

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ (ФЕРРОМАГНИТНЫХ) ГЕТЕРОСТРУКТУР

М. О. Леви, Г. Ю. Леви, В. А. Лыжов

Южный научный центр РАН, 344006 Ростов-на-Дону, Россия
E-mails: mlevi@mindonline.ru, galias@yandex.ru, moderx@mail.ru

Рассматривается динамическая связанная задача о гармонических колебаниях электромагнитоупругой слоисто-неоднородной среды под действием осциллирующей механической или электрической нагрузки при задании на поверхности и внутренних границах этой среды различных условий электрического и магнитного полей. Построена функция Грина среды. Получены дисперсионные кривые и фазовые скорости для различных граничных условий и материалов.

Ключевые слова: электромагнитоупругость, сегнетоэлектрики, ферромагнетики, функция Грина, слоистые структуры, фазовые скорости.

DOI: 10.15372/PMTF20170105

Введение. В средах, состоящих из электроупругих и магнитоупругих слоев, наблюдается магнитоэлектрический эффект, отсутствующий в составляющих этой среды. В пьезоэлектрических и пьезомагнитных композитах магнитоэлектрический эффект впервые исследован в работе [1]. Большое количество работ посвящено исследованию деформации, свободных колебаний и колебаний в среде с начальными напряжениями в электромагнитоупругих материалах. В [2, 3] изучалось распространение волн в пьезоэлектрических стержнях, в [4] — в неоднородных пьезоэлектрических материалах. Распространение волн в пьезоэлектрических средах с начальными напряжениями рассматривалось в [5, 6]. Авторы работы [7] исследовали распространение электромагнитных волн в пьезоэлектрических и пьезомагнитных многослойных средах с отрицательными магнитными и электрическими проницаемостями. В [8, 9] изучались рассеивающие свойства дугообразных трещин между пьезоэлектрическими и пьезомагнитными материалами.

В настоящей работе исследуется влияние включений различного типа на динамические свойства поверхностных волн Рэлея в полуограниченной электромагнитоупругой слоисто-неоднородной среде. Рассматривается трансформация механической энергии в структуре, состоящей из материалов различной природы, а также влияние граничных условий магнитного поля на внутренний магнитоупругий слой среды. Полученные результаты могут быть использованы при создании сенсоров и акустоэлектронных устройств.

1. Краевая задача о колебаниях электромагнитоупругой среды. Рассматривается электромагнитоупругая среда $|x_1| \leq \infty$, $x_3 \leq h_2$, представляющая собой два

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-01676).

слоя ($n = 1, 2$) $h_1 < x_3 \leq h_2$, $0 < x_3 \leq h_1$, лежащих на поверхности полупространства ($n = 3$) $x_3 \leq 0$. Слои и полупространство выполнены из материала ромбической сингонии класса 2mm. Колебания в полупространстве инициируются осциллирующей нагрузкой $\mathbf{q}(x_1, t) = \mathbf{q}_0(x_1) e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{q}_0 = \{q_3, q_4, q_5\}$; q_3 — компонента вектора напряжений; q_4, q_5 — электрическая и магнитная нагрузки), распределенной в области $|x_1| \leq a$. Вне этой области поверхность свободна от механических напряжений.

Краевая задача о колебаниях n -го слоя электромагнитоупругой среды описывается уравнениями движения и квазистатическими уравнениями Максвелла [10]

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}; \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0; \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0. \quad (1.3)$$

Определяющие уравнения для электромагнитоупругой среды можно записать в матричной форме [11]

$$\begin{bmatrix} T^{(n)} \\ \mathbf{D}^{(n)} \\ \mathbf{B}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(n)} & -e^{(n)} & -f^{(n)} \\ (\mathbf{e}^T)^{(n)} & \varepsilon^{(n)} & g^{(n)} \\ (\mathbf{f}^T)^{(n)} & g^{(n)} & \mu^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S^{(n)} \\ \mathbf{E}^{(n)} \\ \mathbf{H}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

