УДК 519.115

Перечислительные задачи множеств возрастающих и убывающих n-значных серийных последовательностей с двусторонним ограничением на высоты серий

В.А. Амелькин

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mail: amel-kin@yandex.ru

Амелькин В.А. Перечислительные задачи множеств возрастающих и убывающих n-значных серийных последовательностей с двусторонним ограничением на высоты серий // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 3. — С. 205–215.

Решаются перечислительные задачи для множеств n-значных серийных последовательностей. Рассматриваются множества возрастающих и убывающих последовательностей, структура которых задается ограничениями на длины серий и на разность высот соседних серий в случае, когда эта разность не меньше δ_1 и не больше δ_2.

Получены формульные выражения мощностей этих множеств и алгоритмы прямой и обратной нумерации (приписывающие меньшие коды-номера лексикографически младшим последовательностям и приписывающие меньшие коды-номера лексикографически старшим последовательностям).

Ключевые слова: *серийная последовательность, длина серии, высота серии, ограничения.*

Amelkin V.A. Enumeration problems of sets of increasing and decreasing n-valued serial sequences with double-ended constraints on series heights // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 3. — P. 205–215.

Enumeration problems for n-valued serial sequences are considered. Sets of increasing and decreasing sequences whose structure is specified by constraints on lengths of series and on a difference in heights of the neighboring series in the case when this difference lies between δ_1 and δ_2 are examined.

Formulas for powers of these sets and algorithms for the direct and reverse numerations (assigning smaller numbers to the lexicographically lower-order sequences or smaller numbers to the lexicographically higher-order sequences) are obtained.

Key words: *serial sequences, series length, series height, constraints.*

Введение

Под решением перечислительной задачи для множества конечных последовательностей, обладающих некоторой совокупностью свойств, понимается получение формульного выражения мощности множества и установление алгоритмического взаимно-однозначного соответствия между последовательностями множества и элементами отрезка натурального ряда. При решении этих задач обычно используется технически сложный аппарат производящих функций. Для последовательностей, составленных из серий, в [1] предложен более простой подход, основанный на использовании формульных выражений числа размещений одинаковых предметов (элементов) в различимых ячейках (сериях) при заданных ограничениях на емкость ячеек (длины серии). В дальнейшем будем говорить не о свойствах, которыми обладают последовательности множества, а об ограничениях, которым удовлетворяют элементы последовательностей.

В предлагаемой работе рассматриваются множества возрастающих и убывающих n-значных последовательностей серийной структуры. Кроме обычно задаваемых ограничений на число серий и длины серий, структура этих последовательностей будет уточняться заданием ограничения на разность высот соседних серий. В работе [2] решены перечислительные задачи для множеств возрастающих и убывающих серийных последовательностей для случая, когда разность высот не меньше δ и для случая, когда разность высот не больше δ. Здесь рассмотрим более сложное обобщающее ограничение, когда разность высот соседних серий не меньше δ_1 и не больше δ_2. Целью настоящей статьи является решение перечислительных задач для указанных множеств последовательностей при обобщенном ограничении на разность высот. Будут получены алгоритмы прямой нумерации (приписывающие меньшие номера лексикографически младшим последовательностям) и обратной нумерации (приписывающие меньшие номера лексикографически старшим последовательностям). Пользователю предоставляется возможность выбора способа нумерации, обусловленного либо требованием задачи, либо вычислительной сложностью.

Приведем обобщенные схемы прямой и обратной нумерации. Пусть $Z(n,m)$ — множество n-значных последовательностей длины m, $z = (z_i|z_i \in \overline{0, n-1};\ i = \overline{1, m})$ — последовательность из $Z(n,m)$. Обозначим через $W(z_1, z_2, \ldots, z_\kappa)$ число последовательностей из $Z(n,m)$, у которых первые $\kappa \le m$ элементов равны $(z_1, z_2, \ldots, z_\kappa)$. При прямой нумерации, предложенной в [3], номер для z вычисляется по схеме

$$N(z) = \sum_{i=1}^{m} V(z_i), \quad V(z_i) = \sum_{j=0}^{z_i-1} W(z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, j). \tag{1}$$

При обратной нумерации номер для z вычисляется по схеме

$$\tilde{N}(z) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{V}(z_i), \quad \tilde{V}(z_i) = \sum_{j=z_i+1}^{n-1} W(z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, j). \tag{2}$$

Вычисление элементов $z_i \in z$ по заданным номерам $N(z)$ или $\tilde{N}(z)$ выполняется так же по известным схемам [1] с помощью $V(z_i)$ или $\tilde{V}(z_i)$. Следовательно, основная сложность при установлении взаимно-однозначного соответствия между последовательностями из $Z(n,m)$ и элементами отрезка натурального ряда $\overline{0, |Z(n,m)|-1}$ состоит в получении формульных выражений для $V(z_i)$ или $\tilde{V}(z_i)$, которые и будут определяться в последующих утверждениях. Будем называть *базовыми подпоследовательностями* (БП) координаты z_i: при нумерации по (1) — подпоследовательности длины $m-i+1$ последовательностей младших z по i-й координате; при нумерации по (2) — подпоследовательности длины $m-i+1$ последовательностей старших z по i-й координате. Очевидно, что число БП координаты z_i определяет $V(z_i)$ или $\tilde{V}(z_i)$.

