

УДК 519.16 + 519.25

Задача минимизации суммы разностей взвешенных сверток, случай заданного числа элементов в сумме*

А.В. Кельманов^{1,2}, Л.В. Михайлова¹, П.С. Рузанкин^{1,2}, С.А. Хамидуллин¹

¹Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: kelm@math.nsc.ru (Кельманов А.В.), mikh@math.nsc.ru (Михайлова Л.В.),
ruzankin@math.nsc.ru (Рузанкин П.С.), kham@math.nsc.ru (Хамидуллин С.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 13, 2020.

Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Рузанкин П.С., Хамидуллин С.А. Задача минимизации суммы разностей взвешенных сверток, случай заданного числа элементов в сумме // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 2. — С. 127–142.

В работе рассматривается неизученная экстремальная задача суммирования элементов числовых последовательностей Y длины N и U длины $q \leq N$. В задаче требуется минимизировать сумму разностей взвешенных сверток последовательностей переменной длины (не менее q). В каждой разности первая невзвешенная свертка — автосвертка растянутой на переменную длину последовательности U (путем кратных повторов ее элементов), вторая — взвешенная свертка этой растянутой последовательности с подпоследовательностью из Y . Анализируется вариант задачи с заданным на входе числом суммируемых разностей. Мы показываем, что задача эквивалентна одной из проблем аппроксимации последовательности Y элементом X из экспоненциального по мощности множества последовательностей. Это множество объединяет все последовательности длины N , которые в качестве подпоследовательностей включают M допустимых квазипериодических (флуктуационных) повторов последовательности U . Каждый квазипериодический повтор порождается допустимыми преобразованиями последовательности U . Этими преобразованиями являются: 1) сдвиг U на переменную величину, которая между соседними повторами не превышает $T_{\max} \leq N$; 2) переменное растягивающее отображение U в последовательность переменной длины, которое определяется в виде повторов элементов из U , кратность этих повторов — переменная величина. Критерием аппроксимации является минимум суммы квадратов расстояний между элементами последовательностей. Мы доказываем, что рассматриваемая экстремальная задача и вместе с ней задача аппроксимации разрешимы за полиномиальное время. А именно, мы показываем, что существует точный алгоритм, который находит решение задачи за время $O(T_{\max}^3 MN)$. Если T_{\max} — фиксированный параметр задачи, то время работы алгоритма равно $O(MN)$. Примерами численного моделирования проиллюстрирована применимость алгоритма к решению модельных прикладных задач помехоустойчивой обработки ECG- и PPG-подобных квазипериодических сигналов (electrocardiogram-like и photoplethysmogram-like signals).

DOI: 10.15372/SJNM20200202

Ключевые слова: числовые последовательности, разность взвешенных сверток, переменная длина сверток, минимум суммы, точный полиномиальный алгоритм, численное моделирование, ECG-подобный сигнал, PPG-подобный сигнал.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00397 и проект № 19-01-00308), программы ФНИ РАН (проект № 0314-2019-0015), программы “Тор-5-100” Министерства образования и науки РФ.

© **А.В. Кельманов**, Л.В. Михайлова, П.С. Рузанкин, С.А. Хамидуллин, 2020

Kel'manov A.V., Mikhailova L.V., Ruzankin P.S., Khamidullin S.A. The minimization problem for the sum of weighted convolution differences: the case of a given number of elements in the sum // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 2. — P. 127–142.

We consider an unstudied optimization problem of summing the elements of the two numerical sequences: Y of length N and U of length $q \leq N$. The objective of the optimization problem is to minimize the sum of differences of weighted convolutions of sequences of variable lengths (which are not less than q). In each of the differences, the first convolution is the unweighted autoconvolution of the sequence U nonlinearly expanded in time (by repetitions of its elements), and the second one is the weighted convolution of an expanded sequence with a subsequence of Y . The number of differences is given. We show that the problem is equivalent to that of approximation of the sequence Y by an element of some exponentially sized set of sequences. Such a set consists of all the sequences of length N which include, as subsequences, a given number M of admissible quasiperiodic (fluctuating) repetitions of the sequence U . Each quasiperiodic repetition is generated by the following admissible transformations of the sequence U : (1) shifting U in time, so that the differences between consecutive shifts do not exceed $T_{\max} \leq N$, (2) variable expansion of U in time consisting in repeating each element of U , with variable multiplicities of the repetitions. The optimization objective is minimizing the sum of the squares of element-wise differences. We demonstrate that the optimization problem in combination with the corresponding approximation problem are solvable in polynomial time. Specifically, we show that there exists an algorithm which solves the problems in the time $\mathcal{O}(T_{\max}^3 MN)$. If T_{\max} is a fixed parameter of the problem, then the algorithm running time is $\mathcal{O}(MN)$. In the examples of numerical modeling, we show the applicability of the algorithm to solving applied problems of noise-robust analyzing electrocardiogram-like and photoplethysmogram-like signals.

Keywords: *numerical sequences, difference of weighted convolutions, variable length convolution, minimum of sum, exact polynomial-time algorithm, numerical modeling, electrocardiogram-like signal, photoplethysmogram-like signal.*

Введение

В работе рассматривается неизученная экстремальная задача суммирования элементов числовых последовательностей.

Цель работы — анализ вычислительной сложности задачи и обоснование алгоритма с доказуемыми оценками качества (точности и трудоемкости) для ее решения. Исследование мотивировано новизной математической задачи и отсутствием каких-либо эффективных (полиномиальных) вычислительных алгоритмов с априорно гарантированными оценками точности для ее решения. Практическая мотивировка обусловлена важностью задачи, в частности, для помехоустойчивого мониторинга природных объектов, типичное состояние которых во времени квазипериодически повторяется с флуктуациями (см. пункты 2 и 6). Квазипериодичность повторений с флуктуациями означает, во-первых, непостоянство интервала между двумя последовательными повторами, а во-вторых, некоторую изменчивость типичного состояния в каждом повторе.

Статья имеет следующую структуру. В п. 1 дана формулировка задачи, приведены ее истоки и некоторые интерпретации. В следующем пункте рассмотрены частные случаи задачи и наиболее близкие по постановке задачи. В п. 3 анализируется размер (мощность) множества допустимых решений задачи. Вспомогательные утверждения, необходимые для алгоритмического решения задачи, доказаны в п. 4. Основной результат работы — точный полиномиальный алгоритм — представлен и обоснован в п. 5. В п. 6

на примерах численного моделирования продемонстрирована применимость алгоритма к решению задач помехоустойчивой обработки ECG- и PPG-подобных сигналов.

1. Формулировка задачи, ее истоки и трактовка

Рассматриваемая экстремальная задача имеет следующую формулировку.

