

УДК 539.3

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Для материалов с линейной зависимостью между деформациями Альманси и напряжениями Коши устанавливаются представления напряжений через комплексные потенциалы, и на этой основе плоская статическая задача упругости сводится к краевой задаче для потенциалов. Полученные соотношения нелинейны относительно потенциалов; они обобщают известные формулы Колосова линейной упругости. Указано условие, при котором результаты линейной теории упругости следуют из рассмотренной нелинейной теории. Для приближенного решения нелинейной задачи для потенциалов предложен метод малого параметра, позволяющий сводить ее к последовательности однотипных линейных задач, в которой нулевое приближение совпадает с задачей линейной упругости. Метод демонстрируется на примере задачи о растяжении пластины с эллиптическим отверстием, для которой устанавливаются как точные, так и приближенные решения. Поведение напряжений на контуре отверстия в этих решениях иллюстрировано графиками.

1. При плоском деформировании упругого тела основу расчета на прочность составляет решение плоской задачи. В работе рассматривается плоская статическая задача в напряжениях в рамках нелинейной теории упругости при использовании в качестве мер деформаций и напряжений тензоров Альманси и Коши. Статическая задача нелинейной упругости в переменных актуального состояния описывается уравнениями равновесия и неразрывности, законом Мурнагана связи напряжений с деформациями и представлениями деформаций и их инвариантов через перемещения, а также краевыми (в частности, силовыми) условиями на поверхности тела [1, 2]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} P + \rho \mathbf{f} &= 0, & V &= \rho / \rho_0 = \sqrt{1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - 8\varepsilon_3}, \\ \varepsilon_1 &= \operatorname{tr} \varepsilon, & \varepsilon_2 &= (\operatorname{tr} \varepsilon)^2 - \operatorname{tr} \varepsilon^2, & \varepsilon_3 &= \det \varepsilon, & P &= V(G - 2\varepsilon) \cdot \frac{dF}{d\varepsilon}, \\ 2\varepsilon &= \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla - (\nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \nabla), & P \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{p} \quad \text{на } \Sigma. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{u} , \mathbf{n} , \mathbf{f} , \mathbf{p} — векторы перемещения, внешней нормали и плотностей массовых и поверхностных сил; G , P , ε — метрический тензор и тензоры напряжений (Коши) и деформаций (Альманси); ε_1 , ε_2 , ε_3 , F , ρ , ρ_0 , V — основные инварианты деформаций, плотность упругого потенциала, актуальная, исходная и относительная плотности вещества; Σ — поверхность деформированного тела. При плоском деформировании изотропного тела эти соотношения дают следующую плоскую задачу упругости в комплексных координатах актуального состояния $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ (x , y — декартовы координаты) [3–5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial P^{12}}{\partial \bar{z}} + \rho f^1 &= 0, & V &= \sqrt{1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2}, & \varepsilon_1 &= \varepsilon^{12}, & 4\varepsilon_2 &= (\varepsilon^{12})^2 - \varepsilon^{11} \varepsilon^{22}, \\ P^{11} &= \bar{P}^{22} = 2M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \varepsilon^{11}, & P^{12} &= P^{21} = 2N(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \varepsilon^{12}, \\ \varepsilon^{11} = \bar{\varepsilon}^{22} &= 2 \frac{\partial u^1}{\partial \bar{z}} \left(1 - \frac{\partial u^2}{\partial \bar{z}}\right), & 1 - \varepsilon^{12} &= \left(1 - \frac{\partial u^1}{\partial z}\right) \left(1 - \frac{\partial u^2}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial u^2}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$P^{12} \frac{dz}{ds} - P^{11} \frac{d\bar{z}}{ds} = 2ip^1(s) \quad \text{на } L,$$

где M, N — коэффициенты упругости; L — контур сечения тела плоскостью деформирования; s — дуговая координата точки контура.