1. Определения и обозначения

Используем общепринятые понятия серии, длины серии, количество серий. Последовательность, составленную из серий элементов $x_i \in \overline{0, n-1}$; $i = \overline{1, m}$, называем серийной последовательностью (СП). Для уточнения структуры СП вводится понятие высоты серии — значение элемента, образующего эту серию. Тогда всякой n-значной СП, содержащей p серий, ставится в соответствие последовательность высот $h = (h_j | h_j \in \overline{0, n-1}; j = \overline{1, p})$. Например, при $n = 5$, $p = 3$ для СП (2,2,2,0,0,4,4,4,4) последовательность высот будет $h = (2, 0, 4)$. Задание некоторого ограничения R_u на высоты h_j уточняет структуру СП. Например, с помощью ограничения $R_u : 1 \le h_{j+1} - h_j \le \delta$ выделяется класс возрастающих СП, в которых элементы каждой последующей серии превосходят элементы предыдущей серии на величину не меньше 1 и не больше δ.

Обозначим через $f(\beta, \gamma, s)$ число способов размещений β одинаковых элементов по γ различимым сериям при заданном ограничении на длины s этих серий. В дальнейшем будут рассматриваться СП, в которых длины серий могут удовлетворять любому ограничению из списка:

$$s = \varepsilon,\ 1 \le s \le \varepsilon,\ s \ge \varepsilon,\ \varepsilon_1 \le s \le \varepsilon_2,\ s = \varepsilon_{\text{доп}}. \tag{3}$$

Для конкретного ограничения на s, например $s \ge \varepsilon$, число способов размещений обозначается $f(\beta, \gamma, s \ge \varepsilon)$. В [1] получено формульное выражение числа размещений при ограничении $\varepsilon_1 \le s \le \varepsilon_2$:

$$\begin{gathered} f(\beta, \gamma, \varepsilon_1 \le s \le \varepsilon_2) = \sum_{\kappa=0}^{æ} (-1)^\kappa \binom{\gamma}{\kappa} \binom{\beta - 1 - \gamma(\varepsilon_1 - 1) - \varepsilon_0 \kappa}{\gamma - 1}, \\ \varepsilon_0 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 1, \quad æ = \min\{\gamma, \lfloor (\beta - \gamma\varepsilon_1)/\varepsilon_0 \rfloor\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Формульные выражения числа размещений для других ограничений из списка (3) определяются с помощью (4): при $s = \varepsilon$ следует $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$; при $s \le \varepsilon$ следует $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$; при $s \ge \varepsilon$ следует $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = m$; при $s = \varepsilon_{\text{доп}}$ следует $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = m$.

Обозначим: $H(n, p, R_u)$ — множество n-значных последовательностей высот длины p, элементы которых удовлетворяют некоторому ограничению R_u; $|H(n, p, R_u)|$ — число последовательностей в $H(n, p, R_u)$; $X(n, m, s, R_u)$ — множество n-значных СП длины m, в которых длины серий s удовлетворяют некоторому ограничению из (3) и высоты серий ограничению R_u; $|X(n, m, s, R_u)|$ — число СП в $X(n, m, s, R_u)$; $x = (x_i | x_i \in \overline{0, n-1}; i = \overline{1, m})$ — последовательность из $X(n, m, s, R_u)$. Для конкретного ограничения на s, например $s \le \varepsilon$, множество обозначается $X(n, m, s \le \varepsilon, R)$. Для заданного ограничения на высоты R_u и ограничения на s в [1] доказано

$$\begin{gathered} |X(n, m, s, R_u)| = \sum_{p=\omega_1}^{\omega_2} f(m, p, s) |H(n, p, R_u)|, \\ \omega_1 = \lceil m/\varepsilon_2 \rceil, \quad \omega_2 = \lfloor m/\varepsilon_1 \rfloor. \end{gathered} \tag{5}$$

Последующие утверждения и доказательства будут приведены для ограничения на s, заданного в виде $\varepsilon_1 \le s \le \varepsilon_2$. При упрощении комбинаторных выражений используются тождества:

$$\sum_{\kappa=0}^{n} \binom{a + \kappa}{b} = \binom{a + n + 1}{b + 1} - \binom{a}{b + 1}, \tag{6}$$

$$\sum_{\kappa=0}^{n} \binom{a - \kappa}{b} = \binom{a + 1}{b + 1} - \binom{a - n}{b + 1}. \tag{7}$$

Также используются функции двух аргументов:

$$\tau(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a = b, \\ 0 & \text{при} \quad a \neq b; \end{cases} \qquad \mu(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a \geq b, \\ 0 & \text{при} \quad a < b. \end{cases}$$

Функция $\tau(a,b)$ при целочисленных аргументах известна в математике под названием символ Кронекера.