Задача 1. Дано: числовые последовательности $Y = (y_1, \dots, y_N)$, $U = (u_1, \dots, u_q)$, натуральные числа T_{\max} , ℓ и $M \leq \lfloor \frac{N}{q} \rfloor$. Найти: набор $\mathcal{M} = \{n_1, \dots, n_M\}$ номеров последовательности Y , набор $\mathcal{P} = \{p^{(1)}, \dots, p^{(M)}\}$ натуральных чисел, набор $\mathcal{J} = \{J^{(1)}, \dots, J^{(M)}\}$ сжимающих отображений, в котором $J^{(m)} : \{1, \dots, p^{(m)}\} \rightarrow \{1, \dots, q\}$, $m = 1, \dots, M$, доставляющих минимум целевой функции

$$F(\mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{J}) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{p^{(m)}} \{u_{J^{(m)}(i)}^2 - 2 y_{n_m+i-1} u_{J^{(m)}(i)}\} \quad (1)$$

при ограничениях

$$q \leq p^{(m)} \leq \ell \leq T_{\max} \leq N, \quad m = 1, \dots, M, \quad (2)$$

$$p^{(m-1)} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max}, \quad m = 2, \dots, M, \quad (3)$$

$$p^{(M)} \leq N - n_M + 1 \quad (4)$$

на элементы искомых наборов \mathcal{M} , \mathcal{P} и при ограничениях

$$\begin{aligned} J^{(m)}(1) &= 1, & J^{(m)}(p^{(m)}) &= q, \\ 0 \leq J^{(m)}(i) - J^{(m)}(i-1) &\leq 1, & i &= 2, \dots, p^{(m)}, \\ && m &= 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (5)$$

на элементы набора сжимающих отображений.

Приведем несколько трактовок задачи 1 и ее истоки. Далее будем считать, что номерам элементов входных последовательностей Y и U соответствуют дискретно-временные отсчеты непрерывных сигналов. На рисунке 1 в виде графиков изображены пример последовательности U (слева) и пример последовательности Y (справа). Раскрашенные участки последовательности U нам понадобятся для одной из интерпретаций задачи.

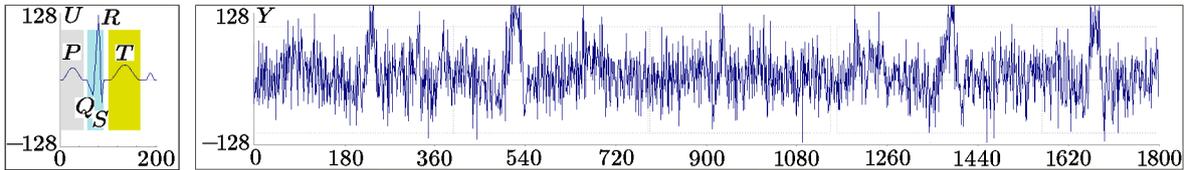


Рис. 1. Пример входных последовательностей задачи 1: U — слева, Y — справа

Целевую функцию (1) можно записать в эквивалентном виде

$$F(\mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{J}) = \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{i=1}^{p^{(m)}} u_{J^{(m)}(i)}^2 - 2 \sum_{i=1}^{p^{(m)}} y_{n_m+i-1} u_{J^{(m)}(i)} \right\}.$$

В правой части этой формулы в скобках видим автосвертку последовательности длины $p^{(m)}$, образованной из элементов U , за вычетом удвоенной свертки этой последовательности с подпоследовательностью из Y длины $p^{(m)}$. Коэффициент 2 — вес этой свертки. Поэтому задачу 1 можно трактовать как сумму разностей взвешенных сверток.

Кроме того, задачу 1 можно трактовать как задачу об оптимальном (в смысле минимума (1)) суммировании элементов двух последовательностей. Эта трактовка видна непосредственно из правой части формулы (1), в которой оптимизируемыми переменными являются индексы только двух последовательностей U и Y .

Наконец, задачу 1 можно интерпретировать как поиск оптимального разбиения целочисленного отрезка $[1, N]$ на интервалы, границы которых определяются неравенствами $1 \leq n_1 < \dots < n_m < \dots < n_M < n_{M+1} = N$, с одновременным поиском оптимальной точки $(n_m + p^{(m)} - 1) \in [n_m, n_{m+1} - 1]$, которая определяется точками $n_m, p^{(m)}$ и оптимальным отображением $J^{(m)}$ при каждом $m = 1, \dots, M$.

Источником задачи 1 является квадратичная задача аппроксимации

$$\|Y - X\|^2 \longrightarrow \min_{X \in \mathcal{X}} \quad (6)$$

последовательности Y последовательностью $X \in \mathcal{X}$, где \mathcal{X} — множество допустимых аппроксимирующих последовательностей. Общий член каждой допустимой последовательности $X = (x_1, \dots, x_N)$ определяется формулами

$$x_n = \sum_{m=1}^M h_{n-n_m+1}^{(m)}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где

$$h_i^{(m)} = \begin{cases} u_{J^{(m)}(i)}, & \text{если } i = 1, \dots, p^{(m)}, \\ 0, & \text{если } i < 1, i > p^{(m)}, \end{cases} \quad m = 1, \dots, M. \quad (8)$$

В этой формуле $J^{(m)}$ — сжимающее отображение, которое определяется формулой (5), и

$$p^{(m)} = k_1^{(m)} + \dots + k_q^{(m)}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (9)$$

где

$$k_t^{(m)} = \left| \left\{ i \mid J^{(m)}(i) = t, i \in \{1, \dots, p^{(m)}\} \right\} \right|, \quad t = 1, \dots, q, \quad (10)$$

есть кратность повтора элемента из набора $\{1, \dots, q\}$.

В соответствии с (9) и (10) образ множества $\{1, \dots, p^{(m)}\}$ при отображении $J^{(m)}$ можно представить схематично в виде

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{k_1^{(m)}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_2^{(m)}}, \dots, \underbrace{q, \dots, q}_{k_q^{(m)}}.$$

При этом равенство (8) устанавливает связь между элементами последовательности $h_i^{(m)}$ и элементами последовательности U . Величина $p^{(m)}$ есть длина растянутой последовательности, образованной из элементов последовательности U путем кратных повторений ее элементов.

В соответствии с (7)–(10) участок последовательности X с номерами элементов от $n = n_{m-1}$ до $n = n_m$ можно представить схематично в следующем виде (в нижней строке — номера элементов последовательности X):

$$\dots, 0, \overbrace{u_1, \dots, u_1}^{k_1^{(m-1)}}, \overbrace{u_2, \dots, u_2}^{k_2^{(m-1)}}, \dots, \overbrace{u_q, \dots, u_q}^{k_q^{(m-1)}}, 0, \dots, 0, u_1, \dots$$

$$\dots, n_{m-1}, \dots, n_m, \dots$$

Формулу (7) можно трактовать как сумму M растянутых последовательностей вида (8). В этой формуле значение индекса $n = n_m$, $n_m \in \mathcal{M}$, позиционирует в последовательности X начальный номер m -го повтора последовательности U длины q , растянутой до длины $p^{(m)}$ в соответствии с (8)–(10). Допустимое множество \mathcal{X} решений задачи (6) содержит все последовательности, которые описываются формулами (7)–(10) и (2)–(5). Содержательно можно сказать, что каждый элемент множества \mathcal{X} порождается допустимыми квазипериодическими (флуктуационными) повторами $m = 1, \dots, M$ последовательности U . При этом каждый квазипериодический повтор порождается допустимыми преобразованиями последовательности U . Этими преобразованиями являются: 1) сдвиг U на переменную величину, которая между соседними повторами не превышает $T_{\max} \leq N$; 2) переменное растягивающее отображение U в последовательность переменной длины, которое определяется в виде повторов элементов из U , причем кратность каждого из этих повторов — переменная величина.