где $T^{(n)}, S^{(n)}$ — компоненты тензоров напряжения и деформации второго порядка; $\mathbf{D}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}$ — векторы электрической и магнитной индукции; $\mathbf{E}^{(n)}, \mathbf{H}^{(n)}$ — векторы напряжений электрического и магнитного полей; $c^{(n)}, e^{(n)}, f^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, g^{(n)}$ — тензоры упругих, пьезоэлектрических, пьезомагнитных, диэлектрических и магнитоэлектрических коэффициентов соответственно; $\mu^{(n)}$ — тензор магнитной проницаемости. Используя формулы $\omega' = \omega h^{(n)} / V_{sef}^{(n)}$, $e_{ij}^{(n)'} = e_{ij}^{(n)} k_e / c_{44}^{(0)}$, $f_{ij}^{(n)'} = f_{ij}^{(n)} k_f / c_{44}^{(0)}$, $\varepsilon_{ij}^{(n)'} = \varepsilon_{ij}^{(n)} k_e^2 / c_{44}^{(0)}$, $\mu_{ij}^{(n)'} = \mu_{ij}^{(n)} k_f^2 / c_{44}^{(0)}$, $g_{ij}^{(n)'} = g_{ij}^{(n)} k_g^2 / c_{44}^{(0)}$, перейдем к безразмерным параметрам. Здесь $V_{sef}^{(n)}$ — скорость сдвиговой волны в n -м слое электромагнитоупругой среды; k_e, k_f, k_g — специальные обезразмеривающие константы. Линейные параметры отнесены к толщине двух верхних слоев, плотности — к плотности полупространства. В предположении, что колебания являются установившимися и совершаются по гармоническому закону, все функции записываются в виде $F = F_0 e^{-i\omega' t'}$ (далее экспоненты и штрихи опущены). Граничные условия и условия сопряжения задаются в виде

$$\begin{aligned} x_3 = h: & \quad T_{31}^{(1)} = \begin{cases} q_1(x_1), & |x_1| \leq a, \\ 0, & |x_1| > a, \end{cases} \quad T_{33}^{(1)} = \begin{cases} q_3(x_1), & |x_1| \leq a, \\ 0, & |x_1| > a, \end{cases} \\ & \quad D_3^{(1)} = \begin{cases} q_4(x_1), & |x_1| \leq a, \\ 0, & |x_1| > a, \end{cases} \quad B_3^{(1)} = \begin{cases} q_5(x_1), & |x_1| \leq a, \\ 0, & |x_1| > a, \end{cases} \\ x_3 = h_1: & \quad T_{31}^{(2)} = T_{31}^{(1)}, \quad T_{33}^{(2)} = T_{33}^{(1)}, \quad D_3^{(2)} = D_3^{(1)}, \quad B_3^{(2)} = B_3^{(1)}, \\ & \quad u_1^{(2)} = u_1^{(1)}, \quad u_3^{(2)} = u_3^{(1)}, \quad u_4^{(2)} = u_4^{(1)}, \quad u_5^{(2)} = u_5^{(1)}, \\ x_3 = 0: & \quad T_{31}^{(2)} = T_{31}^{(3)}, \quad T_{33}^{(2)} = T_{33}^{(3)}, \quad D_3^{(2)} = D_3^{(3)}, \quad B_3^{(2)} = B_3^{(3)}, \\ & \quad u_1^{(2)} = u_1^{(3)}, \quad u_3^{(2)} = u_3^{(3)}, \quad u_4^{(2)} = u_4^{(3)}, \quad u_5^{(2)} = u_5^{(3)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решение краевой задачи (1.1)–(1.5) имеет вид

$$\mathbf{u}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k(x_1 - \xi, x_3, \omega) \mathbf{q}(\xi) d\xi, \quad (1.6)$$

$$k(s, x_3, \omega) = \int_{\Gamma} K(\alpha_1, x_3, \omega) e^{-i\alpha_1 s} d\alpha_1.$$

Элементы матрицы-функции $K(\alpha_1, x_3, \omega) = \|K_{mn}\|_{m,n=1,3,4,5}$ определяются формулами

$$K_{1j}^{(n)} = -i\alpha_1 \Delta_0^{-1} \sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(n)} (\Delta_{j,k+8(n-1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3 + \Delta_{j,k+8(n-1)+4} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3); \quad (1.7)$$

$$K_{mj}^{(n)} = \Delta_0^{-1} \sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(n)} (\Delta_{j,k+8(n-1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3 + \Delta_{j,k+8(n-1)+4} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3), \quad (1.8)$$

$$m = 3, 4, 5, \quad n = 1, 2;$$

$$K_{1j}^{(3)} = -i\alpha_1 \Delta_0^{-1} \sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(0)} \Delta_{j,k+16} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3); \quad (1.9)$$

$$K_{mj}^{(3)} = \Delta_0^{-1} \sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(3)} \Delta_{j,k+16} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3), \quad m = 3, 4, 5, \quad (1.10)$$