2. Ограничения на высоты серий

Ограничение на высоты возрастающих СП обозначим через R_1, а ограничения на высоты убывающих СП обозначим R_2. Эти ограничения запишем в виде:

$$R_1 : \delta_1 \leq h_{j+1} - h_j \leq \delta_2,\ h_j \in \overline{0, n-1},\ \delta_1, \delta_2 \in \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, p};$$
$$R_2 : \delta_1 \leq h_j - h_{j+1} \leq \delta_2,\ h_j \in \overline{0, n-1},\ \delta_1, \delta_2 \in \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, p}.$$

Получим формульное выражение величины $|H(n,p,R_1)|$, необходимое для решения перечислительных задач.

Утверждение 1.

$$\begin{gathered} |H(n,p,R_1)| = \sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^{\alpha} \binom{p-1}{\alpha} \binom{n - (\delta_1 - 1)(p-1) - \delta_0 \alpha}{p}, \\ \delta_0 = \delta_2 - \delta_1 + 1, \quad \nu = \min\{p-1, \lfloor (n-1-(p-1)\delta_1)/\delta_0 \rfloor\}. \end{gathered} \tag{8}$$

Доказательство. При ограничении R_1 последовательности высот $h \in H(n,p,R_1)$ являются строго возрастающими, в которых каждый последующий элемент h_{j+1} превосходит предыдущий на величину не меньшую δ_1 и не большую δ_2. Каждой последовательности $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ длины p поставим в соответствие последовательность $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{p-1})$ длины $p-1$ по следующему правилу:

$$z_\kappa = h_{j+1} - h_j - \delta_1, \quad \kappa = \overline{1, p-1},\ j = \overline{1, p}. \tag{9}$$

Элементы $z_\kappa \in z$ будут являться уменьшенными на δ_1 первыми разностями. Например, при $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 5$ последовательности $h = (2, 5, 7, 11)$ ставится в соответствие последовательность $z = (1, 0, 2)$. При заданных δ_1, δ_2 элементы z_κ будут удовлетворять ограничению $0 \leq z_\kappa \leq \delta_2 - \delta_1$. Следовательно, суммы элементов z_κ в последовательностях z могут изменяться в пределах от 0 до $(\delta_2 - \delta_1)(p-1)$.

По полученной в [4] формуле (5.17) определяется число различных последовательностей, составленных из m элементов $a_i \in \overline{0, n-1}$, сумма которых равна $\omega \leq m(n-1)$. С помощью этой формулы определим число последовательностей z, составленных из $p-1$ элементов $z_\kappa \in \overline{0, \delta_2 - \delta_1}$, сумма которых равна $\omega \leq (\delta_2 - \delta_1)(p-1)$:

$$\begin{gathered} F(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^{\alpha} \binom{p-1}{\alpha} \binom{p-2+\omega-\delta_0\alpha}{p-2}, \\ \delta_0 = \delta_2 - \delta_1 + 1, \quad \nu = \min\{p-1, \lfloor \omega/\delta_0 \rfloor\}. \end{gathered} \tag{10}$$

Понятно, что в строго возрастающих последовательностях $h \in H(n,p,R_1)$ первые элементы h_1 могут принимать значения от 0 до $n - 1 - \delta_1(p-1)$. Обозначим через $Z(h_1)$ множество последовательностей z, полученных по (9) из последовательностей h, начинающихся с элемента $h_1 \in \overline{0, n-1-\delta_1(p-1)}$. С помощью (10) будем определять число последовательностей в $Z(h_1)$ при различных значениях h_1.

Для определения величины $H(n,p,R_1)$ по заданным n, p, δ_1, δ_2 рассматриваем случаи: $n \le \delta_2(p-1)$; $n \ge \delta_2(p-1)+1$.

При $n \le \delta_2(p-1)$ очевидно:
если $h_1 = 0$, то сумма элементов z_κ в последовательностях $z \in Z(0)$ может изменяться в пределах от 0 до $n-1-\delta_1(p-1)$;
если $h_1 = 1$, то сумма элементов z_κ в последовательностях $z \in Z(1)$ может изменяться в пределах от 0 до $n-1-\delta_1(p-1)-1$;
....
если $h_1 = n-1-\delta_1(p-1)$, то сумма элементов z_κ в единственной последовательности $z \in Z(h_1)$ будет равна 0.