В (1) используются контравариантные комплексные компоненты векторов и тензоров (снабженные верхними числовыми индексами), которые связаны с декартовыми компонентами тех же величин (отмеченными нижними буквенными индексами) формулами преобразования [4]

$$u^1 = \bar{u}^2 = u_x + iu_y, \quad P^{11} = \bar{P}^{22} = P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{xy}, \quad P^{12} = P_{xx} + P_{yy}; \quad (2)$$

закон Мурнагана записан в виде, аналогичном закону Гука, с тем, однако, существенным отличием, что в нем коэффициенты упругости являются функциями базисных инвариантов деформации и выражаются через упругий потенциал формулами

$$2M = -V \left(2 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2} \right), \quad 2\varepsilon_1 N = V \left[2(1 - \varepsilon_1) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} + (\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2} \right]. \quad (3)$$

Обращение этих формул дает выражения для градиентов потенциала

$$V^3 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = (\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2)M + \varepsilon_1 N, \quad V^3 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2} = -2(1 - \varepsilon_1)M - 2\varepsilon_1 N,$$

позволяющие получить дифференциальное условие на коэффициенты упругости

$$2 \frac{\partial[\varepsilon_1 N + (1 - \varepsilon_1)M]}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial[\varepsilon_1 N + (\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2)M]}{\partial \varepsilon_2} + 6M = 0. \quad (4)$$

2. Из системы (1) после исключения перемещений и деформаций можно получить уравнения для напряжений. Исключение перемещений из выражений для деформаций, их первых и вторых производных приводит к уравнению совместности деформаций [5]

$$4[(1 - \varepsilon^{12})^2 - |\varepsilon^{11}|^2] \operatorname{Re}(\varepsilon_{zz}^{11} - \varepsilon_{z\bar{z}}^{12}) = \\ = (1 - \varepsilon^{12})[|\varepsilon_{z\bar{z}}^{11}|^2 + |2\varepsilon_{z\bar{z}}^{12} - \varepsilon_z^{11}|^2 - 2|\varepsilon_z^{11}|^2] + 2\operatorname{Re}\{\varepsilon^{11}[\varepsilon_z^{22}(2\varepsilon_{z\bar{z}}^{12} - \varepsilon_z^{11}) - (\varepsilon_{z\bar{z}}^{22})^2]\}. \quad (5)$$

Для исключения деформаций перейдем вначале от $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ к другим инвариантам деформации J_1, J_2 , связанным с комплексными компонентами более простыми зависимостями $\varepsilon_1 = J_1, 4\varepsilon_2 = J_1^2 - J_2, J_1 = \varepsilon^{12}, J_2 = \varepsilon^{11}\varepsilon^{22}$. Тогда уравнение неразрывности и закон Мурнагана в (1), а также условие на коэффициенты упругости (4) примут вид

$$V = \sqrt{(1 - J_1)^2 - J_2}, \quad P^{11} = \bar{P}^{22} = 2M(J_1, J_2)\varepsilon^{11}, \quad P^{12} = 2N(J_1, J_2)\varepsilon^{12}, \\ \frac{\partial[J_1 N + (1 - J_1)M]}{\partial J_1} - 2 \frac{\partial[J_1(1 - J_1)N + J_2 M]}{\partial J_2} + 3M = 0. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение базисные инварианты напряжений I_1, I_2 той же структуры, что и инварианты деформации J_1, J_2 : $I_1 = P^{12}, I_2 = P^{11}P^{22}$. Полагаем выполненными условия

$$\frac{\partial(J_1, J_2)}{\partial(I_1, I_2)} \neq 0, \quad \frac{\partial(J_1, J_2)}{\partial(I_1, I_2)} \neq \infty, \quad (7)$$

обеспечивающие обратимость зависимостей пар инвариантов J_1, J_2 и I_1, I_2 . Тогда закон Мурнагана можно обратить и представить в форме

$$\varepsilon^{11} = \bar{\varepsilon}^{22} = 2R(I_1, I_2)P^{11}, \quad \varepsilon^{12} = 2T(I_1, I_2)P^{12} \quad (8)$$