где Δ_0, Δ_{jk} — определитель дисперсионной матрицы и алгебраическое дополнение ее элемента с номером jk соответственно. Неизвестные $y_{pk}^{(n)}$ в (1.7)–(1.10) удовлетворяют системе уравнений [12]

$$\begin{aligned} & (-\alpha_1^2 c_{11}^{(n)} + c_{55}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2) y_{1k}^{(n)} + (c_{13}^{(n)} + c_{55}^{(n)}) \sigma_k^{(n)} y_{3k}^{(n)} + \\ & \quad + (e_{31}^{(n)} + e_{15}^{(n)}) \sigma_k^{(n)} y_{4k}^{(n)} + (f_{31}^{(n)} + f_{15}^{(n)}) \sigma_k^{(n)} y_{5k}^{(n)} = 0, \\ & (c_{13}^{(n)} + c_{55}^{(n)}) (-\alpha_1^2 \sigma_k^{(n)}) y_{1k}^{(n)} + (-\alpha_1^2 c_{55}^{(n)} + c_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2) y_{3k}^{(n)} + \\ & \quad + (e_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} - \alpha_1^2 e_{15}^{(n)}) y_{4k}^{(n)} + (f_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} - \alpha_1^2 f_{15}^{(n)}) y_{5k}^{(n)} = 0, \\ & (e_{31}^{(n)} + e_{15}^{(n)}) (-\alpha_1^2 \sigma_k^{(n)}) y_{1k}^{(n)} + (e_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} - \alpha_1^2 e_{15}^{(n)}) y_{3k}^{(n)} + \\ & \quad + (\alpha_1^2 \varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}) y_{4k}^{(n)} + (\alpha_1^2 g_{11}^{(n)} - g_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}) y_{5k}^{(n)} = 0, \\ & (f_{31}^{(n)} + f_{15}^{(n)}) (-\alpha_1^2 \sigma_k^{(n)}) y_{1k}^{(n)} + (f_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} - \alpha_1^2 f_{15}^{(n)}) y_{3k}^{(n)} + \\ & \quad + (\alpha_1^2 g_{11}^{(n)} - g_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}) y_{4k}^{(n)} + (\alpha_1^2 \mu_{11}^{(n)} - \mu_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}) y_{5k}^{(n)} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для того чтобы система однородных линейных уравнений (1.11) имела ненулевое решение, определитель матрицы ее коэффициентов должен быть равен нулю. Тогда величины σ_k в (1.7)–(1.10) определяются из решения характеристического уравнения

$$\det \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$P_1 = \left\| \begin{array}{cc} -\alpha_1^2 c_{11}^{(n)} + c_{55}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2 & (c_{13}^{(n)} + c_{55}^{(n)}) (\sigma_k^{(n)}) \\ (c_{13}^{(n)} + c_{55}^{(n)}) (-\alpha_1^2 \sigma_k^{(n)}) & -\alpha_1^2 c_{55} + c_{33} \sigma_k^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2 \end{array} \right\|,$$

$$P_2 = \left\| \begin{array}{cc} (e_{31}^{(n)} + e_{15}^{(n)}) (\sigma_k^{(n)}) & (f_{31}^{(n)} + f_{15}^{(n)}) (\sigma_k^{(n)}) \\ -\alpha_1^2 e_{15}^{(n)} + e_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} & -\alpha_1^2 f_{15}^{(n)} + f_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} \end{array} \right\|,$$

$$P_3 = \left\| \begin{array}{cc} (e_{31}^{(n)} + e_{15}^{(n)}) (-\alpha_1^2 \sigma_k^{(n)}) & -\alpha_1^2 e_{15}^{(n)} + e_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} \\ (f_{31}^{(n)} + f_{15}^{(n)}) (-\alpha_1^2 \sigma_k^{(n)}) & -\alpha_1^2 f_{15}^{(n)} + f_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} \end{array} \right\|,$$

$$P_4 = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_1^2 \varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} & \alpha_1^2 g_{11}^{(n)} - g_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} \\ \alpha_1^2 g_{11}^{(n)} - g_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} & \alpha_1^2 \mu_{11}^{(n)} - \mu_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} \end{array} \right\|.$$

