ПМТФ, № 2, 1962

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА ПЛАЗМЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ПРИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТОРМОЖЕНИИ ЕГО В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. М. Сарычев

(*Новосибирск*)

В последнее время в ряде работ исследовалось течение плазмы в так называемом магнитогидродинамическом генераторе. В работе [1] рассматривалось установившееся движение через однородное магнитное поле одномерного потока несжимаемой невязкой жидкости в канале произвольного сечения и сжимаемой невязкой жидкости в канале постоянного сечения при максимальной мощности, выделяемой во внешней цепи на единицу длины канала. В работе [2] рассматривалось установившееся движение одномерного потока сжимаемой невязкой жидкости в канале произвольного сечения через поперечное однородное магнитное поле при постоянных вдоль канала скорости потока жидкости и напряженности электрического поля.

Так как максимальная температура, которую выдерживают современные материалы, и минимальная температура, при которой возможно получение плазмы с проводимостью, достаточной для эффективного воздействия на нее магнитным полем, приблизительно равны, то представляет интерес рассмотреть течение плазмы в магнитогидродинамическом генераторе при постоянной вдоль канала температуре плазмы.

При изотермическом торможении плазмы для генерации электрической энергии может быть использована только кинетическая энергия плазмы, отношение которой к полной энергии потока плазмы (без энергии ионизации и диссоциации) в рассматриваемом случае

$$\eta = \frac{(\gamma - 1)\, M^2 / 2\gamma}{(\gamma - 1)\, M^2 / 2\gamma + 1} \qquad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v},\ M = \frac{u}{\sqrt{RT_0}}\right)$$

Здесь M — число Маха для изотермического течения. При $M = 1$ отношение $\eta = (\gamma - 1)/(3\gamma - 1)$ и для одноатомного газа составляет около 17%.

1. Система уравнений. Рассмотрим изотермическое движение одномерного потока сжимаемой невязкой жидкости с конечной проводимостью в плоском канале произвольного прямоугольного сечения через поперечное магнитное поле. Стенки канала, параллельные магнитному полю, являются электродами, допускающими возможность образования на них переменной по длине канала разности потенциалов (секционные электроды, разделенные изоляторами). Электроды замкнуты через внешнюю нагрузку таким образом, что сопротивление последней распределяется произвольно по длине канала, а ток в плазме течет перпендикулярно к скорости потока плазмы и магнитному полю. Рассматривается случай, когда магнитным полем, индуцированным токами, текущими в плазме, можно пренебречь по сравнению с внешним магнитным полем.

Пусть $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, -j, 0)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Движение плазмы в этом случае можно описать следующей системой уравнений:

$$\rho u b = \rho_0 u_0 b_0 \quad \text{(уравнение неразрывности)} \tag{1.1}$$

$$p = \rho R T_0 \quad \text{(уравнение состояния)} \tag{1.2}$$

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = -j\frac{H}{c} \quad \text{(уравнение движения в проекции на ось канала)} \tag{1.3}$$

$$\rho u^2 \frac{du}{dx} = -j^2 \frac{r_e}{b} \quad \text{(уравнение энергии)} \tag{1.4}$$

$$\frac{uH}{c} = j\left(\frac{r_e}{b} + \frac{1}{\sigma}\right) \quad \text{(уравнение электрической цепи)} \tag{1.5}$$

Здесь r_e — сопротивление внешней цепи, приходящееся на единицу площади стенок — электродов канала. Будем рассматривать два вида зависимости проводимости плазмы σ от ее плотности ρ

$$\text{(а) } \sigma = \text{const}, \qquad \text{(б) } \sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \tag{1.6}$$

Первая зависимость имеет место в случае, когда плазма образована из газа с высоким потенциалом ионизации, с небольшими добавками легко ионизуемого вещества, причем температура и состав плазмы таковы, что основной газ не ионизован, а добавки ионизованы практически полностью [3].

