li}}{\eta_i} - \frac{\alpha_{Li} \theta_i r_i (z_{Li} - z_{1i})^{r_i - 1}}{\eta_i^2} + \left( \frac{\psi_i t}{m_i} \right)^{m_i} e^{\alpha_{Li} m_i / B_i} \beta_{Li} \frac{m_i}{B_i}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\eta_i^3} \left\{ [2\delta_{Li} \eta_i - \alpha_{Li} \theta_i r_i (r_i - 1) (z_{Li} - z_{1i})^{r_i - 2}] \eta_i - [\beta_{Li} \eta_i - \alpha_{Li} \theta_i r_i (z_{Li} - z_{1i})^{r_i - 1}] \times \right. \\ &\quad \left. \times 2r_i \theta_i (z_{Li} - z_{1i})^{r_i - 1} \right\} + \left( \frac{\psi_i t}{m_i} \right)^{m_i} \left( \frac{m_i}{B_i} \right)^2 e^{\alpha_{Li} m_i / B_i} \left( \beta_{Li}^2 \frac{m_i}{B_i} + 2\delta_{Li} \right), \end{aligned}$$

где  $\theta_i = (E_{li} - E_{ui}) / (z_{1i+1} - z_{1i})^{r_i}$ ;  $\eta_i = E_{ui} + \theta_i (z_{Li} - z_{1i})^{r_i}$ . Из уравнения равновесия балки, схема которой представлена на рис. 3, следуют выражения для осевой силы и изгибающего момента в поперечном сечении части балки, расположенной ниже трещины:

$$N_1 = 0, \quad M_1 = F \frac{l - s}{l} a. \quad (15)$$

Подставляя (6), (15) в (4), получаем два уравнения равновесия, из которых с учетом (14) и с использованием пакета MatLab определяются величины  $\varkappa_1$ ,  $z_{1n}$ ,  $\alpha_{Li}$ ,  $\beta_{Li}$ ,  $\delta_{Li}$ .

Выражение для плотности энергии деформации в  $i$ -м слое части балки, расположенной выше трещины, получается путем замены в (13)  $\sigma_i$  на  $\sigma_{Ui}$ . При этом при вычислении  $\sigma_{Ui}$  величины  $\alpha_{Li}$ ,  $\beta_{Li}$ ,  $\delta_{Li}$ ,  $z_1$ ,  $z_{Li}$  в (6) заменяются на  $\alpha_{Ui}$ ,  $\beta_{Ui}$ ,  $\delta_{Ui}$ ,  $z_2$ ,  $z_{Ui}$ . Выражения для осевой силы и изгибающего момента в поперечном сечении части балки, расположенной выше трещины, имеют следующий вид (см. рис. 3):

$$N_2 = 0, \quad M_2 = F(a - s).$$

Уравнения (4), (14) используются для определения величин  $\varkappa_2$ ,  $z_{2n}$ ,  $\alpha_{Ui}$ ,  $\beta_{Ui}$ ,  $\delta_{Ui}$ . Для этого величины  $\varkappa_1$ ,  $z_{1n}$ ,  $\alpha_{Li}$ ,  $\beta_{Li}$ ,  $\delta_{Li}$ ,  $n_1$ ,  $N_1$ ,  $M_1$ ,  $z_{1i}$ ,  $z_{1i+1}$  заменяются на величины  $\varkappa_2$ ,  $z_{2n}$ ,  $\alpha_{Ui}$ ,  $\beta_{Ui}$ ,  $\delta_{Ui}$ ,  $n_2$ ,  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $z_{2i}$ ,  $z_{2i+1}$ .