2. Граничные условия. Для построения дисперсионной матрицы A выбираются следующие граничные условия:

— поверхность $x_3 = h_2$ свободна от механических напряжений:

$$T_{31}^{(1)} = c_{55}^{(1)} (U_{3,1}^{(1)} + U_{1,3}^{(1)}) + e_{15}^{(1)} U_{4,1}^{(1)} + f_{15}^{(1)} U_{5,1}^{(1)} = 0; \quad (2.1)$$

$$T_{33}^{(1)} = c_{13}^{(1)} U_{1,1}^{(1)} + c_{33}^{(1)} U_{3,3}^{(1)} + e_{33}^{(1)} U_{4,3}^{(1)} + f_{33}^{(1)} U_{5,3}^{(1)} = 0, \quad (2.2)$$

— электрическая и магнитная индукции равны нулю, что соответствует отсутствию зарядов на поверхности:

$$D_3^{(1)} = e_{31}^{(1)} U_{1,1}^{(1)} + e_{33}^{(1)} U_{3,3}^{(1)} - \varepsilon_{33}^{(1)} U_{4,1}^{(1)} - g_{33}^{(1)} U_{5,3}^{(1)} = 0; \quad (2.3)$$

$$B_3^{(1)} = f_{31}^{(1)} U_{1,1}^{(1)} + f_{33}^{(1)} U_{3,3}^{(1)} - g_{33}^{(1)} U_{4,1}^{(1)} - \mu_{33}^{(1)} U_{5,3}^{(1)} = 0. \quad (2.4)$$

На границе раздела $x_3 = h_1$ ставятся условия полного механического сцепления и непрерывности электрического поля

$$T_{31}^{(2)} = T_{31}^{(1)}, \quad T_{33}^{(2)} = T_{33}^{(1)}, \quad U_3^{(2)} = U_3^{(1)}, \quad U_1^{(2)} = U_1^{(1)}, \quad D_3^{(2)} = D_3^{(1)}, \quad U_4^{(2)} = U_4^{(1)}. \quad (2.5)$$

Рассматриваются два способа задания условий магнитного поля:

1) граница открыта для прохождения магнитного поля (МО):

$$B_3^{(2)} = B_3^{(1)}, \quad U_5^{(2)} = U_5^{(1)}; \quad (2.6)$$

2) граница двух сред закрыта для прохождения магнитного поля (МЗ):

$$U_5^{(2)} = 0, \quad U_5^{(1)} = 0. \quad (2.7)$$

На границе слоев и полупространства $x_3 = 0$ задаются условия полного механического сцепления и непрерывности электрического поля

$$T_{31}^{(2)} = T_{31}^{(3)}, \quad T_{33}^{(2)} = T_{33}^{(3)}, \quad U_3^{(2)} = U_3^{(3)}, \quad U_1^{(2)} = U_1^{(3)}, \quad D_3^{(2)} = D_3^{(3)}, \quad U_4^{(2)} = U_4^{(3)}, \quad (2.8)$$

которые дополняются двумя вариантами магнитных условий:

1) МО:

$$B_3^{(2)} = B_3^{(3)}, \quad U_5^{(2)} = U_5^{(3)}; \quad (2.9)$$

2) МЗ:

$$U_5^{(2)} = 0, \quad U_5^{(3)} = 0. \quad (2.10)$$

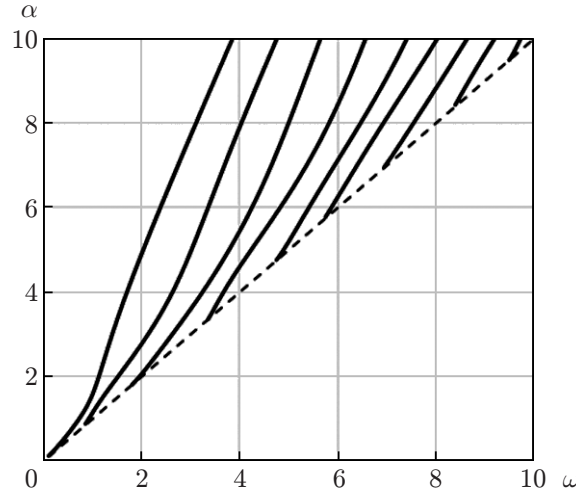


Рис. 1. Дисперсионные кривые для среды BaTiO₃-CoFe₂O₄-MgO

Решение уравнений (1.1)–(1.3) ищется в виде [13]