Вторая зависимость имеет место в случае однородной слабо ионизованной плазмы, если взаимодействием электронов с ионами можно пренебречь по сравнению с взаимодействием электронов с нейтральными частицами $(n_e S_{ei} \ll n_n S_{en})$.

В качестве масштаба длины принимается ширина канала b_0 в сечении $x = 0$; в качестве масштабов давления, плотности и скорости плазмы, плотности тока, напряженности магнитного поля, проводимости и сопротивления внешней цепи на единицу площади электродов приняты значения этих величин: p_0, ρ_0, u_0, j_0, H_0, σ_0, r_{e0} в сечении $x = 0$. Ниже всюду без особых обозначений употребляются безразмерные переменные.

2. Оптимальное торможение потока плазмы. Из (1.4) и (1.5) следует, что максимальное торможение плазмы и максимальное выделение энергии во внешней цепи на единичной длине канала осуществляется [1] при

$$r_e = \frac{b}{\sigma} \tag{2.1}$$

В отличие от обычных генераторов, где выделяемая на внутреннем сопротивлении энергия является паразитной, в магнитогидродинамическом генераторе эта энергия остается в плазме и может быть выделена во внешней цепи. (При изотермическом торможении выделяемая во внешней цепи энергия зависит только от величин начальной и конечной скоростей и не зависит от распределения и величины r_e.) Поэтому режим (2.1) очень выгоден для магнитогидродинамического генератора.

(А) Рассмотрим случай, когда $H = 1$ и $\sigma = 1$. При этом система уравнений (1.1) — (1.6) оказывается замкнутой. Решая ее, получим

$$j = \frac{M}{M_0}, \qquad p = \rho = \exp\left[\frac{M^2 - M_0^2}{2}\right] \qquad \left(A_0 = \frac{1}{2}\right)$$

$$b = r_e = \frac{M_0}{M} \exp \frac{M_0^2 - M^2}{2}, \qquad x = \frac{2M_0}{Q_0} \int\limits_M^{M_0} \exp \frac{M^2 - M_0^2}{2}\, dM \tag{2.2}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{Q_0 (M^2 + 1)}{2M^2} \quad \left(M = \frac{u}{\sqrt{RT_0}}\right), \qquad A_0 = \frac{cj_0}{\sigma_0 u_0 H_0}, \qquad Q_0 = \frac{j_0 H_0 b_0}{p_0 c}$$

Здесь M — число Маха для изотермического течения, A_0 и Q_0 — произвольные безразмерные параметры.

В случае, когда $\sigma = 1/\sqrt{\rho}$, решение будет иметь вид

$$p = \rho = \exp \frac{M^2 - M_0^2}{2}, \qquad b = \frac{M_0}{M} \exp \frac{M_0^2 - M^2}{2}$$

$$j = \frac{M}{M_0} \exp \frac{M_0^2 - M^2}{4}, \qquad r_e = \frac{M_0}{M} \exp \frac{M_0^2 - M^2}{4} \tag{2.3}$$

$$x = \frac{2M_0}{Q_0} \int\limits_M^{M_0} \exp\left[\frac{3}{4}(M^2 - M_0^2)\right] dM$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{Q_0 (M^2 + 1)}{2M^2} \exp\left[\frac{5}{2}(M_0^2 - M^2)\right]$$

(B) Рассмотрим задачу о максимальном изотермическом торможении потока плазмы при постоянной вдоль канала разности потенциалов на стенках-электродах канала

$$jr_e = 1 \tag{2.4}$$

Для $\sigma = 1$ решение имеет вид

$$j = \frac{M}{M_0} \exp \frac{M^2 - M_0^2}{2} \quad \left(A_0 = \frac{1}{2} \right); \quad x = \frac{2M_0}{Q_0} \int\limits_M^{M_0} \exp \frac{M_0^2 - M^2}{2}\, dM \tag{2.5}$$

$$p = \rho = H = \frac{M_0}{Mb} = \exp \frac{M^2 - M_0^2}{2}, \quad p = \rho = H \to \exp \frac{-M_0^2}{2} \quad \text{при } M \to 0$$