Следовательно, для случая $n \le \delta_2(p-1)$ получим

$$|H(n,p,R_1)| = \sum_{h_1=0}^{n-1-\delta_1(p-1)} \sum_{\omega=0}^{n-1-\delta_1(p-1)-h_1} F(\omega). \tag{11}$$

При $n \ge \delta_2(p-1)+1$ очевидно:
если $0 \le h_1 \le n-1-\delta_2(p-1)$, то сумма элементов z_κ в последовательностях $z \in Z(h_1)$ может изменяться в пределах от 0 до $(\delta_2-\delta_1)(p-1)$;
если $h_1 = n-1-\delta_2(p-1)+1$, то сумма элементов z_κ в последовательностях $z \in Z(h_1)$ может изменяться в пределах от 0 до $(\delta_2-\delta_1)(p-1)-1$;
если $h_1 = n-1-\delta_2(p-1)+2$, то сумма элементов z_κ в последовательностях $z \in Z(h_1)$ может изменяться в пределах от 0 до $(\delta_2-\delta_1)(p-1)-2$;
....
если $h_1 = n-1-\delta_1(p-1)$, то сумма элементов z_κ в единственной последовательности $z \in Z(h_1)$ будет равна 0.

В этом случае получаем

$$|H(n,p,R_1)| = [n-\delta_2(p-1)] \sum_{\omega=0}^{(\delta_2-\delta_1)(p-1)} F(\omega) + \sum_{h_1=n-\delta_2(p-1)}^{n-1-\delta_1(p-1)} \sum_{\omega=0}^{n-1-\delta_1(p-1)-h_1} F(\omega). \tag{12}$$

Но при $n \ge \delta_2(p-1)+1$ следует $F(\omega = n-1-\delta_2(p-1)) = F(\omega = (\delta_2-\delta_1)(p-1))$. Тогда выражение (12) представимо в виде

$$\begin{aligned} |H(n,p,R_1)| &= \sum_{h_1=0}^{n-1-\delta_2(p-1)} \sum_{\omega=0}^{n-1-\delta_1(p-1)-h_1} F(\omega) + \sum_{h_1=n-\delta_2(p-1)}^{n-1-\delta_1(p-1)} \sum_{\omega=0}^{n-1-\delta_1(p-1)-h_1} F(\omega) \\ &= \sum_{h_1=0}^{n-1-\delta_1(p-1)} \sum_{\omega=0}^{n-1-\delta_1(p-1)-h_1} F(\omega). \end{aligned} \tag{13}$$

Для $|H(n,p,R_1)|$ при $n \le \delta_2(p-1)$ и при $n \ge \delta_2(p-1)+1$ получили одинаковые выражения (11) и (13). Используя (10) и выполняя упрощения с помощью тождеств (6), (7), для произвольного n получим (8). □

2.1. Возрастающие последовательности высот

Обозначим: $Q(h_j,R_1)$ — число последовательностей из $H(n,p,R_1)$, младших $h \in H(n,p,R_1)$ по j-й координате; $\tilde{Q}(h_j,R_1)$ — число последовательностей из $H(n,p,R_1)$, старших $h \in H(n,p,R_1)$ по j-й координате. Понятно, что первые элементы h_1 в последовательностях h могут принимать значения от 0 до $n-1-\delta_1(p-1)$, а последующие элементы h_j принимать значения от $h_{j-1}+\delta_1$ до $h_{j-1}+\delta_2$. С помощью (8), используя при упрощении тождество (7), определяем число подпоследовательностей длины $p_0 = p-j+1$ из $H(n,p,R_1)$, первый элемент в которых равен $r \in \overline{0,n-1}$:

$$M(r,p_0,R_1) = |H(n-r,p_0,R_1)| - |H(n-r-1,p_0,R_1)| = \sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p_0-1}{\alpha} \times \left[\binom{n-r-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0} - \binom{n-r-1-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0}\right] = \sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p_0-1}{\alpha}\binom{n-r-1-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0-1}. \quad (14)$$

С помощью (14) и тождества (7) определим $Q(h_j,R_1)$ и $\tilde{Q}(h_j,R_1)$. Если $j=1$, то

$$Q(h_1,R_1) = \sum_{r=0}^{h_1-1} M(r,p,R_1) = \sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-1}{\alpha} \times \left[\binom{n-(\delta_1-1)(p-1)-\delta_0\alpha}{p} - \binom{n-h_1-(\delta_1-1)(p-1)-\delta_0\alpha}{p}\right].$$

Если $j \geq 2$, то

$$Q(h_j,R_1) = \sum_{r=h_{j-1}+\delta_1}^{h_j-1} M(r,p-j+1,R_1) = \sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-j}{\alpha} \times \left[\binom{n-h_{j-1}-\delta_1-(\delta_1-1)(p-j)-\delta_0\alpha}{p-j+1} - \binom{n-h_j-(\delta_1-1)(p-j)-\delta_0\alpha}{p-j+1}\right]. \quad (15)$$

Следовательно, положив $h_0 = -\delta_1$, по (15) будет определяться $Q(h_j,R_1)$ для произвольного $j=\overline{1,p}$. Если $j=1$, то

$$\tilde{Q}(h_1,R_1) = \sum_{r=h_1+1}^{n-1-\delta_1(p-1)} M(r,p,R_1) = \sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-1}{\alpha}\binom{n-1-h_1-(\delta_1-1)(p-1)-\delta_0\alpha}{p}.$$