Выражения для осевой силы и изгибающего момента в поперечном сечении неразрушенной части балки имеют вид (см. рис. 3)

$$N_3 = 0, \quad M_3 = F(s/l)(l - a).$$

Для того чтобы получить плотность дополнительной энергии деформации в  $i$ -м слое в неразрушенной части балки, напряжение  $\sigma_i$  в (10) заменяется на напряжение  $\sigma_{Di}$ . Выражение для  $\sigma_{Di}$  получается путем замены в (6) величин  $\alpha_{Li}$ ,  $\beta_{Li}$ ,  $\delta_{Li}$ ,  $z_1$ ,  $z_{Li}$  на  $\alpha_{Di}$ ,  $\beta_{Di}$ ,  $\delta_{Di}$ ,  $z_3$ ,  $z_{Di}$ . Величины  $\varkappa_1$ ,  $z_{1n}$ ,  $\alpha_{Li}$ ,  $\beta_{Li}$ ,  $\delta_{Li}$ ,  $n_1$ ,  $N_1$ ,  $M_1$ ,  $z_{1i}$ ,  $z_{1i+1}$  в уравнениях (4), (14) заменяются на величины  $\varkappa_3$ ,  $z_{3n}$ ,  $\alpha_{Di}$ ,  $\beta_{Di}$ ,  $\delta_{Di}$ ,  $n_3$ ,  $N_3$ ,  $M_3$ ,  $z_{3i}$ ,  $z_{3i+1}$ . Затем полученные уравнения решаются относительно величин  $\varkappa_3$ ,  $z_{3n}$ ,  $\alpha_{Di}$ ,  $\beta_{Di}$ ,  $\delta_{Di}$ .

Для вычисления скорости высвобождения энергии деформации в различные моменты времени выражение для плотности дополнительной энергии деформации подставляется в соотношение (1).

Решение для скорости высвобождения энергии деформации проверяется с использованием  $J$ -интеграла, который вычисляется в результате интегрирования по контуру  $\Gamma$ , состоящему из участков  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  (см. рис. 3). Участки  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  совпадают с поперечными сечениями частей балки, расположенных выше и ниже трещины, и неразрушенной части балки соответственно,  $J$ -интеграл представляется в виде суммы

$$J = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} + J_{\Gamma_3}. \quad (16)$$

Выражение для  $J$ -интеграла по контуру  $\Gamma_1$  записывается следующим образом [10]:

$$J_{\Gamma_1} = \sum_{i=1}^{n_1} \int_{z_{1i}}^{z_{1i+1}} \left[ u_{01i} \cos \alpha_{\Gamma_1} - \left( p_{xi\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial x_{\Gamma_1}} + p_{yi\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial x_{\Gamma_1}} \right) \right] ds_{\Gamma_1}. \quad (17)$$

Здесь  $u_{01i}$  — плотность энергии деформации;  $\alpha_{\Gamma_1}$  — угол между внешней по отношению к трещине нормалью к контуру и трещиной;  $p_{xi\Gamma_1}$ ,  $p_{yi\Gamma_1}$  — компоненты вектора напряжений в  $i$ -м слое;  $u$ ,  $v$  — компоненты вектора смещения в системе координат  $(x, y)$ , расположенной в вершине трещины;  $ds_{\Gamma_1}$  — дифференциальный элемент вдоль контура интегрирования. Величины, входящие в (17), вычисляются по формулам

$$p_{xi\Gamma_1} = -\sigma_i, \quad p_{yi\Gamma_1} = 0, \quad ds_{\Gamma_1} = dz_1, \quad \cos \alpha_{\Gamma_1} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_{\Gamma_1}} = \varepsilon.$$

Плотность энергии деформации определяется по формуле

$$u_{01i} = \sigma_i \varepsilon - u_{01i}^*. \quad (18)$$

Из (11), (13), (18) следует

$$u_{01i} = \frac{\sigma_i^2}{2E_i} + \left[ e^{\sigma_i m_i / B_i} \left( \sigma_i - \frac{B_i}{m_i} \right) + \frac{B_i}{m_i} \right] \left( \frac{\psi_i t}{m_i} \right)^{m_i}. \quad (19)$$

Выражение для  $J$ -интеграла по контуру  $\Gamma_2$  записывается в виде

$$J_{\Gamma_2} = \sum_{i=1}^{n_2} \int_{z_{2i}}^{z_{2i+1}} \left[ u_{02i} \cos \alpha_{\Gamma_2} - \left( p_{xi_{\Gamma_2}} \frac{\partial u}{\partial x_{\Gamma_2}} + p_{yi_{\Gamma_2}} \frac{\partial v}{\partial x_{\Gamma_2}} \right) \right] ds_{\Gamma_2}, \quad (20)$$