Пример последовательности X приведен на рис. 2 в виде графика. На этом рисунке представлены 5 растянутых повторов, которые порождены последовательностью U , изображенной на рис. 1. Кратности повторений элементов из U и интервалы между двумя растянутыми повторами генерировались датчиком случайных чисел. Чередующимся раскрашенным участкам последовательности U на рис. 1 соответствуют чередующиеся растянутые (по отношению к участкам из U) раскрашенные участки в последовательности X на рис. 2. Ступенчатость сигнала на этом рисунке обусловлена кратными повторениями элементов из U .

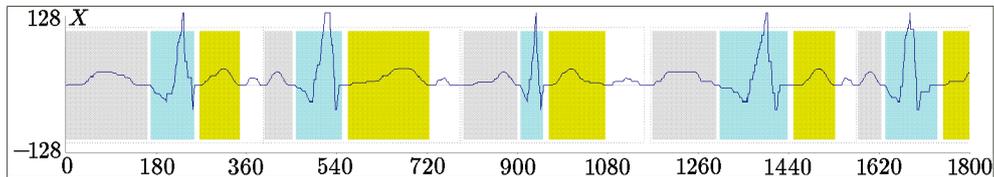


Рис. 2. Пример последовательности X , порожденной последовательностью U и ее допустимыми преобразованиями

Поясним смысл ограничений (2) и (3) в формулировке задачи 1. В этих формулах T_{\max} обозначает верхнюю границу на интервал между двумя соседними растянутыми повторами, ℓ обозначает верхнюю границу на длину $p^{(m)}$ растяжения внутри каждого из этих интервалов, q устанавливает нижнюю границу на длину допустимых растяжений. Нижняя граница $p^{(m-1)}$ в формуле (3) означает, что каждый интервал между двумя последовательными растянутыми повторами не может быть меньше, чем длина растянутой последовательности из этого интервала. Формула (4) по смыслу аналогична (3) и ограничивает сверху длину $p^{(M)}$ последнего M -го растянутого повтора. В целом, формулы (2)–(4) устанавливают соотношение верхних и нижних границ для допустимых порождающих преобразований в виде сдвигов и растяжений последовательности U .

Для суммы квадратов расстояний между элементами Y и X с учетом (7) и (8) путем несложных преобразований получим равенство

$$\sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2 = \sum_{n=1}^N y_n^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{p^{(m)}} \left\{ u_{J^{(m)}(i)}^2 - 2y_{n_m+i-1} u_{J^{(m)}(i)} \right\}.$$

Первая сумма в правой части этого равенства не зависит от каких-либо переменных задачи 1, а вторая совпадает с (1). Поэтому аппроксимационная задача (6) эквивалентна сформулированной задаче 1.

Некоторые прикладные истоки задачи 1 дополнительно отмечены в следующем пункте.

2. Близкие по постановке задачи

Задача 1 является обобщением ранее исследованной задачи дискретной оптимизации. Частный случай задачи 1, в котором $p^{(m)} = q$, $J^{(m)}(i) = i$ при каждом $m = 1, \dots, M$, исследовался в [1–3]. В [2] и [3] обоснован точный алгоритм с временем работы $\mathcal{O}(T_{\max}N)$.

В [1] исследовался вариант указанного частного случая, в котором M — часть входа (не является оптимизируемой переменной, как и в настоящей работе). В цитируемой работе построен алгоритм, гарантирующий отыскание оптимального решения за время $\mathcal{O}(T_{\max}MN)$. Этот вариант частного случая задачи 1 послужил подходящей моделью, в частности, для решения прикладных проблем геофизического и аэрокосмического мониторинга подземных и космических объектов. Алгоритм с несущественными модификациями программно-инженерного плана был дважды переизложен в [4] и [5], а затем использован в центре космических исследований NASA. Он, в частности, позволил обнаружить не одну сотню новых экзопланет по сильно зашумленным астрофизическим данным [5, 6]. Авторы цитируемых работ отмечают, что известные подходы к решению такого рода прикладных мониторинговых проблем оказались существенно менее результативными в плане помехоустойчивости. Другим результативным применением алгоритма является решение обратных геофизических задач, связанных с проблемами выявления сейсмических источников, а также прогнозированием техногенных катастроф [7].

Приложениями задачи 1 являются проблемы обработки, анализа и интерпретации дискретно-временных сигналов, типичных для мониторинга состояний наземных, подземных, подводных, аэрокосмических, медицинских и других объектов. Эта задача, очевидно, является подходящей математической моделью для решения прикладных проблем из отмеченных областей в тех случаях, когда сигналы имеют квазипериодическую структуру в виде флуктуирующих повторов участков сигнала (например импульсов). Поэтому задачу 1 можно трактовать в терминах каждого из отмеченных приложений.

В качестве иллюстрации в п. 6 мы приводим лишь два примера приложений задачи 1 к обработке медицинских сигналов, имеющих вид квазипериодической последовательности импульсов. Как известно, в биомедицинских импульсных последовательностях интервалы между повторами импульсов и форма самих импульсов в повторях сопровождаются возможными флуктуациями, обусловленными естественными для природы квазипериодическими процессами.

3. Размер множества допустимых решений

Оценим размер (мощность) множества \mathcal{X} , т. е. число допустимых решений задачи 1. Заметим, что значение M , очевидно, ограничено сверху, т. е. $M \leq \left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor \leq N$. Из комбинаторных соображений имеем оценку

$$|\mathcal{X}| \leq \left((\ell - q + 1)q^{\ell - q} \right)^M (N - Mq + 1)(T_{\max} - q + 1)^{M-1}. \quad (11)$$

В правой части этого неравенства выражение $(\ell - q + 1)q^{\ell - q}$ — оценка сверху для мощности множества допустимых вариантов растяжений последовательности U . Это выра-

жение в степени M — оценка сверху для мощности совокупности вариантов выбора M таких растяжений. Множитель $(N - Mq + 1)$ соответствует мощности множества вариантов выбора расположения в последовательности длины N первой из M подпоследовательностей длины не менее q . Наконец, последний множитель соответствует мощности множества вариантов расположения в последовательности длины N оставшихся $(M - 1)$ подпоследовательностей длины не менее q .