Если $j \geq 2$, то

$$\tilde{Q}(h_j,R_1) = \sum_{r=h_j+1}^{h_{j-1}+\delta_2} M(r,p-j+1,R_1) = \sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-j}{\alpha} \times \left[\binom{n-1-h_j-(\delta_1-1)(p-j)-\delta_0\alpha}{p-j+1} - \binom{n-1-h_{j-1}-\delta_2-(\delta_1-1)(p-j)-\delta_0\alpha}{p-j+1}\right]. \quad (16)$$

Следовательно, положив $h_0 = n$, по (16) будет определяться $\tilde{Q}(h_j,R_1)$ для произвольного $j=\overline{1,p}$. В дальнейшем (15), (16) будут использоваться для определения числа лексикографически младших и старших по i-й координате возрастающих СП.

2.2. Убывающие последовательности высот

С помощью (8), используя при упрощении тождество (6), определим число последовательностей длины $p_0 = p-j+1$ из $H(n,p,R_2)$, первый элемент h_j которых равен $r \in \overline{0,n-1}$:

$$M(r,p_0,R_2)=|H(r+1,p_0,R_2)|-|H(r,p_0,R_2)|=\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p_0-1}{\alpha}\times$$
$$\left[\binom{r+1-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0}-\binom{r-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0}\right]$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p_0-1}{\alpha}\binom{r-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0-1}. \tag{17}$$

Обозначим: $Q(h_j,R_2)$ — число последовательностей из $H(n,p,R_2)$, младших $h\in H(n,p,R_2)$ по j-й координате; $\tilde{Q}(h_j,R_2)$ — число последовательностей из $H(n,p,R_2)$, старших $h\in H(n,p,R_2)$ по j-й координате. Понятно, что элементы h_1 в последовательностях h могут принимать значения от $\delta_1(p-1)$ до $n-1$, а последующие элементы h_j — от $h_{j-1}-\delta_2$ до $h_{j-1}-\delta_1$. С помощью (17) и тождества (6) определим $Q(h_j,R_2)$ и $\tilde{Q}(h_j,R_2)$. Если $j=1$, то

$$Q(h_1,R_2)=\sum_{r=\delta_1(p-1)}^{h_1-1}M(r,p,R_2)=\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-1}{\alpha}\binom{h_1-(\delta_1-1)(p-1)-\delta_0\alpha}{p}.$$

Если $j\geq 2$, то

$$Q(h_j,R_2)=\sum_{r=h_{j-1}-\delta_2}^{h_j-1}M(r,p-j+1,R_2)=\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-j}{\alpha}\times$$
$$\left[\binom{h_j-(\delta_1-1)(p-j)-\delta_0\alpha}{p-j+1}-\binom{h_{j-1}-\delta_2-(\delta_1-1)(p-j)-\delta_0\alpha}{p-j+1}\right]. \tag{18}$$

Положив $h_0=-n$, по (18) будет определяться $Q(h_j,R_2)$ для всякого $j=\overline{1,p}$. Если $j=1$, то

$$\tilde{Q}(h_1,R_2)=\sum_{r=h_1+1}^{n-1}M(r,p,R_2)=\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-1}{\alpha}\times$$
$$\left[\binom{n-(\delta_1-1)(p-1)-\delta_0\alpha}{p}-\binom{h_1+1-(\delta_1-1)(p-1)-\delta_0\alpha}{p}\right].$$

Если $j\geq 2$, то

$$\tilde{Q}(h_j,R_2)=\sum_{r=h_j+1}^{h_{j-1}-\delta_1}M(r,p-j+1,R_2)=\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-j}{\alpha}\times$$
$$\left[\binom{h_{j-1}+1-\delta_1-(\delta_1-1)(p-j)-\delta_0\alpha}{p-j+1}-\binom{h_j+1-(\delta_1-1)(p-j)-\delta_0\alpha}{p-j+1}\right]. \tag{19}$$

Положив здесь $h_0=n-1+\delta_1$, по (19) будет вычисляться $\tilde{Q}(h_j,R_2)$ для всякого $j=\overline{1,p}$. В дальнейшем (18), (19) будут использоваться при определении числа лексикографически младших и старших по i-й координате убывающих СП.

3. Прямая и обратная нумерация возрастающих СП

На основании (5) с помощью (8) получаем

$$|X(n,m,s,R_1)|=\sum_{p=\omega_1}^{\omega_2}f(m,p,s)\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^{\alpha}\binom{p-1}{\alpha}\binom{n-(\delta_1-1)(p-1)-\delta_0\alpha}{p}, \tag{20}$$
$$\omega_1=\lceil m/\varepsilon_2\rceil,\quad \omega_2=\lfloor m/\varepsilon_1\lfloor,\quad \delta_0=\delta_2-\delta_1+1.$$

Пример 1. При $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 5$ по (20) с помощью (4) вычисляется $X(10, 7, 2 \le s \le 4, R_1) = 2 \times 26 + 3 \times 48 = 196$.