$$\begin{aligned}
 x_3 > 0: \\
 U_1^{(p)}(\alpha_1, x_3) &= -i\alpha_1 \sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(p)} [\eta_{k+8(p-1)}^{(p)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(p)} x_3 + \eta_{k+4+8(p-1)}^{(p)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(p)} x_3], \\
 U_m^{(p)}(\alpha_1, x_3) &= \sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(p)} [\eta_{k+8(p-1)}^{(p)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(p)} x_3 + \eta_{k+4+8(p-1)}^{(p)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(p)} x_3];
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 \leq 0: \\
 U_1^{(3)}(\alpha_1, x_3) &= -i\alpha_1 \sum_{k=1}^4 \eta_{k+16}^{(3)} y_{1k}^{(3)} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3), \\
 U_m^{(3)}(\alpha_1, x_3) &= \sum_{k=1}^4 \eta_{k+16}^{(3)} y_{mk}^{(3)} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

($p = 1, 2; m = 3, 4, 5$). Коэффициенты $\eta_k^{(n)}$ в (2.11), (2.12) находятся из решения матричного уравнения [14]

$$A\eta = Q,$$

где $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{20}\}$ — искомые коэффициенты; $Q = \{Q_3, Q_4, Q_5, 0, \dots, 0\}$ — вектор нагрузки; A — дисперсионная матрица, которая имеет размерность 20×20 и находится путем подстановки решений (2.11), (2.12) в граничные условия (2.1)–(2.10).

3. Результаты численных расчетов. На рис. 1 приведены дисперсионные кривые для трехслойной среды BaTiO₃-CoFe₂O₄-MgO [15]. Зная значения волновых чисел, фазовую скорость можно представить в безразмерном виде

$$V_f/V_s = \omega/\alpha,$$

где $V_s = \sqrt{c_{55}^{(3)}/\rho^{(3)}} = 1$ — скорость сдвиговой волны в упругом полупространстве.

На рис. 2 приведены зависимости фазовой скорости от волнового числа ω для среды BaTiO₃-CoFe₂O₄-MgO с граничными условиями типа МО–МО. На рис. 3 представлены зависимости $\Delta V_f/V_s(\omega)$ для первых трех мод при различных магнитных условиях на границах раздела слоев для среды BaTiO₃-CoFe₂O₄-MgO. На рис. 3,а (первая мода) видно, что при задании на нижней границе слоя CoFe₂O₄ условия типа МЗ амплитуда имеет максимальное значение при низких частотах, при задании граничного условия типа МС–МО

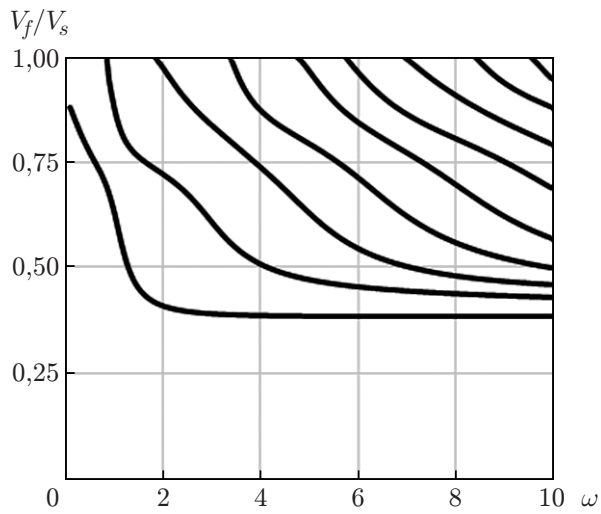


Рис. 2. Зависимости фазовой скорости от волнового числа ω для среды $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4\text{-MgO}$

