

СОУДАРЕНИЕ ДВУХ ПЛАСТИН С БОЛЬШОЙ СКОРОСТЬЮ

Э. И. Андрианкин

(Москва)

Рассматривается задача о столкновении двух пластин с большой скоростью, когда в результате удара образуется газ, разлетающийся в вакуум. Показано, что в направлении удара передается почти вся энергия газа. Значительное уменьшение потока энергии наступает лишь при ударе о толстую преграду. В случае, когда масса преграды в 25 раз превышает массу ударника, вперед все еще передается более 50% энергии. Увеличение плотности ударника усиливает направленное действие. Указан критерий возникновения сильного разрыва при отражении волны разрежения от плоскости соударения.

В случае столкновения пластин с одинаковой плотностью и такой толщины, при которой интенсивность ударных волн постоянна, задача описывается точным изэнтropicским решением, справедливым для ряда дискретных значений показателя адиабаты.

Если плотность ударника отлична от плотности преграды, то найдено точное решение только для $\gamma = 3$.

В остальных случаях, когда толщины ударника и преграды произвольны, использован приближенный метод, основанный на задании распределения плотности в виде полинома, коэффициенты которого подобраны на основе законов сохранения.

При соударении тел с большими скоростями (например, метеорных частиц) возникают сильные ударные волны, которые в случае большой интенсивности превращают ударившиеся тела в газ. Происходящие при этом явления сложны и в настоящее время исследованы только качественно [1-3].

Поэтому представляет интерес рассмотреть частный случай задачи о соударении тел, когда ударник и преграда представляют собой плоские пластинки. Скорость удара предполагается столь большой, что энергией сцепления в материале обеих пластин можно пренебречь.

Тогда система уравнений, описывающих движение среды после удара, в предположении о постоянстве показателя адиабаты γ запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho \rho^{-\gamma}}{\partial t} + u \frac{\partial \rho \rho^{-\gamma}}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial x}{\partial x_0} &= \frac{\rho_0}{\rho} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x и t — координата и время; ρ , u и p — плотность, скорость и давление; x_0 и ρ_0 — начальная координата и плотность частицы.

Граничными условиями для уравнений (1) служат соотношения на фронте ударной волны

$$\rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad u = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{dx_*}{dt}, \quad p = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{dx_*}{dt} \right)^2 \rho_0 \quad \text{при } x = x_*(t) \quad (2)$$

На свободной поверхности при $x_0 = 0$ и $x_0 = a$ $p(0, t) = 0$, $p(a, t) = 0$. На плоскости соударения при $x_0 = b$ возникает контактный разрыв, поэтому

$$p(b + 0, t) = p(b - 0, t), \quad u(b + 0, t) = u(b - 0, t) \quad (3)$$

Если ударник и преграда сделаны из одинаковых материалов, а отношение их толщин $\mu = b/h$ лежит в таких пределах, что интенсивность ударных волн сохраняется, то можно получить точное решение для любых моментов времени.

Различные области решения изображены на x, t диаграмме (фиг. 1). Решение в области 1 легко получить из (2) и (3)

$$u = \frac{v}{1+\varepsilon} = u_0, \quad D_0 = \frac{[2+(1-\gamma)\varepsilon]}{2(1+\varepsilon)} v, \quad D_1 = \frac{\gamma+1}{2} u_0$$

$$p = \rho_0 u_0 D_1 \varepsilon^2, \quad c_0 = \varepsilon c_1, \quad c_1 = u_0 \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}, \quad \varepsilon = 1 \quad (4)$$

$$t_0 = \frac{b}{v-D_0}, \quad t_1 = \frac{h}{D_1}, \quad 2t_2 = t_1 + t_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{h}{c_1} + \frac{b}{c_0} \right)$$

В области 2 и 3 решение описывается центрированными волнами

$$x - a = (t - t_1)(u - c), \quad u + \frac{2}{\gamma-1} c = u_0 \left[1 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right] = u_+ \quad (5)$$

$$x - t_0 v = (t - t_0)(u + c), \quad u - \frac{2}{\gamma-1} c = u_0 \left[1 - \varepsilon \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right] = u_-$$

В области 4 происходит взаимодействие волн, и общее изэнтропическое решение уравнений (1) сводится к решению уравнения Дарбу.

Замечаем, что в подвижной системе координат

$$t' = t - t_1, \quad x' = x - u_0 t' - a \quad (a = b + h)$$

решение сводится к известной задаче К. П. Станюковича [4] об истечении газа из трубы длиной $l = (\gamma - 1) a / (\gamma + 1)$, левый конец которой открывается на время $\tau = t_0 - t_1$ позже, чем правый.