Легко видеть, что за исключением тривиального случая $T_{\max} = \ell = q$ для мощности множества \mathcal{X} имеем оценку снизу

$$|\mathcal{X}| > 2^{M-1} \tag{12}$$

в случае $M \leq \left\lfloor \frac{N}{q+1} \right\rfloor$, который типичен для приложений. Действительно, оценка (12) справедлива даже для простейшего случая, когда $T_{\max} = q + 1$, $\ell = q$, $p^{(m)} = q$, $J^{(m)}(i) = i$, $m = 1, \dots, M$, и ограничение (3) принимает вид

$$q \leq n_m - n_{m-1} \leq q + 1, \quad m = 2, \dots, M.$$

В этом случае $|\mathcal{X}|$ равна мощности множества допустимых вариантов выбора набора M . Очевидно, что число таких допустимых вариантов больше, чем число вариантов выбора набора M , в котором $n_1 = 1$. Это число совпадает с правой частью (12).

4. Основы алгоритма

Ниже мы формулируем две вспомогательные экстремальные задачи и доказываем утверждения, гарантирующие отыскание их точных алгоритмических решений. Эти задачи и утверждения необходимы для обоснования алгоритма решения задачи 1.

Нам потребуется следующая вспомогательная задача.

Задача 2. Дано: таблица $\{w_{i,j}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q\}$ вещественных чисел. Найти: индексы суммирования $J(i), i = 1, \dots, p$, доставляющие минимум функции

$$W = \sum_{i=1}^p w_{i,J(i)}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} J(1) &= 1, & J(p) &= q, \\ 0 \leq J(i) - J(i-1) &\leq 1, & i &= 2, \dots, p, \end{aligned} \tag{13}$$

на искомые индексы.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Минимум целевой функции W в задаче 2 находится по формуле*

$$W^* = W_{p,q}, \tag{14}$$

а значение $W_{p,q}$ находится в результате вычислений по рекуррентной формуле:

$$W_{s,t} = \min\{W_{s-1,t}, W_{s-1,t-1}\} + w_{s,t}, \quad s = 1, \dots, p, \quad t = 1, \dots, q, \tag{15}$$

при начальном и граничных условиях:

$$W_{s,t} = \begin{cases} 0, & s = 0, \quad t = 0, \\ +\infty, & s = 0, \quad t = 1, \dots, q, \\ +\infty, & s = 1, \dots, p, \quad t = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Оптимальные значения индексов суммирования находятся по следующему правилу:

$$J^*(p) = q,$$

$$J^*(i-1) = \begin{cases} J^*(i), & \text{если } W_{i-1, J^*(i)} \leq W_{i-1, J^*(i)-1}, \\ J^*(i) - 1, & \text{если } W_{i-1, J^*(i)} > W_{i-1, J^*(i)-1}, \end{cases} \quad (17)$$

$$i = p, p-1, \dots, 2.$$

Доказательство. Легко видеть, что ограничения (13) определяют множество

$$\mathcal{J}_q(p) = \{J : \{1, \dots, p\} \longrightarrow \{1, \dots, q\} \mid J(1) = 1, J(p) = q, \\ 0 \leq J(i) - J(i-1) \leq 1, i = 2, \dots, p\} \quad (18)$$

допустимых соответствий индексов суммирования.

Обозначим задачу 2 через $\langle p, q \rangle$ и погрузим эту задачу в семейство подзадач $\langle s, t \rangle$ поиска минимальных значений:

$$W_{s,t} = \min_{J \in \mathcal{J}_t(s)} \sum_{i=1}^s w_{i, J(i)}, \quad s = 1, \dots, p, \quad t = 1, \dots, q,$$

на множестве сжимающих отображений

$$\mathcal{J}_t(s) = \{J : \{1, \dots, s\} \longrightarrow \{1, \dots, t\} \mid J(1) = 1, J(s) = t, \\ 0 \leq J(i) - J(i-1) \leq 1, i = 2, \dots, s\}.$$

Из принципа оптимальности Беллмана и (18) следует, что значение $W_{s,t}$ может быть выбрано только из двух возможных вариантов:

$$\{W_{s-1,t} + w_{s,t}, W_{s-1,t-1} + w_{s,t}\}, \quad (19)$$

где

$$W_{s-1,t} = \min_{J \in \mathcal{J}_t(s-1)} \sum_{i=1}^{s-1} w_{i, J(i)}, \quad (20)$$

$$W_{s-1,t-1} = \min_{J \in \mathcal{J}_{t-1}(s-1)} \sum_{i=1}^{s-1} w_{i, J(i)}.$$

Из (19) и (20) следует справедливость формул (15) и (14). Справедливость начального и граничных условий в формуле (16) следует из (18). Правило (17) является очевидным следствием формул (14)–(16). \square

Следующая лемма устанавливает области допустимых значений взаимосвязанных переменных из искомого набора задачи 1.

Лемма 2. Пусть элементы набора $\{(n_1, p_1), \dots, (n_M, p_M)\}$ удовлетворяют системе ограничений (2)–(4) в задаче 1. Тогда:

(1) множество допустимых значений элемента n_m задается формулой

$$\omega_m = \{1 + (m-1)q, \dots, N - (M - m + 1)q + 1\}, \quad m = 1, \dots, M; \quad (21)$$

(2) если $n_m = n$, где $n \in \omega_m$, то

$$p_m \in \delta_m(n) = \{q, \dots, \min\{\ell, N - n_m + 1 - q(M - m)\}\}, \quad m = 1, \dots, M; \quad (22)$$

(3) если $n_m = n$, где $n \in \omega_m$, то

$$n_{m-1} \in \gamma_m(n) = \{k \mid \max\{n - T_{\max}, 1 + (m - 2)q\} \leq k \leq n - q\}, \quad m = 2, \dots, M; \quad (23)$$

(4) если $n_m = n$, где $n \in \omega_m$, и $n_{m-1} = j$, где $j \in \gamma_m(n)$, то

$$p_{m-1} \in \theta_m(n, j) = \{q, \dots, \min\{\ell, n - j\}\}, \quad m = 2, \dots, M. \quad (24)$$

Справедливость леммы 2 легко устанавливается путем суммирования неравенств, входящих в систему ограничений (2)–(4).

Кроме того, нам потребуется следующая вспомогательная задача.

Задача 3. Дано: натуральные числа $N, q, \ell, T_{\max} \geq \ell$ и $M \leq \lfloor \frac{N}{q} \rfloor$, удовлетворяющие условиям задачи 1, и совокупность $\{g(n, p), n = 1, \dots, N - q + 1, p = q, \dots, \min\{\ell, N - n + 1\}\}$ числовых последовательностей. Найти: набор $\{(n_1, p_1), \dots, (n_M, p_M)\}$ пар натуральных чисел, в котором $n_m \in \{1, \dots, N - q + 1\}, p_m \in \{q, \dots, \ell\}, m = 1, \dots, M$, доставляющий минимум целевой функции

$$G((n_1, p_1), \dots, (n_M, p_M)) = \sum_{m=1}^M g(n_m, p_m) \quad (25)$$

при ограничениях (2)–(4).