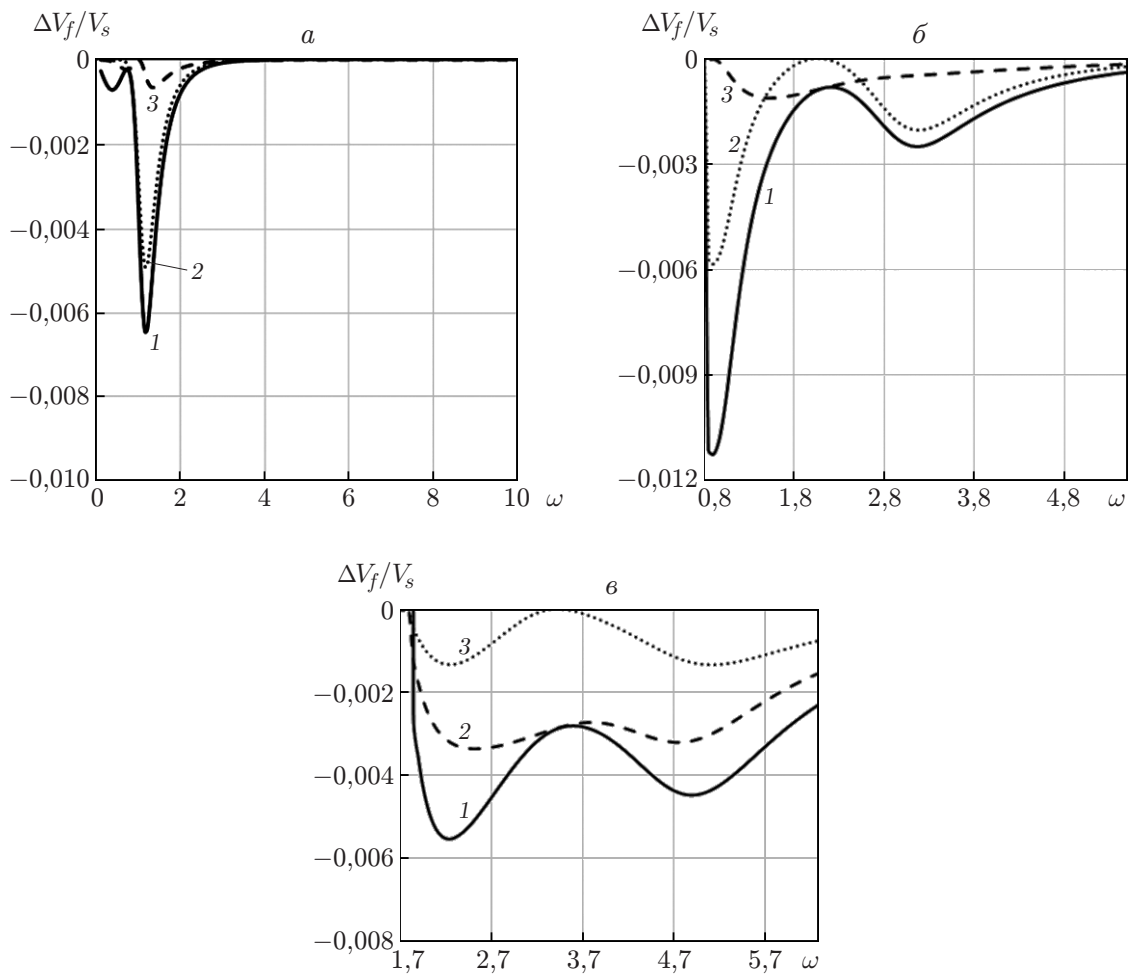


Рис. 3. Зависимости $\Delta V_f/V_s(\omega)$ для первых трех мод при различных условиях на границах второго слоя:
a — первая мода, *б* — вторая мода, *в* — третья мода; 1 — условия типа МЗ–МЗ, 2 — условия типа МО–МЗ, 3 — условия типа МЗ–МО

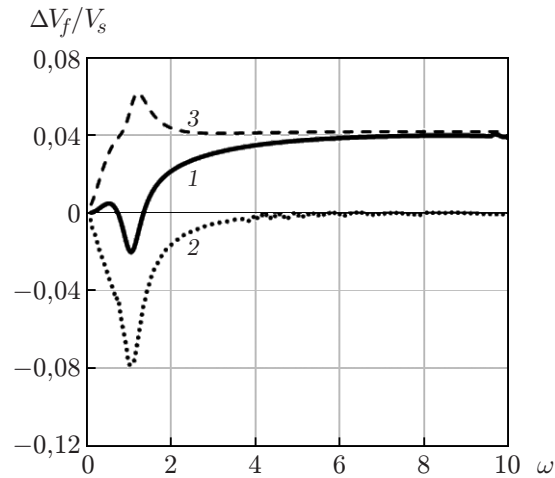


Рис. 4. Зависимости $\Delta V_f/V_s(\omega)$ для первых мод для сред с различным расположением материалов:

1 — $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-BaTiO}_3\text{-MgO}$, 2 — $\text{BaTiO}_3\text{-BaTiO}_3\text{-MgO}$, 3 — $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-CoFe}_2\text{O}_4\text{-MgO}$

на более высоких частотах различие амплитуд незначительно. На рис. 3,б (вторая мода) при задании условий типа МО–МЗ и МЗ–МО кривые $\Delta V_f/V_s(\omega)$ пересекаются.