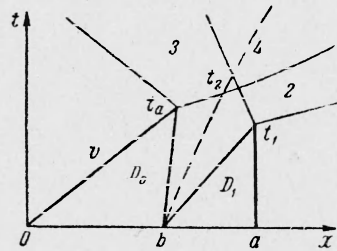
Решение в области 4, записанное в виде

$$t' = \frac{4}{\gamma-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad x' = u' t' - \frac{\partial \Psi}{\partial u'}$$

$$\Psi = \frac{\gamma-1}{8 \cdot n!} l \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \frac{(\theta - z^2)^n [0.5\tau z + 2n + 1]}{\sqrt{\theta}}$$

$$z = u' + \sqrt{\theta}, \quad \sqrt{\theta} = \frac{2}{\gamma-1} c, \quad n = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}$$

$$(n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$



Фиг. 1

справедливо, если ни одна из волн разрежения не догоняет фронт сильного разрыва, т. е. когда $t_2 \geq \max \{t_0, t_1\}$. Используя (2), находим, что из этого условия следуют ограничения на μ

$$\frac{1}{\mu_*} \leq \mu \leq \mu_*, \quad \mu_* = \frac{(1 + \sqrt{2n+3})^2}{2(n+1)}$$

Представляет интерес вычислить массу m_+ , импульс I_+ и энергию E_+ газа, идущие в направлении удара при $t \rightarrow \infty$. Так как в этом случае $p \rightarrow 0$, то из уравнений (1) следует, что $x' \rightarrow u' t$, $\rho \rightarrow F(u') t^{-1}$. Вид функции F определяется формулами (6). Учитывая, что в направлении удара летят частицы газа, у которых в системе координат x', t' скорость u' больше, чем $-v/2$, и что при $t \rightarrow \infty$ вся энергия переходит в кинетиче-

скую, выражения для m_+ , I_+ и E_+ представим в виде

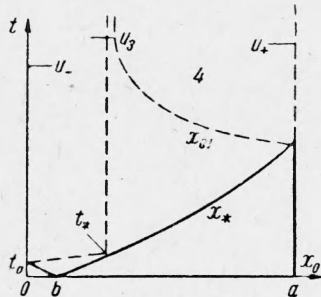
$$m_+ = \int_{k_1}^{k_2} \rho t \, du', \quad I_+ = \int_{k_1}^{k_2} \rho t \left(u' + \frac{v}{2} \right) du', \quad 2E_+ = \int_{k_1}^{k_2} \rho t \left(u' + \frac{v}{2} \right)^2 du' \quad (7)$$

$$M_0 = \frac{m_+}{\rho_0 b}, \quad I = \frac{I_+}{\rho_0 b v} = M_1 + 0.5 M_0, \quad E = \frac{2E_+}{\rho_0 b v^2} = M_2 + I - 0.25 M_0$$

$$M_\alpha = \frac{(2n+1)! (\mu-1)}{2^{2n+1} (n!)^2 \mu k (2k)^\alpha} \int_{-k}^1 s^\alpha (1-s^2)^n \left(s + \frac{\mu+1}{\mu-1} k \right) ds$$

$$\left(k_1 = -\frac{v}{2}, \quad k_2 = \frac{2}{\gamma-1} c_0, \quad k = (2n+3)^{-1/2}, \quad t \, du' = dx', \quad \alpha = 0, 1, 2 \right)$$

Если $\mu < 1/\mu_*$, то ударная волна начинает затухать. Существенным является то обстоятельство, что практически сразу после взаимодействия волны разрежения с сильным разрывом характер затухания оказывается степенным с показателем, соответствующим теории «короткого удара» [5, 6]. Поэтому решение за фронтом волны при $t > t_* = t_0 \mu_*$ (фиг. 2) можно записать по аналогии с теорией «короткого удара»



Фиг. 2

$$\rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0 q, \quad u = \left(\frac{2A}{\gamma+1} \right)^{1/2} x_*^{-1/2} \omega w$$

$$p = A \rho_0 x_*^{-\omega} f, \quad x_* = \left[\left(\frac{\gamma+1}{2} A \right)^{1/2} \eta \lambda \right]^{1/\lambda}$$

$$\lambda (t_* + \delta) \left(\frac{\gamma+1}{2} A \right)^{1/2} = [b (1 + \mu_*)]^\lambda \quad (8)$$

$$\xi = x_0 / x_*, \quad \eta = t + \delta, \quad \lambda = 1 + \omega / 2$$

$$q(1, \eta) = 1, \quad w(1, \eta) = 1, \quad f(1, \eta) = 1$$

При больших t функции q , w и f стремятся к решению (5) и зависят только от ξ . Коэффициент A , который определяется из условия сопряжения величины p на фронте сильного разрыва в момент прихода волны разрежения, и начальная скорость разлета газа в вакуум при $x_0 = a$ записутся так:

$$A = \frac{\gamma+1}{8} [(1 + \mu_*) b]^\omega v^2, \quad u_+ = \left(\frac{2A}{\gamma+1} \right)^{1/2} a^{-1/2} \omega \left[1 + \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)^{1/2} \right] \quad (9)$$