где

$$p_{xi_{\Gamma_2}} = -\sigma_{Ui}, \quad p_{yi_{\Gamma_2}} = 0, \quad ds_{\Gamma_2} = dz_2, \quad \cos \alpha_{\Gamma_2} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_{\Gamma_2}} = \varepsilon_U.$$

Деформация  $\varepsilon_U$  вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \kappa_2(z_2 - z_{2n}).$$

Выражение для плотности энергии деформации  $u_{02i}$  в (20) получается путем замены величин  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon$ ,  $u_{01i}^*$  в (19) на величины  $\sigma_{Ui}$ ,  $\varepsilon_U$ ,  $u_{02i}^*$ .

Выражение для  $J$ -интеграла по контуру  $\Gamma_3$  записывается в виде

$$J_{\Gamma_3} = \sum_{i=1}^{n_3} \int_{z_{3i}}^{z_{3i+1}} \left[ u_{03i} \cos \alpha_{\Gamma_3} - \left( p_{xi_{\Gamma_3}} \frac{\partial u}{\partial x_{\Gamma_3}} + p_{yi_{\Gamma_3}} \frac{\partial v}{\partial x_{\Gamma_3}} \right) \right] ds_{\Gamma_3}, \quad (21)$$

где

$$p_{xi_{\Gamma_3}} = \sigma_{Di}, \quad p_{yi_{\Gamma_3}} = 0, \quad ds_{\Gamma_3} = -dz_3, \quad \cos \alpha_{\Gamma_3} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_{\Gamma_3}} = \varepsilon_D = \kappa_3(z_3 - z_{3n}).$$

Для вычисления плотности энергии деформации  $u_{03i}$  величины  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon$ ,  $u_{01i}^*$  в (19) заменяются на  $\sigma_{Di}$ ,  $\varepsilon_D$ ,  $u_{03i}^*$ . После подстановки (17), (20), (21) в (16)  $J$ -интеграл вычисляется с использованием пакета MatLab.

Для проверки точности предложенного метода проводилось сравнение значения скорости высвобождения энергии деформации, вычисленного с использованием соотношения (1), и значения  $J$ -интеграла. При проверке в ряде Тейлора (1) удерживалось более трех членов. Различие результатов, полученных при сохранении первых трех членов, и результатов, полученных при сохранении более трех членов, не превышает 2 %.

Далее вычисляется безразмерная скорость высвобождения энергии  $G_N = G/(E_{u1}b)$ . Для исследования влияния расположения трещин по высоте балки анализируются две трехслойные балки с различным расположением трещины расслоения (рис. 4). Толщина каждого слоя составляет  $h_l$ . Трещина расположена между слоями 2 и 3 балки (см. рис. 4,а) либо между слоями 1 и 2 (см. рис. 4,б).

Принимается, что  $a = 0,2$  м,  $b = 0,01$  м,  $h = 0,006$  м,  $l = 0,4$  м,  $s = 0,1$  м,  $r_1 = r_2 = r_3 = 0,7$ ,  $F = 5$  Н. На рис. 5 приведена зависимость скорости высвобождения энергии деформации от безразмерного времени  $t_N = \psi_1 t$ . Видно, что скорость высвобождения энергии деформации со временем увеличивается (такое поведение обусловлено ползучестью). Скорость высвобождения энергии деформации для трещины, расположенной между слоями 2 и 3, больше.

Исследуем влияние неоднородности материала слоя 1 на скорость высвобождения энергии деформации. На рис. 6 приведена зависимость скорости высвобождения энергии деформации от отношения  $E_{l1}/E_{u1}$ . Видно, что скорость высвобождения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения  $E_{l1}/E_{u1}$ .

На рис. 7 приведена зависимость скорости высвобождения энергии деформации от отношения  $a/l$  при различных значениях параметра  $\psi_1/m_1$ . При увеличении отношений  $a/l$  и  $\psi_1/m_1$  скорость высвобождения энергии деформации также увеличивается.