(R, T — другая пара коэффициентов упругости). Из соотношений (6) и (8) следует, что коэффициенты упругости разных типов и инварианты напряжений и деформаций связаны между собой зависимостями

$$4MR = 1, \quad 4NT = 1, \quad I_1 = 2NJ_1, \quad I_2 = 4M^2J_2; \quad J_1 = 2TI_1, \quad J_2 = 4R^2I_2. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) позволяют исключить из уравнений (5) и (6) компоненты и инварианты деформаций и представить их через напряжения. Присоединив к ним уравнение равновесия и краевое условие из (1), получаем задачу в напряжениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial P^{12}}{\partial \bar{z}} + \rho_0 V f^1 = 0, \quad V = \sqrt{(1 - 2TP^{12})^2 - 4R^2P^{11}P^{22}}, \\ 2V^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2 RP^{11}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 TP^{12}}{\partial z \partial \bar{z}} \right] = (1 - 2TP^{12}) \left[\left| \frac{\partial RP^{11}}{\partial \bar{z}} \right|^2 + \left| 2 \frac{\partial TP^{12}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial RP^{11}}{\partial z} \right|^2 - 2 \left| \frac{\partial RP^{11}}{\partial z} \right|^2 \right] + \\ + 4 \operatorname{Re} \left\{ RP^{11} \left[\frac{\partial RP^{22}}{\partial z} \left(2 \frac{\partial TP^{12}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial RP^{11}}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial RP^{22}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (10) \\ P^{12} \frac{dz}{ds} - P^{11} \frac{d\bar{z}}{ds} = 2ip^1(s) \quad \text{на } L, \\ 2R^2 + (1 - 2I_1T) \left(2I_1 \frac{\partial T}{\partial I_2} - \frac{\partial R}{\partial I_1} \right) + 4I_2(T + R) \frac{\partial R}{\partial I_2} + 4I_1I_2 \left(\frac{\partial T}{\partial I_1} \frac{\partial R}{\partial I_2} - \frac{\partial T}{\partial I_2} \frac{\partial R}{\partial I_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим плоскую деформацию в отсутствие массовых сил применительно к материалам с линейной зависимостью между тензорами Альманси и Коши:

$$f^1 = 0, \quad R = \operatorname{const}, \quad T = \operatorname{const}. \quad (11)$$

При этом из условия (10) на коэффициенты упругости следует, что один из коэффициентов может быть произвольным, а другой должен обращаться в нуль:

$$R = 0, \quad T = \operatorname{const}. \quad (12)$$

Заметим, что в данном случае инварианты деформации являются зависимыми величинами: $J_1 = 2TI_1$, $J_2 = 0$, а условие (7) обратимости инвариантов нарушается. Из формул (9) следует, что коэффициенты M, N должны иметь значения

$$M = 1/(4R) = \infty, \quad N = 1/(4T) = \operatorname{const}. \quad (13)$$

Коэффициенты (13) выражаются через упругий потенциал $F(J_1, J_2)$ в соответствии с (3) по формулам

$$\begin{aligned} M = -V \frac{\partial F}{\partial J_1} + 2(1 - J_1)V \frac{\partial F}{\partial J_2}, \quad N = \frac{1 - J_1}{J_1} V \frac{\partial F}{\partial J_1} - \frac{2J_2}{J_1} V \frac{\partial F}{\partial J_2}, \\ V = \sqrt{(1 - J_1)^2 - J_2}. \end{aligned}$$

Второе соотношение можно рассматривать как дифференциальное уравнение для упругого потенциала, общее решение которого имеет вид

$$F(J_1, J_2) = \Theta \left(\frac{1 - J_1}{V} \right) + \frac{1}{4T} \left(1 + \frac{J_1}{V} + \frac{1 - J_1}{V} \ln V \right), \quad (14)$$

где Θ — произвольная функция. Потенциал (14) определяет класс материалов, для которых один из коэффициентов упругости постоянный, а другой переменный:

$$N = \frac{1}{4T} = \operatorname{const}, \quad M = \Theta' \left(\frac{1 - J_1}{V} \right) - \frac{1 - \ln V}{4T}. \quad (15)$$

Значения коэффициентов (13) можно рассматривать в качестве предельных значений коэффициентов (15) при условии $J_2 \rightarrow 0$, $|\Theta'((1 - J_1)/V)| = |\Theta'(1)| = \infty$, при этом предельное значение потенциала (14) имеет вид $F(J_1, 0) = \Theta(1) + (1/(4T))[1/(1 - J_1) - \ln(1/(1 - J_1))]$. Для конечности потенциала следует принять ограниченность величины $\Theta(1)$. Таким образом, материал, для которого деформации линейно зависят от напряжений, относится к классу материалов, для которых упругий потенциал имеет вид (14) и характеризуется условиями $J_2 \rightarrow 0$, $|\Theta| \rightarrow |\Theta(1)| < \infty$, $|\Theta'| \rightarrow |\Theta'(1)| = \infty$.