3.1. Прямая нумерация

Обозначим через $V(x_i, s, R_1)$ число СП из $X(n, m, s, R_1)$ лексикографически младших $x \in X(n, m, s, R_1)$ по i-й координате.

Утверждение 2.

$$\begin{gathered}
V(x_i, s, R_1) = [1-\tau(x_i, x_{i-1})] \sum_{p=\omega_1}^{\omega_2} \Bigg\{ \sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1) \binom{p_0 - 1}{\alpha} \times \\
\left[\binom{n - x_{i-1} - \delta_1 - (\delta_1 - 1)(p_0 - 1) - \delta_0 \alpha}{p_0} - \binom{n - x_i - (\delta_1 - 1)(p_0 - 1) - \delta_0 \alpha}{p_0} \right] \times \\
f(m-i+1, p_0, s) + \mu(v_{i-1}, \varepsilon_1)\mu(\varepsilon_2 - 1, v_{i-1}) \Bigg[\mu(\varepsilon_2 - v_{i-1}, m-i+1) + \\
\sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^{\alpha} \binom{n - x_{i-1} - 1 - (\delta_1 - 1)p_0 - \delta_0 \alpha}{p_0} \sum_{z=1}^{\varepsilon_2 - v_{i-1}} f(m-i+1-z, p_0, s) \Bigg] \Bigg\}, \qquad (21) \\
\omega_1 = \lceil m/\varepsilon_2 \rceil, \quad \omega_2 = \lfloor m/\varepsilon_1 \rfloor, \quad x_0 = -\delta_1, \quad v_0 = t_0 = 0, \quad v_i = 1 + v_{i-1}\tau(x_i, x_{i-1}), \\
t_i = 1 + t_{i-1} - \tau(x_i, x_{i-1}), \quad p_0 = p - t_{i-1}, \quad \delta_0 = \delta_2 - \delta_1 + 1.
\end{gathered}$$

Доказательство. Для $x_i \in x$ определяем величины: t_i — порядковый номер серии, которой принадлежит x_i; v_i — порядковый номер элемента x_i серии, которой он принадлежит. Понятно, что t_i определяет номер элемента $h_j \in h$, а x_i определяет значение h_j. Если x содержит p серий, то БП элемента x_i должны содержать по $p_0 = p - t_{i-1} = p - j + 1$ серий. По теореме умножения число СП длины $\beta \le m$, начинающихся с элемента $r \in \overline{0, n-1}$ и содержащих по p_0 серий, равно произведению $M(r, p_0, R_1) f(\beta, p_0, s)$. Следовательно, число БП элемента x_i следует определять как сумму таких произведений при всех допустимых значениях r.

Заметим, что для x_i (является элементом возрастающей СП) не существует БП, если $x_i = x_{i-1}$. Следовательно, БП могут существовать только при условии

$$[1 - \tau(x_i, x_{i-1})] = 1. \qquad (22)$$

Обозначим через $F(x_i, p_0)$ число БП элемента x_i, содержащих по p_0 серий. Определим $F(x_i, p_0)$ для всех допустимых $0 \le v_{i-1} \le \varepsilon_2$ с помощью (14) и (15).

Если $v_{i-1} = 0$ (возможно только при $i = 1$), то, положив $x_0 = -\delta_1$,

$$F(x_i, p_0) = \sum_{r=x_{i-1}+\delta_1}^{x_i - 1} M(r, p_0, R_1) f(m-i+1, p_0, s) = Q(x_i, R_1) f(m-i+1, p_0, s). \qquad (23)$$

Если $1 \le v_{i-1} \le \varepsilon_1 - 1$, то $F(x_i, p_0) = 0$, так как длины серий не могут быть меньше ε_1.

Если $v_{i-1} = \varepsilon_2$, то

$$F(x_i, p_0) = \sum_{r=x_{i-1}+\delta_1}^{x_i - 1} M(r, p_0, R_1) f(m-i+1, p_0, s) = Q(x_i, R_1) f(m-i+1, p_0, s). \qquad (24)$$

Если $\varepsilon_1 \le v_{i-1} < \varepsilon_2$ (иначе $\mu(v_{i-1}, \varepsilon_1)\mu(\varepsilon_2 - 1, v_{i-1}) = 1$), то

$$F(x_i,p_0)=\mu(\varepsilon_2-v_{i-1},m-i+1)+\sum_{r=x_{i-1}+\delta_1}^{x_i-1}M(r,p_0,R_1)f(m-i+1,p_0,s)+$$
$$\sum_{r=x_{i-1}+\delta_1}^{x_{i-1}+\delta_2}M(r,p_0,R_1)\sum_{z=1}^{\varepsilon_2-v_{i-1}}f(m-i+1-z,p_0,s).$$