Угол расширения канала в этом случае определяется формулой

$$\frac{db}{dx} = \frac{Q_0}{2} \frac{M^2 + 1}{M^2} \qquad \left(\frac{db}{dx} \to \infty \text{ при } M \to 0 \right) \tag{2.6}$$

Для $\sigma = 1 / \sqrt{\rho}$ решение имеет вид

$$j = \frac{M}{M_0} \exp \frac{M^2 - M_0^2}{4} \qquad \left(A_0 = \frac{1}{2} \right) \tag{2.7}$$

$$p = \rho = H = \frac{M_0}{Mb} = \exp \frac{M^2 - M_0^2}{2}, \quad x = \frac{2M_0}{Q_0} \int\limits_M^{M_0} \exp \frac{M_0^2 - M^2}{4}\, dM$$

Угол расширения канала в этом случае определяется формулой

$$\frac{db}{dx} = \frac{Q_0}{2} \frac{M^2 + 1}{M^2} \exp \frac{M_0^2 - M^2}{4} \qquad \left(\frac{db}{dx} \to \infty \text{ при } M \to 0 \right) \tag{2.8}$$

3. Торможение плазмы в канале с постоянным углом расширения. (A) Пусть $H = 1$ и $\sigma = 1$. Тогда из (1.5)

$$r_e = \frac{b_0}{\sigma_0 r_{e0}} \left(\frac{M}{M_0 A_0 j} - 1 \right) (1 + \chi x) \qquad \left(\chi = 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \tag{3.1}$$

Здесь θ — угол расширения канала. Для j в этом случае получим

$$j = \frac{1}{2A_0 M_0} \frac{M}{M^2 - 1} \left\{ -1 + \left[1 + 4\chi \frac{A_0}{Q_0} M_0^2 \frac{M^2 - 1}{(1 + \chi x)^2} \right]^{1/2} \right\} \tag{3.2}$$

При $M \to 1$ величина $j \to \infty$; поэтому нельзя осуществить непрерывный переход через точку $M = 1$.

При $M < [1 - Q_0 (1 + \chi x)^2 / 4\chi A_0 M_0^2]^{1/2}$ и при $A_0 (M - 1) < 0$ рассматриваемая задача не имеет решения. При $x = 0$

$$M_0 = \left(\frac{A_0 - 1}{A_0 - \chi / Q_0} \right)^{1/2} \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что рассматриваемая задача не имеет решения, если

$$\min \{1, \chi / |Q_0|\} < |A_0| < \max \{1, \chi / |Q_0|\}$$

Разрешая исходную систему уравнений относительно M, получим

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \frac{\chi}{(1 - \chi x)(M^2 - 1)} + \frac{Q_0 (1 + \chi x) M^2}{2A_0 M_0^2 (M^2 - 1)^2} \left\{ 1 + \right.$$

$$\left. + \left[1 + 4\chi \frac{A_0}{Q_0} M_0^2 \frac{M^2 - 1}{(1 + \chi x)^2} \right]^{1/2} \right\} \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что $dM / dx < 0$ только в том случае, если

$$M < \frac{\sqrt{\chi A_0 / Q_0}}{1 + \chi x}$$

В случае, когда $\sigma = 1/\sqrt{\rho}$, для j и M имеем

$$j = \frac{1}{2A_0}\left(\frac{M}{M_0}\right)^{3/2} \frac{(1+\chi x)^{1/2}}{M^2-1}\left\{-1 + \left[1 + 4\chi\frac{A_0}{Q_0}M_0^2\left(\frac{M_0}{M}\right)^{1/2}\frac{(M^2-1)}{(1+\chi x)^{5/2}}\right]^{1/2}\right\}$$

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dx} = \frac{\chi}{(M^2-1)(1+\chi x)} + \frac{Q_0}{2A_0}\left(\frac{M}{M_0}\right)^{5/2}\frac{(1+\chi x)^{3/2}}{(M^2-1)^2}\left\{1 + \right.$$

$$\left. + \left[1 + 4\chi\frac{A_0}{Q_0}M_0^2\left(\frac{M_0}{M}\right)^{1/2}\frac{(M^2-1)}{(1+\chi x)^{5/2}}\right]^{1/2}\right\} \qquad (3.5)$$