Справедлива следующая

Лемма 3. Минимум целевой функции G в задаче 3 находится по формуле

$$G_M^* = \min_{n \in \omega_M} \min_{p \in \delta_M(n)} G_M(n, p), \quad (26)$$

а значения $G_M(n, p)$ условных оптимумов находятся в результате вычислений по рекуррентным формулам:

$$G_m(n, p) = \begin{cases} g(n, p), & m = 1, n \in \omega_1, p \in \delta_1(n), \\ \min_{j \in \gamma_m(n)} \min_{i \in \theta_m(n, j)} G_{m-1}(j, i) + g(n, p), & m = 2, \dots, M, n \in \omega_m, p \in \delta_m(n). \end{cases} \quad (27)$$

Доказательство. Опираясь на ограничения (2)–(4), определим множество

$$\Phi_M = \{(n_1, p_1), \dots, (n_M, p_M) \mid n_m \in \{1, \dots, N - q + 1\}, p_m \in \{q, \dots, \ell\}, m = 1, \dots, M; p_{m-1} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max}, m = 2, \dots, M; p_M \leq N - n_M + 1\} \quad (28)$$

наборов пар натуральных чисел, допустимых в задаче 3.

Для упрощения записи доказательства положим

$$\varphi_M = \{(n_1, p_1), \dots, (n_M, p_M)\}. \quad (29)$$

Тогда, в соответствии с (25), (28) и (29), для оптимального значения целевой функции G имеем обозначение:

$$G_M^* = \min_{\varphi_M \in \Phi_M} G(\varphi_M). \quad (30)$$

В соответствии с леммой 2, если $\varphi_M \in \Phi_M$, то при каждом $m = 1, \dots, M$ для компонент m -й пары этого набора справедливо, что $n_m \in \omega_m$ и $p_m \in \delta_m(n_m)$.

Опираясь на лемму 2, для каждого $m = 1, \dots, M$ определим множество

$$\Phi_m(n, p) = \left\{ \{(n_1, p_1), \dots, (n_m, p_m)\} \mid (n_m, p_m) = (n, p); \right. \\ \left. n_i \in \{1, \dots, n\}, p_i \in \{q, \dots, \ell\}, i = 1, \dots, m; \right. \\ \left. p_{i-1} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}, i = 2, \dots, m \right\}, n \in \omega_m, p \in \delta_m(n), \quad (31)$$

префиксных наборов, у которых компоненты последней пары в наборе имеют фиксированные значения n и p .

Из определения (31) следует, что $\Phi_M(n, p) \subseteq \Phi_M$, $n \in \omega_M$, $p \in \delta_M(n)$ и

$$\Phi_M = \bigcup_{n \in \omega_M} \bigcup_{p \in \delta_M(n)} \Phi_M(n, p). \quad (32)$$

По аналогии с (29), (30) положим $\varphi_m = ((n_1, p_1), \dots, (n_m, p_m))$, $m = 1, \dots, M$, и

$$G(\varphi_m) = \sum_{i=1}^m g(n_i, p_i). \quad (33)$$

Рассмотрим семейство задач $\langle m, n, p \rangle$ вычисления оптимальных значений:

$$G_m(n, p) = \min_{\varphi_m \in \Phi_m(n, p)} G(\varphi_m), \quad n \in \omega_m, p \in \delta_m(n), m = 1, \dots, M. \quad (34)$$

Заметим, что при $m = 1$ для $n \in \omega_1$, $p \in \delta_1(n)$ из (31) следует равенство

$$\Phi_1(n, p) = \{(n, p)\}. \quad (35)$$

При $m > 1$ для $n \in \omega_m$, $p \in \delta_m(n)$ из леммы 2 и определения (31) следует, что

$$\Phi_m(n, p) = \left\{ \{(n_1, p_1), \dots, (n_m, p_m)\} \mid n_m = n, p_m = p; \right. \\ \left. n_{k-1} \in \gamma_k(n_k), p_{k-1} \in \theta_m(n_k, n_{k-1}), k = 2, \dots, m \right\} \\ = \left\{ \{(n_1, p_1), \dots, (n_{m-1}, p_{m-1}), (n, p)\} \mid \right. \\ \left. \{(n_1, p_1), \dots, (n_{m-1}, p_{m-1})\} \in \Phi_{m-1}(j, i), j \in \gamma_m(n), i \in \theta_m(n, j) \right\}. \quad (36)$$

Докажем формулу (27). Два варианта вычислений ($m = 1$ и $m > 1$) в этой формуле следуют из (35) и (36). Действительно, для первого варианта, когда $m = 1$, имеем

$$G_1(n, p) = \min_{\varphi_1 \in \Phi_1(n, p)} G(\varphi_1) = \min_{\varphi_1 \in \{(n, p)\}} G(\varphi_1) = G(n, p) = g(n, p). \quad (37)$$

Во втором варианте формулы (27), когда $m = 2, \dots, M$, $n \in \omega_m$, $p \in \delta_m(n)$, значение $G_m(n, p)$ в соответствии с (36) и принципом оптимальности Беллмана выбирается из совокупности

$$\{G_{m-1}(j, i) + g(n, p), j \in \gamma_m(n), i \in \theta_m(n, j)\}$$

возможных вариантов, где

$$G_{m-1}(j, i) = \min_{\varphi_{m-1} \in \Phi_{m-1}(j, i)} G(\varphi_{m-1}).$$

Иными словами,

$$G_m(n, p) = \min_{j \in \gamma_m(n)} \min_{i \in \theta_m(n, j)} G_{m-1}(j, i) + g(n, p). \quad (38)$$

Наконец, справедливость формулы (27) следует из (37) и (38), а справедливость (26) следует из (30), (32) и (34). \square

Справедливо следующее очевидное следствие.

Следствие. Пусть выполнены условия леммы 3. Допустим, кроме того, что

$$n_M = \arg \min_{n \in \omega_M} \left\{ \min_{p \in \delta_M(n)} G_M(n, p) \right\}, \quad p_M = \arg \min_{p \in \delta_M(n_M)} G_M(n_M, p) \quad (39)$$

и

$$n_{m-1} = \arg \min_{j \in \gamma_m(n_m)} \left\{ \min_{i \in \theta_m(n_m, j)} G_{m-1}(j, i) \right\}, \quad p_{m-1} = \arg \min_{i \in \theta_m(n_m, n_{m-1})} G_{m-1}(n_{m-1}, i) \quad (40)$$

при каждом $m = M, \dots, 2$. Тогда набор

$$\varphi = \{(n_1, p_1), \dots, (n_M, p_M)\}$$

является оптимальным решением задачи 3.

5. Алгоритм

Опираясь на вспомогательные задачи и утверждения из п. 4, сформулируем алгоритм решения задачи 1.

Алгоритм А.

Вход: Y, U, T_{\max}, ℓ и M .

Прямой ход алгоритма.

Шаг 1 (Построение семейства решений задач 2). Для каждого $n = 1, \dots, N - q + 1$ выполним:

для каждого $p = q, \dots, \min\{\ell, N - n + 1\}$ выполним (решение задачи 2):

(1) вычислим

$$w_{s,t} = u_t^2 - 2y_{n+s-1}u_t, \quad s = 1, \dots, p, \quad t = 1, \dots, q, \quad (41)$$

(2) найдем значение W^* по формулам (14)–(16) и последовательность $J^*(1), \dots, J^*(p)$ по формулам (17),

(3) положим: $W^*(n, p) = W^*$, $J^*(n, p) = \{J^*(i), i = 1, \dots, p\}$.