Здесь при условии $\mu(\varepsilon_2-v_{i-1},m-i+1)=1$ добавляется одна подпоследовательность длины $m-i+1$, являющаяся продолжением серии элемента x_{i-1}. Очевидно, что сумма по r от $x_{i-1}+\delta_1$ до $x_{i-1}+\delta_2$ величин $M(r,p_0,R_1)$ равна $M(x_{i-1},p_0+1,R_1)$. Следовательно,

$$F(x_i,p_0)=\mu(\varepsilon_2-v_{i-1},m-i+1)+Q(x_i,R_1)+M(x_{i-1},p_0+1,R_1)\times$$
$$\sum_{z=1}^{\varepsilon_2-v_{i-1}}f(m-i+1-z,p_0,z). \tag{25}$$

Объединяя (23), (24), (25), для произвольного v_{i-1} получим

$$F(x_i,p_0)=Q(x_i,R_1)f(m-i+1,p_0,s)+\mu(v_{i-1},\varepsilon_1)\mu(\varepsilon_2-1,v_{i-1})\times$$
$$\left[\mu(\varepsilon_2-v_{i-1},m-i+1)+M(x_{i-1},p_0+1,R_1)\sum_{z=1}^{\varepsilon_2-v_{i-1}}f(m-i+1-z,p_0,s)\right].$$

Подставляя в это выражение значения $Q(x_i,R_1)$ и $M(x_{i-1},p_0+1,R_1)$, суммируя его по всем допустимым p, учитывая (22), получим (21). $\square$

Пример 2. При $\delta_1=2$, $\delta_2=5$ для СП $x=(2,2,2,5,5,9.9)\in X(10,7,2\le s\le 4,R_1)$ по (1) с помощью (4), (21) вычисляется номер-код $N(x)=100+0+0+9+0+3+0=112$.

3.2. Обратная нумерация

Обозначим через $\tilde V(x_i,s,R_1)$ число СП из $X(n,m,s,R_1)$, лексикографически старших $x\in X(n,m,s,R_1)$ по i-й координате. Следующее утверждение приведем без доказательства, которое проводится по схеме доказательства утверждения 2 с использованием формульных выражений $\tilde Q(x_i,R_1)$ и $M(x_{i-1},p_0+1,R_1)$.

Утверждение 3.

$$\tilde V(x_i,s,R_1)=[\tau(i,1)+\mu(v_{i-1},\varepsilon_1)]\sum_{p=\omega_1}^{\omega_2}f(m-i+1,p_0,s)\times$$
$$\left\{[\tau(i,1)+\mu(x_i,x_{i-1}+\delta_1)]\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^\alpha\binom{p_0-1}{\alpha}\times\right.$$
$$\left[\binom{n-1-x_i-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0}-\binom{n-1-x_{i-1}-\delta_2-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0}\right]+ \tag{26}$$
$$\left.\tau(x_i,x_{i-1})\sum_{\alpha=0}^{\nu}(-1)^\alpha\binom{p_0}{\alpha}\binom{n-1-x_{i-1}-(\delta_1-1)p_0-\delta_0\alpha}{p_0}\right\},$$
$$\omega_1=\lceil m/\varepsilon_2\rceil,\quad \omega_2=\lfloor m/\varepsilon_1\rfloor,\quad \delta_0=\delta_2-\delta_1+1,\quad x_0=n,\quad v_0=t_0=0,$$
$$v_i=1+v_{i-1}\tau(x_i,x_{i-1}),\quad t_i=1+t_{i-1}-\tau(x_i,x_{i-1}),\quad p_0=p-t_{i-1}.$$

Пример 3. При $\delta_1=2$, $\delta_2=5$ для СП $x=(2,2,2,5,5,9,9)\in X(10,7,2\le s\le 4,R_1)$ по (2) с помощью (4), (26) вычисляется номер $\tilde N(x)=58+0+20+5+0+0+0=83$.

4. Прямая и обратная нумерации убывающих СП

Понятно, что $|H(n,p,R_2)| = |H(n,p,R_1)|$ и $|X(n,m,s,R_2)| = |X(n,m,s,R_1)|$. В последующих примерах ограничение на длины серий будем задавать в виде $s \geq \varepsilon$. С помощью (4) определяем

$$f(m,p,s \geq \varepsilon) = \binom{m-1-p(\varepsilon-1)}{p-1}. \tag{27}$$

Пример 4. При $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 5$ по (20) с помощью (27) вычисляем $|X(10,7,s \geq 3,R_2)| = 1 \times 10 + 2 \times 26 = 62$.

4.1. Прямая нумерация

Обозначим через $V(x_i,s,R_2)$ число СП из $X(n,m,s,R_2)$, лексикографически младших $x \in X(n,m,s,R_2)$ по i-й координате. Утверждение приводим без доказательства, основанного на использовании $Q(x_i,R_2)$ и $M(x_{i-1},p_0+1,R_2)$.