На рис. 4 представлены зависимости $\Delta V_f/V_s(\omega)$ для первых мод различных конфигураций среды: $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-BaTiO}_3\text{-MgO}$, $\text{BaTiO}_3\text{-BaTiO}_3\text{-MgO}$ и $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-CoFe}_2\text{O}_4\text{-MgO}$. На рис. 4 видно, что на низких частотах влияние среды максимально. При $0 \leq \omega \leq 1,6$ различие скоростей достаточно большое. При $\omega > 2$ различие фазовых скоростей уменьшается. Меньшая фазовая скорость среды $\text{BaTiO}_3\text{-BaTiO}_3\text{-MgO}$ обусловлена наличием более мягких по сравнению с CoFe_2O_4 слоев материала BaTiO_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Van Suchtelen J.** Product properties: a new application of composite materials // Philips Res. Rep. 1972. V. 27. P. 28–37.
2. **Калинчук В. В., Белянкова Т. И.** К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоисто-неоднородного полупространства // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 72–74.
3. **Белянкова Т. И., Зайцева И. А., Калинчук В. В., Пузанов Ю. Е.** Динамика пьезоактивной структурно-неоднородной среды // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 33–35.
4. **Chai J. F.** Propagation of surface waves in a prestressed piezoelectric material // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 100. P. 2112–2122.
5. **Калинчук В. В., Белянкова Т. И., Евдокимова О. В.** Определяющие соотношения динамики преднапряженной пьезоактивной среды в отсутствие внешних электрических полей // Вестн. Юж. науч. центра РАН. 2006. Т. 2, № 1. С. 16–23.
6. **Евдокимова О. В., Белянкова Т. И., Калинчук В. В.** Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля // Вестн. Юж. науч. центра РАН. 2007. Т. 3, № 4. С. 19–25.
7. **Liu H., Zhu S. N., Zhu Y. Y., et al.** Piezoelectric-piezomagnetic multilayer with simultaneously negative permeability and permittivity // Appl. Phys. Lett. 2005. V. 86. 102904.

8. **Feng W. J., Hao R. J., Liu J. X., Duan S. M.** Scattering of SH waves by arc-shaped interface cracks between a cylindrical magneto-electro-elastic inclusion and matrix: near fields // Arch. Appl. Mech. 2005. V. 74. P. 649–663.
9. **Feng W. J., Su R. K. L., Liu Y. Q.** Scattering of SH waves by an arc-shaped interface crack between a cylindrical magneto-electro-elastic inclusion and matrix with the symmetry of 6 mm // Acta Mech. 2006. V. 183. P. 81–102.
10. **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
11. **Багдасярян Г. Е.** Электромагнитоупругие волны / Г. Е. Багдасярян, З. Н. Даноян. Ереван: Изд-во Ереван. гос. ун-та, 2006.
12. **Леви М. О., Анджинович И. Е., Ворович Е. И., Михайлова И. Б.** Влияние граничных условий на динамику электромагнитоупругой полугораниченной среды // Вестн. Юж. науч. центра. 2012. Т. 8, № 4. С. 14–21.
13. **Леви М. О.** Динамическая задача для электромагнитоупругого слоя // Вестн. Юж. науч. центра. 2011. Т. 7, № 4. С. 5–9.
14. **Калинчук В. В., Бежанкова Т. И., Леви М. О., Агаян К. Л.** Некоторые особенности динамики слабонеоднородного магнитоупругого полупространства // Вестн. Юж. науч. центра. 2013. Т. 9, № 4. С. 13–17.
15. **Giordano S., Goueygoua M., Tiercelina N., et al.** Magneto-electro-elastic effective properties of multilayered artificial multiferroics with arbitrary lamination direction // Intern. J. Engng Sci. 2014. V. 78. P. 134–153.

*Поступила в редакцию 8/VI 2015 г.,
в окончательном варианте — 9/XI 2015 г.*