Чтобы найти m_+ , I_+ и E_+ при $t \rightarrow \infty$, зададимся распределением плотности [4]

$$\rho(u) = \frac{\rho_0 a}{vt} [(z - z_1)(z - z_2)]^\mu (K_0 + K_1 z + K_2 z^2)$$

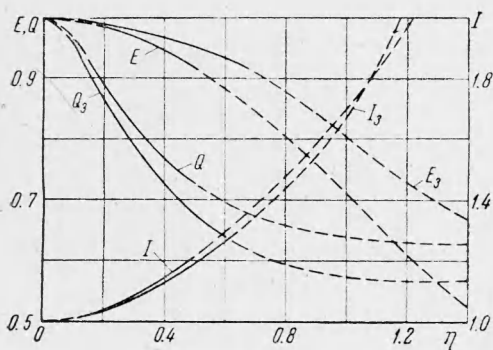
$$\rho_0 a = \int_{u_-}^{u_+} \rho du, \quad \rho_0 b v = \int_{u_-}^{u_+} \rho u du, \quad \rho_0 b v^2 = \int_{u_-}^{u_+} \rho u^2 du \quad (10)$$

$$z = u / v, \quad z_1 = u_+ / v, \quad z_2 = u_- / v$$

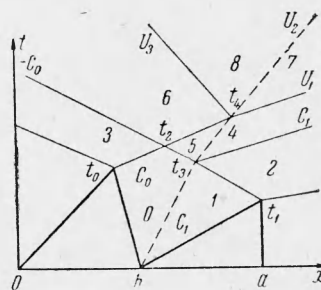
потребовав, чтобы ρ на свободных границах также стремилось к нулю, как по волне Римана, и удовлетворяло законам сохранения, из которых определяются константы K_0 , K_1 и K_2 . Зная $\rho(u)$, величины m_+ , I_+ и E_+ находят интегрированием по u функций ρ , ρu , ρu^2 в пределах от 0 до u_+ .

Если $a \gg b$, то возмущение от правого конца при $t \rightarrow \infty$ не достигает частиц (фиг. 2) с лагранжевой координатой $b(1 + \mu_*)$. Распределение плотности снова можно задать в виде полинома, однако вместо множителя

$(u - u_-)^n$ следует писать выражение $u - u_3$, где u_3 — величина скорости при $t \rightarrow \infty$ на характеристике $x_{01}(t)$, и для определения K_0, K_1 и K_2 использовать законы сохранения, применительно к области 4 между этой характеристикой и свободной поверхностью (фиг. 2). Так, при



Фиг. 3



Фиг. 4

$\gamma = 1.4$, исходя из точного решения (7), легко написать уравнение характеристики x_{01} , а также формулы для скорости u_3 , количества массы m , импульса i и энергии e во всей области 4 и минимальное значение a_{\min} , при котором x_{01} не достигает линии $x_0 = b(1 + \mu_*)$

$$\left(\frac{a}{x_{01}}\right)^{1/3} = N - \sqrt{7} \left(\frac{a}{x_*}\right)^{1/3}, \quad u_3(\infty) = -\left(\frac{5A_0}{24}\right)^{1/2} N^2 a^{-2/3}$$

$$a_{\min} = bN^3(1 + \mu_*), \quad m = \rho_0 a(1 - N^{-3}), \quad i = \rho_0 a^{1/3}(\sqrt{7} - 1) \left(\frac{5A_0}{24}\right)^{1/2}$$

$$e = \frac{5A_0 \rho_0 N}{16} a^{-1/3}, \quad A_0 = \left(\frac{10}{3}\right)^{1/6} b^{4/3} v^2, \quad N = 1 + \sqrt{7}$$

На фиг. 3 приведены результаты расчетов доли энергии E , импульса I и массы $Q = m_+ / (m_+ + m_-)$ газа, летящего в направлении удара, для $\gamma = 1.4$ и $\gamma = 3$ по формулам (7) (сплошные линии) и по формулам (10) (пунктир). Эти величины приведены в зависимости от параметра $\eta = \lg(a/b)$ и для $\gamma = 3$ отмечены индексом 3. При вычислениях для случая $\gamma = 1.4$ использовались точные значения $\omega = 4/3$ и $A = A_0$, соответствующие точному решению [7]. Точное значение A оказалось приблизительно на 15% меньше вычисленного по формуле (9). Для случая $\gamma = 3$ A вычислялось по приближительной формуле (9).