(B) Рассмотрим случай, когда $jr_e = 1$ и $\sigma = 1$. Решая систему уравнений (1.1) — (1.6) и (2.4), получим

$$1 + \chi x = \exp\left[\frac{2\chi A_0}{Q_0(1-A_0)^2}\int_M^{M_0} M^3\left\{-1 + \left[1 + \frac{4\chi A_0 M^4}{Q_0(1-A_0)^2}\right]^{1/2}\right\}\right]$$

$$p = \rho = \frac{M_0}{M(1+\chi x)}, \qquad H = \left[1 - \frac{1}{M^2-1} - \frac{\chi}{M(1+\chi x)\,dM/dx}\right]\cdot\frac{(1-A_0)M_0}{(1+\chi x)M}$$

$$j = \frac{1}{r_e} - \frac{1}{A_0}\left[\frac{HM}{M_0} - \frac{1-A_0}{1+\chi x}\right] \qquad \left(\frac{1}{A_0} = 1 + \frac{\sigma_0 r_{e0}}{b_0}\right) \qquad (3.6)$$

Задача имеет решение при $0 < A_0 < 1$.

Изотермическое торможение плазмы в каналах постоянного сечения и в сужающихся каналах ($\chi \leqslant 0$) невозможно.

4. Торможение плазмы в однородном магнитном поле при постоянной вдоль канала разности потенциалов на стенках-электродах канала. Решение этой задачи при $\sigma = 1$ имеет такой вид:

$$p = \rho = \frac{1}{1-A_0}\left[1 - A_0\exp\left(\frac{M_0^2-M^2}{2}\right)\right], \qquad b = \frac{M_0}{\rho M}$$

$$j = \frac{1}{r_e} = \frac{M}{M_0 A_0}\left[1 - (1-A_0)\rho\right] \qquad \left(\frac{1}{A_0} = 1 + \frac{\sigma_0 r_{e0}}{b_0}\right)$$

$$x = \frac{M_0}{Q_0(1-A_0)}\int_M^{M_0}\exp\frac{M^2-M_0^2}{2}\,dM \qquad (4.1)$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{(1-A_0)^2 Q_0 \exp\left[{}^1/_2(M_0^2-M^2)\right]\{1 + A_0(M^2-1)\exp\left[{}^1/_2(M_0^2-M^2)\right]\}}{M^2\{1 + A_0\exp\left[{}^1/_2(M_0^2-M^2)\right]\}^2}$$

Задача имеет решение при $0 < A_0 < 1$. Если $\sigma = 1/\sqrt{\rho}$, то решение имеет вид

$$p = \rho = \left[1 - A_0\exp\left(\frac{M_0^2-M^2}{2}\right)\right]\frac{1}{1-A_0}, \qquad b = \frac{M_0}{\rho M}$$

$$j = \frac{1}{r_e} = \frac{M}{M_0\sqrt{\rho}\,A_0}\left[1 - (1-A_0)\rho\right] \qquad \left(\frac{1}{A_0} = 1 + \frac{\sigma_0 r_{e0}}{b_0}\right) \qquad (4.2)$$

$$x = \frac{M_0}{Q_0(1-A_0)^{3/2}}\int_M^{M_0}\exp\frac{M^2-M_0^2}{2}\left[1 - A_0\exp\frac{M_0^2-M^2}{2}\right]^{1/2}dM$$

и существует также только в диапазоне $0 < A_0 < 1$.

Поступила 14 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. N e u r i n g e r J. L. Optimum power generation from a moving plasma. Fluid Mech., 1960, vol. 7, p. 2.
2. R o s a R. J. Physical principles of magnetohydrodynamic power generation. Phys. Fluids, 1961, vol. 4, N 2.
3. С а р ы ч е в В. М. Об ускорении плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях. ПМТФ, 1961, № 6.