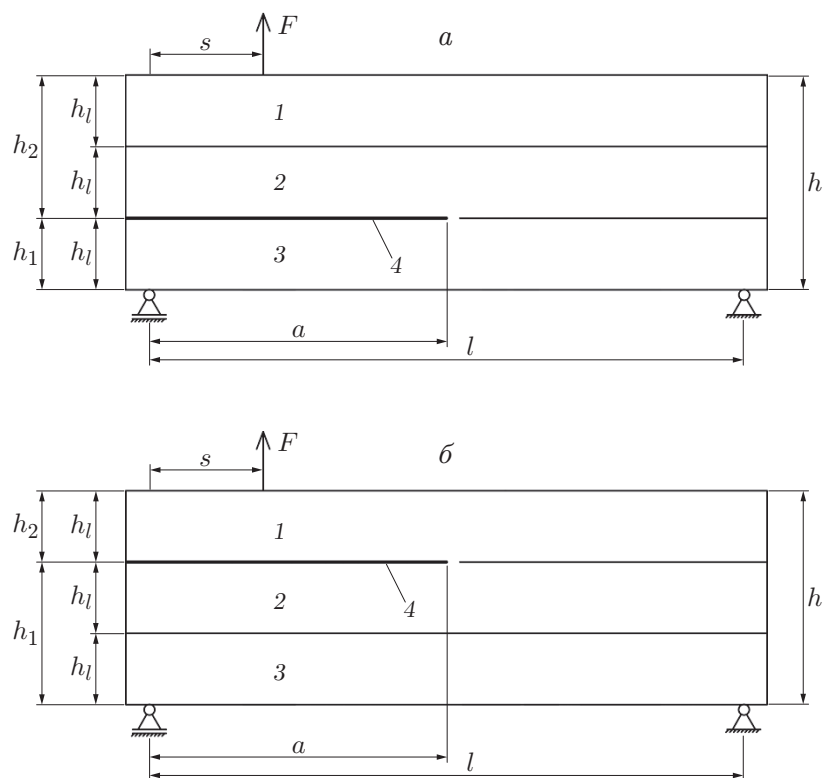


Рис. 4. Трехслойные балки с трещиной расслоения, расположенной между слоями 2 и 3 (а) и между слоями 1 и 2 (б):

1 — слой 1, 2 — слой 2, 3 — слой 3, 4 — трещина

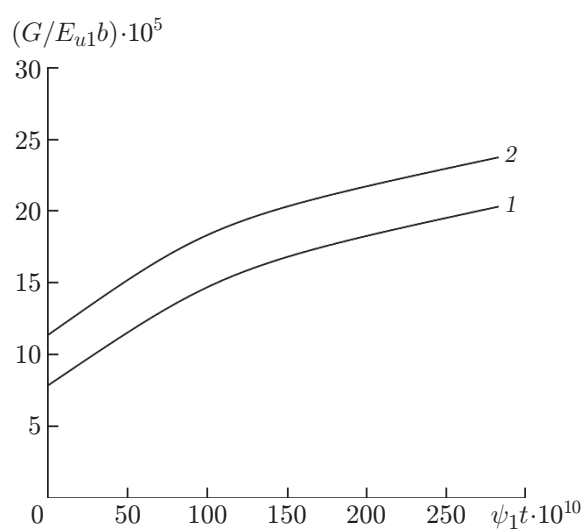


Рис. 5. Зависимость скорости высвобождения энергии деформации от безразмерного времени, в случае когда трещина расслоения расположена между слоями 1 и 2 (1) и между слоями 2 и 3 (2)

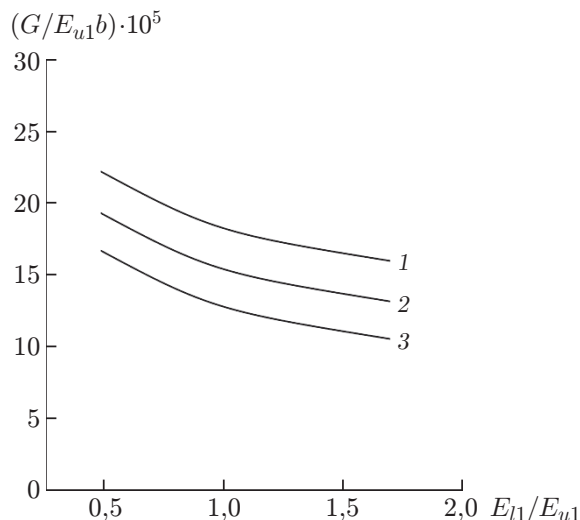


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость скорости высвобождения энергии деформации от отношения  $E_{l1}/E_{u1}$ :