При условиях (11) и (12) плоская задача (10) упрощается и принимает вид [6]

$$\frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial P^{12}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad V = 1 - 2TP^{12}; \quad (16)$$

$$(1 - 2TP^{12}) \frac{\partial^2 2TP^{12}}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial 2TP^{12}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial 2TP^{12}}{\partial z} = 0; \quad (17)$$

$$P^{12} \frac{dz}{ds} - P^{11} \frac{d\bar{z}}{ds} = 2ip^1 \quad \text{на } L. \quad (18)$$

Уравнения задачи допускают полное интегрирование и представление напряжений через комплексные потенциалы, при этом краевое условие приводит к краевой задаче для потенциалов. Действительно, уравнение (17) представимо в виде нелинейного уравнения второго порядка для относительной плотности $V \partial^2 V / \partial z \partial \bar{z} - (\partial V / \partial \bar{z})(\partial V / \partial z) = 0$, общее решение которого выражается через произвольную функцию — комплексный потенциал $\sigma'(z)$ — в виде $V = \sigma'(z)\bar{\sigma}'(\bar{z})$. Таким образом, плотность ρ и напряжение P^{12} имеют выражения

$$\rho = \rho_0 \sigma'(z)\bar{\sigma}'(\bar{z}), \quad P^{12} = (1/(2T))[1 - \sigma'(z)\bar{\sigma}'(\bar{z})]. \quad (19)$$

С учетом (19) уравнение равновесия (16) определяет напряжение P^{11} в виде

$$P^{11} = (1/(2T))[\sigma(z)\bar{\sigma}''(\bar{z}) - \bar{\tau}'(\bar{z})], \quad (20)$$

где $\tau'(z)$ — произвольная функция (второй комплексный потенциал). Подставляя напряжения (19), (20) в условие (18) и интегрируя вдоль контура, получим краевую задачу для комплексных потенциалов

$$z - \sigma(z)\bar{\sigma}'(\bar{z}) + \bar{\tau}(\bar{z}) = 4T(g^1(s) + C) \quad \text{на } L, \quad g^1(s) = i \int_0^s p^1(s) ds, \quad C = \text{const}. \quad (21)$$

Таким образом, в рассматриваемом варианте нелинейной упругости напряжения и плотность выражаются через два комплексных потенциала по нелинейным формулам, при этом сами потенциалы должны определяться из нелинейного краевого условия.

Задачу в напряжениях (16)–(18) можно сформулировать также в терминах функции напряжений. Представим напряжения через вещественную функцию напряжений $U(z, \bar{z})$ по формулам

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -4 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}, \quad P^{12} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (22)$$

Тогда уравнение равновесия тождественно удовлетворится, а уравнение совместности напряжений и краевое условие будут представлять собой краевую задачу для функции напряжений

$$(1 - 2T\Delta U)\Delta\Delta U + 8T(\Delta U)_{\bar{z}}(\Delta U)_z = 0 \quad (\Delta U = 4U_{z\bar{z}}); \quad (23)$$

$$2U_{\bar{z}} = (2U_{\bar{z}})_0 + i \int_0^s p^1(s) ds. \quad (24)$$

Эта задача также сводится к задаче для потенциалов. Интегрируя уравнение (23), для функции напряжений получим нелинейное представление через потенциалы $\sigma(z)$, $\tau(z)$

$$2U = \frac{1}{4T} \left(z\bar{z} - \sigma(z)\bar{\sigma}(\bar{z}) + \int \tau(z) dz + \int \bar{\tau}(\bar{z}) d\bar{z} \right). \quad (25)$$

С учетом (25) формулы (22) принимают вид (19) и (20), а условие (24) становится краевым условием для потенциалов (21).