Конец построения семейства решений задачи 2.

Шаг 2 (Определение входа задачи 3). Для каждого $n = 1, \dots, N - q + 1$ положим $g(n, p) = W^*(n, p)$, $p = q, \dots, \min\{\ell, N - n + 1\}$.

Шаг 3 (Решение задачи 3). Вычислим совокупность значений $G_m(n, p)$, $m = 1, \dots, M$, $n \in \omega_m$, $p \in \delta_m(n)$, по формулам (27), а так же значение G_M^* по формуле (26). Положим $F_A = G_M^*$.

Обратный ход алгоритма.

Шаг 4. Найдем компоненты наборов (p_1, \dots, p_M) и (n_1, \dots, n_M) по формулам (39), (40).

Шаг 5. Положим:

$$\mathcal{M}_A = \{n_1, \dots, n_M\}, \quad \mathcal{P}_A = \{p_1, \dots, p_M\}, \quad \mathcal{J}_A = \{J^*(n_1, p_1), \dots, J^*(n_M, p_M)\}.$$

Выход: \mathcal{M}_A , \mathcal{P}_A , \mathcal{J}_A и F_A .

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Алгоритм \mathcal{A} находит точное решение задачи 1 за время $\mathcal{O}(T_{\max}^3 MN)$.

Доказательство. Для значения F_A , найденного алгоритмом, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} F_A &\stackrel{1}{=} \min_{\mathcal{M}, \mathcal{P}} \sum_{m=1}^M W^*(n_m, p_m) \stackrel{2}{=} \min_{\mathcal{M}, \mathcal{P}} \sum_{m=1}^M \left\{ \min_{J \in \mathcal{J}_q(p_m)} \sum_{i=1}^{p_m} \left\{ u_{J(i)}^2 - 2y_{n_m+i-1} u_{J(i)} \right\} \right\} \\ &\stackrel{3}{=} \min_{\mathcal{M}, \mathcal{P}} \sum_{m=1}^M \left\{ \min_{J^{(m)} \in \mathcal{J}_q(p_m)} \sum_{i=1}^{p_m} \left\{ u_{J^{(m)}(i)}^2 - 2y_{n_m+i-1} u_{J^{(m)}(i)} \right\} \right\} \\ &\stackrel{4}{=} \min_{\mathcal{M}, \mathcal{P}} \min_{J^{(1)}, \dots, J^{(M)}} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{p_m} \left\{ u_{J^{(m)}(i)}^2 - 2y_{n_m+i-1} u_{J^{(m)}(i)} \right\} \\ &\stackrel{5}{=} \min_{\mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{J}} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{p_m} \left\{ u_{J^{(m)}(i)}^2 - 2y_{n_m+i-1} u_{J^{(m)}(i)} \right\} \stackrel{6}{=} F^*. \end{aligned} \quad (42)$$

Действительно, в этой цепочке равенство 1 следует из описания шага 3, определения оптимального решения задачи 3 и леммы 3. Равенство 2 справедливо в соответствии с описанием шага 1, определением оптимального решения задачи 2 и леммой 1. Равенство 3 очевидно (замена переменных). Справедливость равенства 4 следует из того, что $J^{(m)}$, $m = 1, \dots, M$, независимы и, при фиксированных \mathcal{M} и \mathcal{P} , двойная сумма в правой части равенства 4 является сепарабельной функцией от $(J^{(1)}, \dots, J^{(M)})$. Иными словами, формально имеем $\sum_{m=1}^M \min_{J^{(m)}}(\cdot) = \min_{J^{(1)}, \dots, J^{(M)}} \sum_{m=1}^M(\cdot)$. Равенство 5 очевидно. Равенство 6 — определение оптимального решения задачи 1. Таким образом, оптимальность решения, найденного алгоритмом, следует из (42).

Оценим трудоемкость алгоритма, используя его пошаговую запись.

На шаге 1 при каждом $n = 1, \dots, N - q + 1$ и каждом $p = q, \dots, \min\{\ell, N - n + 1\}$ задача 2 решается, очевидно, за время $\mathcal{O}(qT_{\max})$, так как $q \leq p \leq \ell \leq T_{\max}$. Совокупность решений этих задач находится за время $\mathcal{O}(T_{\max}^2 N)$. Действительно, при фиксированном значении n для всех $p = q + 1, \dots, \min\{\ell, N - n - 1\}$ для вычисления совокупности значений $w_{s,t}$, $W_{s,t}$, $s = q, \dots, p$, $t = 1, \dots, q$, по формулам (41), (15) и (16) достаточно вычислить только значения $w_{p,t}$, $W_{p,t}$, $t = 1, \dots, q$, так как совокупность значений $w_{s,t}$, $W_{s,t}$, $s = q, \dots, p - 1$, $t = 1, \dots, q$, была вычислена ранее при выполнении пунктов (1)–(3) шага 1 для $p - 1$.

Шаг 2 выполняется за время $\mathcal{O}(T_{\max} N)$, так как $\ell \leq T_{\max}$.

На шаге 3 вычисление одного значения $G_m(n, p)$, $m = 1, \dots, M$, $n \in \omega_m$, $p \in \delta_m(n)$, по формуле (27) выполняется за время $\mathcal{O}(T_{\max}^2)$, так как $q \leq p \leq \ell \leq T_{\max}$, $\max_{i,n} |\gamma_i(n)| \leq T_{\max}$ и $\max_{m,n,j} |\theta_m(n, j)| \leq \ell - q + 1 \leq \ell \leq T_{\max}$ в соответствии с (23), (24). Для каждого

значения $m = 1, \dots, M$ выполняется $\mathcal{O}(NT_{\max})$ вычислений по формуле (27), так как $\max_m |\omega_m| \leq N$, $\max_{m,n} |\delta_m(m)| \leq \ell$, а для всех значений m выполняется $\mathcal{O}(MNT_{\max})$ вычислений, каждое из которых производится за время $\mathcal{O}(T_{\max}^2)$. Следовательно, итоговая трудоемкость шага 3 оценивается величиной $\mathcal{O}(T_{\max}^3 NM)$.

На шаге 4 вычисление по формулам (39) и (40) выполняется за время $\mathcal{O}(MT_{\max}N)$. Шаг 5 выполняется за время $\mathcal{O}(N)$.

Суммируя временные затраты на всех шагах алгоритма, получаем итоговую трудоемкость алгоритма \mathcal{A} . \square

Замечание. Если T_{\max} — фиксированный параметр, то время работы алгоритма равно $\mathcal{O}(MN)$.

В следующем вспомогательном демонстрационном пункте мы приводим примеры применения полученного результата к решению двух модельных задач прикладного плана.