1 —  $B_1/E_{u1} = 0,5$ , 2 —  $B_1/E_{u1} = 1,0$ , 3 —  $B_1/E_{u1} = 2,0$

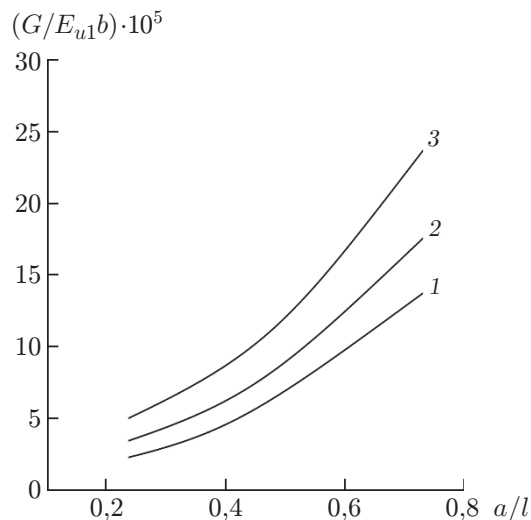


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость скорости высвобождения энергии деформации от отношения  $a/l$ :

1 —  $\psi_1/m_1 = 2 \cdot 10^{-10}$  1/ч, 2 —  $\psi_1/m_1 = 4 \cdot 10^{-10}$  1/ч, 3 —  $\psi_1/m_1 = 6 \cdot 10^{-10}$  1/ч

**Закключение.** В работе получено выражение для скорости высвобождения энергии деформации в многослойных неоднородных балках при наличии в них трещин расслоения. Материал слоев балки неоднороден по ее толщине и подчиняется нелинейному закону ползучести. Полученное решение зависит от времени. Для проверки точности решения используется  $J$ -интеграл. Установлено, что скорость высвобождения энергии деформации увеличивается со временем и уменьшается с увеличением отношений  $E_{l1}/E_{u1}$  и  $B_1/E_{u1}$ . С увеличением параметров  $a/l$  и  $\psi_1/m_1$  скорость высвобождения энергии деформации увеличивается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yu J.-H., Guo S., Gillard D. A. Bimaterial curvature measurements for CTE of adhesives: optimization and modelling // J. Adhes. Sci. Technol. 2003. V. 17, N 2. P. 149–164.
2. Markov I., Dinev D. Theoretical and experimental investigation of a beam strengthened by bonded composite strip // Reports of Intern. sci. conf. VSU'2005. 26–27 May 2005. S. 1., 2005. P. 123–131.
3. Hutchinson J. W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials // Adv. Appl. Mech. 1991. V. 29. P. 63–191.
4. Rizov V. I. An analytical solution to the strain energy release rate of a crack in functionally graded nonlinear elastic beams // Europ. J. Mech. A. Solids. 2017. V. 65. P. 301–312.
5. Rizov V. I. Delamination study of multilayered inhomogeneous beams with a smoothly changing heights // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. V. 62, N 1. P. 49–56.
6. Chang W. J., Fang T. H., Lin C. M. Thermally induced viscoelastic stresses in multilayer thin films // J. Appl. Phys. 2005. V. 97, N 10. 103521.

7. **Roy H., Dutt J. K., Datta P. K.** Dynamics of multilayered viscoelastic beams // *Structur. Engng Mech.* 2009. V. 33, N 4. P. 391–406.
8. **Lewandowski R., Baum M.** Dynamic characteristics of multilayered beams with viscoelastic layers described by the fractional Zener model // *Arch. Appl. Mech.* 2015. V. 85, N 12. P. 1793–1814.
9. **Rabotnov Y. N.** Creep of structural members. M.: Nauka, 1966.
10. **Broek D.** Elementary engineering fracture mechanics. Dordrecht: Springer, 1986.

*Поступила в редакцию 7/X 2021 г.,  
после доработки — 12/I 2022 г.  
Принята к публикации 28/II 2022 г.*

---