Для удобства сопоставления полученных результатов с результатами линейной упругости перейдем от $\sigma(z)$, $\tau(z)$ к другим комплексным потенциалам $\varphi(z)$, $\psi(z)$ по формулам

$$\sigma(z) = z - 4T\varphi(z), \quad \tau(z) = 4T\psi(z). \quad (26)$$

Тогда напряжения (19), (20), функция напряжений (25) и краевое условие (21) будут определяться выражениями

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -2[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) - 4T\varphi(z)\bar{\varphi}''(\bar{z})], \quad P^{12} = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) - 4T\varphi'(z)\bar{\varphi}'(\bar{z})],$$

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \int \psi(z) dz + \int \bar{\psi}(\bar{z}) d\bar{z} - 4T\varphi(z)\bar{\varphi}(\bar{z}), \quad (27)$$

$$\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) - 4T\varphi(z)\bar{\varphi}'(\bar{z}) = g^1(s) + C \quad \text{на } L.$$

Эти формулы являются обобщением формул Колосова линейной упругости [7, 8]:

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -2[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})], \quad P^{12} = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})], \quad (28)$$

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \int \psi(z) dz + \int \bar{\psi}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) = g^1(s) + C \quad \text{на } L,$$

отличаясь от них только нелинейными относительно потенциалов членами, содержащими множителем упругую постоянную материала. Установим условие, при котором (28) следуют из формул (27).

Пусть P_0 , L_0 — характерные напряжение и размер, $\alpha = 4TP_0$ — безразмерный параметр (характерное безразмерное напряжение). Представим рассматриваемые величины через соответствующие безразмерные величины, отмечаемые звездочкой: $P^{11} = P_0P_*^{11}$, $P^{12} = P_0P_*^{12}$, $U = P_0L_0^2U_*$, $z = L_0z_*$, $\varphi = P_0L_0\varphi_*$, $\psi = P_0L_0\psi_*$, $g^1 = P_0L_0g_*^1$, $C = P_0L_0C_*$, и внесем их в соотношения (27); в результате получим

$$P_*^{11} = \bar{P}_*^{22} = -2[z_*\bar{\varphi}_*'' + \bar{\psi}_*'] + 2\alpha\varphi_*\bar{\varphi}_*'', \quad P_*^{12} = 2[\varphi_*' + \bar{\varphi}_*'] - 2\alpha\varphi_*'\bar{\varphi}_*',$$

$$2U_* = \bar{z}_*\varphi_* + z_*\bar{\varphi}_* + \int \psi_* dz_* + \int \bar{\psi}_* d\bar{z}_* - \alpha\varphi_*\bar{\varphi}_*, \quad (29)$$

$$\varphi_* + z_*\bar{\varphi}_* + \bar{\psi}_* - \alpha\varphi_*\bar{\varphi}_* = g_*^1 + C_*.$$

Полагая, что все безразмерные величины в замкнутой плоской области имеют конечные модули, а безразмерный параметр является малой по сравнению с единицей величиной ($\alpha \approx 0$), можем пренебречь в (29) малыми (содержащими параметр) членами по сравнению с членами конечной величины; тогда формулы (29) (после возвращения к размерным величинам) будут совпадать с формулами линейной упругости (28). Таким образом, для упругих материалов с линейной зависимостью деформаций от напряжений формулы линейной упругости следуют из нелинейных формул при малом характерном безразмерном напряжении ($\alpha \ll 1$).

4. Краевая задача для потенциалов в односвязной (конечной или бесконечной) плоской области S (с границей L) с помощью конформного отображения может быть сведена к краевой задаче для единичного круга K (с окружностью γ) или для внешности круга. Пусть конформное отображение реализуется функцией $z = w(\zeta)$, $w'(\zeta) \neq 0$,

$\zeta = r \exp(i\theta) \in K$, тогда комплексные потенциалы получают выражение $\varphi(z) = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(z) = \varphi'(\zeta)/w'(\zeta) = \Phi(\zeta)$, $\psi(z) = \psi(\zeta)$, $\psi'(z) = \psi'(\zeta)/w'(\zeta) = \Psi(\zeta)$, а напряжения (27) принимают вид зависимостей

$$\begin{aligned} P^{11} &= \bar{P}^{22} = -(2/\bar{w}'(\bar{\zeta})) [(w(\zeta) - 4T\varphi(\zeta))\bar{\Phi}'(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}'(\bar{\zeta})], \\ P^{12} &= 2[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) - 4T\Phi(\zeta)\bar{\Phi}(\bar{\zeta})]. \end{aligned} \quad (30)$$