6. Примеры численного моделирования

Очевидно, что с математической точки зрения не имеет значения импульсу какой формы соответствует входная последовательность U . Тем не менее, ниже для иллюстрации возможного применения алгоритма в биомедицинских приложениях приведены два примера численного моделирования процесса обработки временных рядов (последовательностей), которые можно трактовать как квазипериодические последовательности флуктуирующих ECG-подобных (рис. 3) и PPG-подобных импульсов (рис. 4), искаженных аддитивной помехой.

На каждом рисунке в верхней части слева изображена последовательность U , соответствующая некоторому ECG- или PPG-импульсу. Описание формы этих импульсов, включая их характерные участки и значимые точки, широко представлено в литературе и интернете (см., например, [8–13]). На рис. 3 этими участками являются P-Q-R-S-T-U, а на рис. 4 — систолическая, диастолическая и диастолическая точки. Характерные участки или интервалы между значимыми точками импульса выделены раскраской.

Справа от этого импульса изображена модельная программно сгенерированная квазипериодическая последовательность, соответствующая некоторой импульсной последовательности, порожденной квазипериодическими флуктуирующими повторами импульса U . В модельной последовательности каждый квазипериодический повтор последовательности U сопровождается ее флуктуирующими растяжениями, а интервалы между повторами не постоянны. Квазипериодичность этих повторов видна по растянутым характерным участкам импульса, которые выделены цветом.

В средней части каждого рисунка (под модельной последовательностью) изображена последовательность Y .

Эта последовательность генерировалась как результат сложения модельной последовательности с последовательностью независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Как известно, высокий уровень помехи (σ^2) нетипичен для биомедицинских приложений. Тем не менее, в приведенных примерах мы специально моделировали значительный уровень помехи для демонстрации способности алгоритма как инструмента для обработки сильно зашумленных данных. Входными последовательностями для алгоритма являются U и Y .

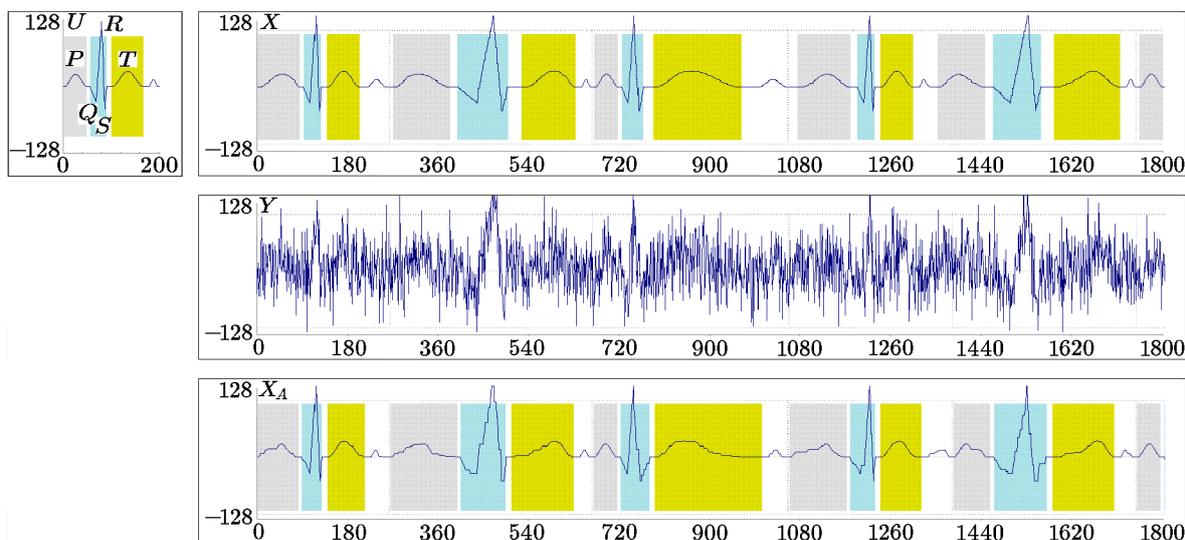


Рис. 3. Пример помехоустойчивой обработки ECG-подобного сигнала

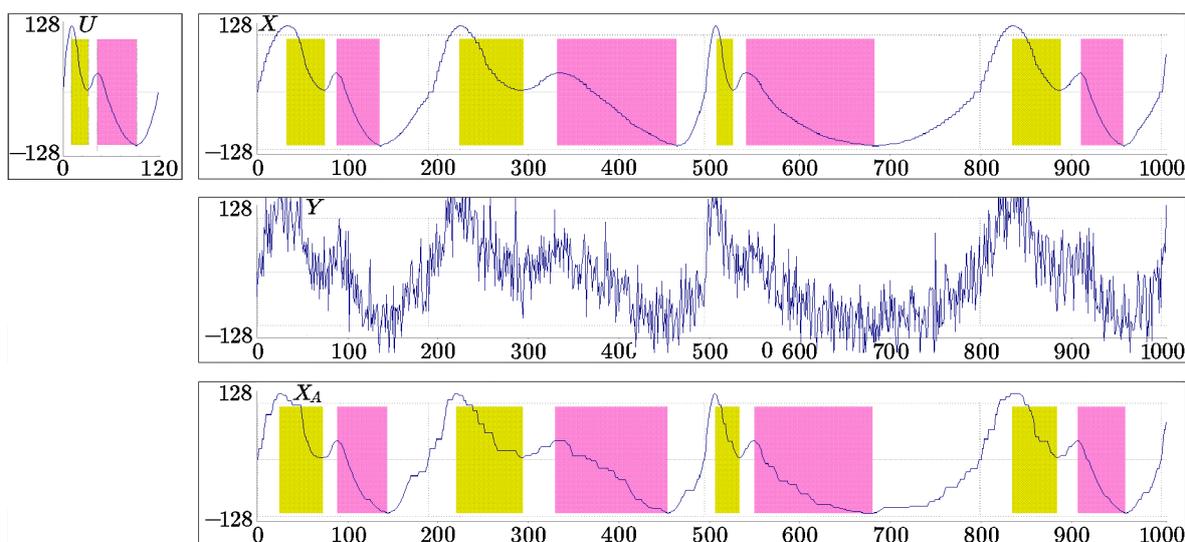


Рис. 4. Пример помехоустойчивой обработки PPG-подобного сигнала

Последовательность X_A , приведенная в нижней части рисунков 3 и 4, является оценкой для модельной (ненаблюдаемой) последовательности в верхней части соответствующих рисунков. Элементы X_A легко находятся по входной последовательности U и трем выходным наборам алгоритма по формулам (7) и (8) при $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_A$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_A$. По этим же формулам можно найти оценки для характерных растянутых участков и точек. Данные на рис. 3 получены при $q = 203$, $T_{\max} = \ell = 400$, $N = 1800$, $M = 5$, $\sigma = 40$, максимальная амплитуда сигнала — 128, а на рис. 4 при $q = 120$, $T_{\max} = \ell = 300$, $N = 1000$, $M = 4$, $\sigma = 40$, максимальная амплитуда сигнала — 120.