Утверждение 4.

$$V(x_i,s,R_2) = [\tau(i,1)+\mu(v_{i-1},\varepsilon_1)] \sum_{p=\omega_1}^{\omega_2} \Biggl\{ [\tau(i,1)+\mu(x_{i-1},x_i+\delta_1)] \sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^\alpha \binom{p_0-1}{\alpha} \times$$
$$\left[\binom{x_i-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0} - \binom{x_{i-1}-\delta_2-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0} \right] +$$
$$\tau(x_i,x_{i-1}) \sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^\alpha \binom{p_0}{\alpha} \binom{x_{i-1}-(\delta_1-1)p_0-\delta_0\alpha}{p_0} \Biggr\} f(m-i+1,p_0,s), \tag{28}$$
$$\omega_1 = \lceil m/\varepsilon_2 \rceil, \quad \omega_2 = \lfloor m/\varepsilon_1 \rfloor, \quad \delta_0 = \delta_2-\delta_1+1, quad\ x_0 = -n, \quad v_0 = t_0 = 0,$$
$$v_i = 1+v_{i-1}\tau(x_i,x_{i-1}), \quad t_i = 1+t_{i-1}-\tau(x_i,x_{i-1}), \quad p_0 = p-t_{i-1}.$$

Пример 5. При $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 5$ для СП $x = (5,5,5,5,2,2,2) \in X(10,7,s \geq 3,R_2)$ по (1) с помощью (27), (28) вычисляется код-номер $N(x) = 17+0+0+4+2+0+0 = 23$.

4.2. Обратная нумерация

Обозначим через $\tilde{V}(x_i,s,R_2)$ число СП из $X(n,m,s,R_2)$, лексикографически старших $x \in X(n,m,s,R_2)$ по i-й координате. Следующее утверждение приведем без доказательства, которое основывается на использовании формульных выражений $\tilde{Q}(x_i,R_2)$ и $M(x_i,p_0+1,R_2)$.

Утверждение 5.

$$\tilde{V}(x_i,s,R_2) = [1-\tau(x_i,x_{i-1})] \sum_{p=\omega_1}^{\omega_2} \Biggl\{ \mu(x_{i-1},x_i+\delta_1) \sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^\alpha \binom{p_0-1}{\alpha} \times$$
$$\left[\binom{x_{i-1}+1-\delta_1-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0} - \binom{x_i+1-(\delta_1-1)(p_0-1)-\delta_0\alpha}{p_0} \right] \times$$
$$f(m-i+1,p_0,s)+\mu(v_{i-1},\varepsilon_1)\mu(\varepsilon_2-1,v_{i-1}) \Biggl[\mu(\varepsilon_2-v_{i-1},m-i+1)+ \tag{29}$$
$$\sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^\alpha \binom{p_0}{\alpha} \binom{x_{i-1}-(\delta_1-1)p_0-\delta_0\alpha}{p_0} \sum_{z=1}^{\varepsilon_2-v_{i-1}} f(m-i+1-z,p_0,s) \Biggr] \Biggr\},$$
$$\omega_1 = \lceil m/\varepsilon_2 \rceil, \quad \omega_2 = \lfloor m/\varepsilon_1 \rfloor, \quad \delta_0 = \delta_2-\delta_1+1, \quad x_0 = n-1+\delta_1, \quad v_0 = t_0 = 0,$$
$$v_i = 1+v_{i-1}\tau(x_i,x_{i-1}), \quad t_i = 1+t_{i-1}-\tau(x_i,x_{i-1}), \quad p_0 = p-t_{i-1}.$$

Пример 6. При $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 5$ для СП $x = (5,5,5,5,2,2,2) \in X(10,7,s \geq 3,R_2)$ по (2) с помощью (27), (29) вычисляется номер $\tilde{N}(x) = 36+0+0+0+2+0+0 = 38$.

5. Заключение

Если условием задачи не оговорен способ нумерации (прямой или обратный), то следует использовать способ меньшей вычислительной сложности. Например, для рассмотренных здесь возрастающих СП менее сложна обратная нумерация (26), а для убывающих — прямая нумерация (28). В прикладном аспекте более важными представляются алгоритмы нумерации однопереходных СП. Под однопереходной СП понимается СП, составленная из двух подпоследовательностей: начинается с возрастающей и оканчивается убывающей (или наоборот). В последующей статье предполагается опубликовать решения перечислительных задач для однопереходных СП с рассмотренными здесь ограничениями на высоты серий.

Литература

1. **Амелькин В.А.** Перечислительные задачи серийных последовательностей. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2008.
2. **Амелькин В.А.** Нумерация неубывающих и невозрастающих серийных последовательностей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. – Т. 12, № 4. — С. 389–401.
3. **Cover T.M.** Enumerative source encoding // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1973. — Vol. 19, № 1. — P. 73–77.
4. **Амелькин В.А.** Методы нумерационного кодирования. — Новосибирск: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 6 сентября 2011 г.