Из фиг. 4 видно, что в направлении удара идет почти вся энергия пластинок и более половины их массы. При этом I превышает начальный импульс удара. Значительное уменьшение потока энергии наступает лишь при ударе о толстую преграду. Но даже при отношении $h/b = 25$ вперед все еще передается более 50% начальной энергии. Расчеты показывают, что Q, I и E слабо зависят от показателя адиабаты, если преграда ненамного толще ударника, заметное отличие в распределении этих величин для толстых преград происходит главным образом из-за различия в законах затухания ударной волны при разных γ .

Изложенное выше качественно подтверждает следствия из работы [3]. Оно также позволяет оценить долю передаваемой вперед энергии, что трудно сделать на примере автотельной задачи, для которой начальная энергия бесконечна. Выясним характерные черты явления, когда плотность ударника ρ_0 отлична от плотности преграды ρ_1 .

Различные области решения изображены на фиг. 4. Решение в областях 0—3 дается соответственно формулами (4)—(5), в которых надо положить $\varepsilon = (\rho_1 / \rho_0)^{1/2}$.

Для простоты положим $\gamma = 3$. В этом случае характеристики являются прямыми, поэтому общее решение есть суперпозиция проходящих и отраженных волн и легко записывается в явном виде. Для удобства перейдем к подвижной системе координат. Тогда решение будет:

в области 4

$$x' = t' (u' - c), \quad x' = (u' + c) t' + R (u' + c)$$

в области 5

$$u' + c = c_0, \quad x' = (u' - c) t' + \varphi (u' - c) \quad (11)$$

в области 6

$$x' + l = (t' - \tau) (u' - c), \quad x' = (u' - c) t' + \varphi(u' - c)$$

в области 7

$$x' = t' (u' - c), \quad x' = (u' + c) t' - 2F(u' + c)$$

в области 8

$$x' + l = (t' - \tau) (u' + c), \quad x' = (u' - c) t' - \Phi(u' - c)$$

Вид функций R, φ, F, Φ и уравнение линии контактного разрыва $x = x_3(t)$ определяются из условия равенства скоростей и давлений

$$\begin{aligned} u_4'(x_3', t) &= u_5'(x_3', t), & u_7'(x_3', t) &= u_8'(x_3', t) \\ c_5(x_3', t) &= \varepsilon c_4(x_3', t), & c_8(x_3', t) &= \varepsilon c_7(x_3', t), & u' &= \frac{dx_3'}{dt} \end{aligned} \quad (12)$$

Используя (11) и (12), найдем

$$R(u' + c) = -2k_0 \left[\frac{c_1(1-\varepsilon)}{u' + c - c_0} \right]^\varepsilon, \quad \varphi(u' - c) = (\varepsilon - 1) k_0 \left[\frac{2c_0}{c_0 + c - u'} \right]^\varepsilon$$

$$\tau(u' + c) = -l + 2F + (\varepsilon - 1) \left(1 - \frac{\tau}{i_4'}\right) \left[\frac{l + c_0\tau}{1 + \varepsilon} \right]^\varepsilon F^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad (13)$$

$$\tau(u' - c) = -l + \Phi + 2\varepsilon \left(\frac{1-\varepsilon}{\Phi}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\tau}{i_4'}\right) \left[\frac{l + c_0\tau}{1 + \varepsilon} \right]^\varepsilon$$

$$x_3' = c_0 t' - c_1 (1 + \varepsilon) \left(\frac{k_0}{c_1}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} t'^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \quad \text{при } t_3' \leq t' \leq t_4'$$

$$x_3' = \frac{lt'}{\tau} \left[\left(1 + \frac{x_4\tau}{li_4'}\right) \left(1 - \frac{\tau}{i_4'}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(1 - \frac{\tau}{i_4'}\right)^{-\frac{1}{1+\varepsilon}} - 1 \right] \quad \text{при } t' > t_4'$$

$$t_3' = \frac{k_0}{c_1}, \quad i_4' = \left[\frac{l + c_0\tau}{c_1(1 + \varepsilon)} \right]^\varepsilon \left(\frac{c_1}{k_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \quad k_0 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} h, \quad x_4 = x_3'(t_4')$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ формулы (11) и (13) дают известное решение задачи об отражении волны Римана от твердой стенки.

В направлении удара летят частицы газа, скорость которых при $t' \rightarrow \infty$ в системе координат x', t' лежит в пределах $-u_0 \leq u \leq c_1$. Поэтому надо следить, в какую из областей, изображенных на диаграмме 4, попадает частица с интересующей нас скоростью; так при $t \rightarrow \infty$

в области 4

$$u_1 \leq u \leq c_1, \quad u_1 = c_0 + c_1(1 - \varepsilon)\vartheta$$

в области 7

$$u_2 \leq u \leq u_1, \quad u_2 = \frac{l + c_0\tau}{\tau} \left(1 - \frac{\tau}{i_4'}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} - \frac{l}{\tau}$$