Сравнивая визуально верхние и нижние графики (временные ряды), можно оценить качество получаемых решений как вполне приемлемое для практики помехоустойчивой

обработки данных в виде квазипериодических последовательностей флуктуирующих импульсов. В настоящей работе мы ограничиваемся лишь приведенными примерами, так как прикладные задачи находятся вне рамок настоящей работы. Здесь нас интересовала лишь новая дискретная экстремальная задача и алгоритм ее решения как математический инструмент для робастного решения сходных прикладных проблем. Вместе с этим отметим, что из любопытства алгоритм был опробован на целом ряде модельных импульсов различной формы и показал такую же высокую результативность.

7. Заключение

В работе конструктивно (алгоритмически) установлена эффективная разрешимость неизученной ранее экстремальной задачи — построен точный полиномиальный алгоритм. В численных экспериментах мы продемонстрировали, что предложенный алгоритм послужит подходящим инструментом для решения некоторых прикладных проблем помехоустойчивой обработки квазипериодических импульсных последовательностей, в частности проблем обработки, анализа и интерпретации ECG и PPG сигналов.

Практический интерес представляет применение предложенного алгоритма к решению задачи распознавания, в которой имеется не одна последовательность U , а алфавит последовательностей, содержащий последовательности, соответствующие эталонным импульсам, например, каких-либо заболеваний. С математической точки зрения значительный интерес представляет исследование дискретной экстремальной задачи, в которой по входной последовательности Y , имеющей квазипериодическую структуру, требуется найти последовательность U фиксированной длины. Исследование этих задач представляется делом ближайшей перспективы.

Литература

1. **Кельманов А.В., Хамидуллин С.А.** Апостериорное обнаружение заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2001. — Т. 41, № 5. — С. 807–820. Перевод: Kel'manov A.V., Khamidullin S.A. Posterior detection of a given number of identical subsequences in a quasiperiodic sequence // Comp. Math. and Math. Phys. — 2001. — Vol. 41, № 5. — P. 762–774.
2. **Kel'manov A.V., Khamidullin S.A., Okol'nishnikova L.V.** A posteriori detection of identical subsequences in a quasiperiodic sequence // Pattern Recognition and Image Analysis. — 2002. — Vol. 12, № 4. — P. 438–447.
3. **Кельманов А.В., Хамидуллин С.А., Окольнишникова Л.В.** Апостериорное обнаружение одинаковых подпоследовательностей-фрагментов в квазипериодической последовательности // Сиб. журн. индустр. математики. — 2002. — Т. 5, № 2(10). — С. 94–108.
4. **Kel'manov A.V., Jeon B.** A posteriori joint detection and discrimination of pulses in a quasiperiodic pulse train // IEEE Transactions on Signal Processing. — 2004. — Vol. 52, № 3. — P. 645–656.
5. **Carter J.A., Agol E., Chaplin W.J., et al.** Kepler-36: a pair of planets with neighboring orbits and dissimilar densities // Science. — 2012. — Vol. 337, № 6094. — P. 556–559.
6. **Carter J.A., Agol E.** The quasiperiodic automated transit search algorithm // The Astrophysical J. — 2013. — Vol. 765, № 2. — P. 132.
7. **Voskoboynikova G., Khairerdinov M.** Numerical modeling of posteriori algorithms for the geophysical monitoring // Communications in Computer and Information Science. — 2015. — Vol. 549. — P. 190–200.

8. Stepwards. — URL: https://www.stepwards.com/?page_id=24147.
9. **Zhang D., Zuo W., Wang P.** Computational Pulse Signal Analysis. — Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2018.
10. **Rajni R., Kaur I.** Electrocardiogram signal analysis — an overview // Int. J. Comput. Appl. — 2013. — Vol. 84, № 7. — P. 22–25.
11. https://www.comm.utoronto.ca/~biometrics/PPG_Dataset/index.html.
12. **Shelley K., Shelley S.** Pulse oximeter waveform: photoelectric plethysmography // Clinical monitoring: practical applications for anesthesia and critical care / C. Lake, R. Hines, C. Blitt — Philadelphia PA: W.B. Saunders Company, 2001. — P. 420–428.
13. **Elgendi M.** On the analysis of fingertip photoplethysmogram signals // Current Cardiology Reviews. — 2012. — Vol. 8, № 1. — P. 14–25.

Поступила в редакцию 12 августа 2019 г.

После исправления 20 октября 2019 г.

Принята к печати 19 декабря 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Kel'manov A.V., Khamidullin S.A.** Aposteriornoe obnaruzhenie zadannogo chisla odinakovykh podposledovatel'nostei v kvaziperiodicheskoi posledovatel'nosti // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2001. — Т. 41, № 5. — S. 807–820. Pervod: Kel'manov A.V., Khamidullin S.A. Posterior detection of a given number of identical subsequences in a quasiperiodic sequence // Comp. Math. and Math. Phys. — 2001. — Vol. 41, № 5. — P. 762–774.
2. **Kel'manov A.V., Khamidullin S.A., Okol'nishnikova L.V.** A posteriori detection of identical subsequences in a quasiperiodic sequence // Pattern Recognition and Image Analysis. — 2002. — Vol. 12, № 4. — P. 438–447.
3. **Kel'manov A.V., Khamidullin S.A., Okol'nishnikova L.V.** Aposteriornoe obnaruzhenie odinakovykh podposledovatel'nostei-fragmentov v kvaziperiodicheskoi posledovatel'nosti // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2002. — Т. 5, № 2(10). — S. 94–108.
4. **Kel'manov A.V., Jeon B.** A posteriori joint detection and discrimination of pulses in a quasiperiodic pulse train // IEEE Transactions on Signal Processing. — 2004. — Vol. 52, № 3. — P. 645–656.
5. **Carter J.A., Agol E., Chaplin W.J., et al.** Kepler-36: a pair of planets with neighboring orbits and dissimilar densities // Science. — 2012. — Vol. 337, № 6094. — P. 556–559.
6. **Carter J.A., Agol E.** The quasiperiodic automated transit search algorithm // The Astrophysical J. — 2013. — Vol. 765, № 2. — P. 132.
7. **Voskoboinikova G., Khairtdinov M.** Numerical modeling of posteriori algorithms for the geophysical monitoring // Communications in Computer and Information Science. — 2015. — Vol. 549. — P. 190–200.
8. Stepwards. — URL: https://www.stepwards.com/?page_id=24147.
9. **Zhang D., Zuo W., Wang P.** Computational Pulse Signal Analysis. — Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2018.
10. **Rajni R., Kaur I.** Electrocardiogram signal analysis — an overview // Int. J. Comput. Appl. — 2013. — Vol. 84, № 7. — P. 22–25.
11. https://www.comm.utoronto.ca/~biometrics/PPG_Dataset/index.html.
12. **Shelley K., Shelley S.** Pulse oximeter waveform: photoelectric plethysmography // Clinical monitoring: practical applications for anesthesia and critical care / C. Lake, R. Hines, C. Blitt — Philadelphia PA: W.B. Saunders Company, 2001. — P. 420–428.
13. **Elgendi M.** On the analysis of fingertip photoplethysmogram signals // Current Cardiology Reviews. — 2012. — Vol. 8, № 1. — P. 14–25.