Полярным координатам r, θ в плоскости круга в силу отображения отвечают ортогональные криволинейные координаты в физической плоскости. Компоненты напряжений $P_{rr}, P_{r\theta}, P_{\theta\theta}$ в этих координатах связаны с комплексными компонентами формулами [1, 2]

$$P_{rr} - P_{\theta\theta} + 2iP_{r\theta} = (\bar{\zeta}/\zeta)(\bar{w}'(\bar{\zeta})/w'(\zeta))P^{11}, \quad P_{rr} + P_{\theta\theta} = P^{12}. \quad (31)$$

Что касается краевого условия в (27) (где в данном случае допустимо принять $C = 0$), то оно становится краевым условием для единичного круга:

$$\varphi(\zeta) + (w(\zeta) - 4T\varphi(\zeta))\bar{\varphi}'(\bar{\zeta})/\bar{w}'(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}(\bar{\zeta}) = g^1, \quad \zeta \in \gamma. \quad (32)$$

Решение этой задачи определяет комплексные напряжения (30) и тем самым вещественные напряжения (2) или (31).

Нелинейную краевую задачу (32) можно решать приближенно, применяя метод малого параметра. Представляя множитель $4T$ в виде $4T = \alpha/P_0$ и полагая α малым (по сравнению с единицей) параметром, будем искать комплексные потенциалы в виде рядов по этому параметру:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} \varphi_{\nu}(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} \psi_{\nu}(\zeta) \quad (33)$$

($\varphi_{\nu}, \psi_{\nu}$ — составляющие потенциалы). Тогда в силу (30) и (31) аналогичными разложениями будут представляться и напряжения:

$$\begin{aligned} P^{11} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} P_{\nu}^{11}, & P^{22} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} P_{\nu}^{22}, & P^{12} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} P_{\nu}^{12}, \\ P_{rr} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} P_{rr}^{\nu}, & P_{r\theta} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} P_{r\theta}^{\nu}, & P_{\theta\theta} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} P_{\theta\theta}^{\nu}, \end{aligned} \quad (34)$$

где составляющие напряжения выражаются через составляющие потенциалы по формулам

$$\begin{aligned} P_{\nu}^{11} &= \bar{P}_{\nu}^{22} = -(2/\bar{w}') [w\bar{\Phi}'_{\nu} + \bar{\psi}'_{\nu} - P_0^{-1}(\varphi\bar{\Phi}')_{\nu-1}], & P_{\nu}^{12} &= 2[\Phi_{\nu} + \bar{\Phi}_{\nu} - P_0^{-1}(\Phi\bar{\Phi})_{\nu-1}], \\ \Phi_{\nu} &= \frac{\varphi'_{\nu}}{w'}, & (\varphi\bar{\Phi}')_{\nu-1} &= \sum_{k=0}^{\nu-1} \varphi_k \bar{\Phi}'_{\nu-1-k}, & (\Phi\bar{\Phi})_{\nu-1} &= \sum_{k=0}^{\nu-1} \Phi_k \bar{\Phi}_{\nu-1-k}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$P_{rr}^{\nu} + P_{\theta\theta}^{\nu} = P_{\nu}^{12}, \quad P_{rr}^{\nu} - P_{\theta\theta}^{\nu} + 2iP_{r\theta}^{\nu} = (\bar{\zeta}/\zeta)(\bar{w}'/w')P_{\nu}^{11}.$$

Определим n -е приближение напряжений (34) конечными суммами (порядок приближения определяется требуемой точностью решения)

$$\begin{aligned} P_{(n)}^{11} &= \sum_{\nu=0}^n \alpha^{\nu} P_{\nu}^{11}, & P_{(n)}^{22} &= \sum_{\nu=0}^n \alpha^{\nu} P_{\nu}^{22}, & P_{(n)}^{12} &= \sum_{\nu=0}^n \alpha^{\nu} P_{\nu}^{12}, \\ P_{rr}^{(n)} &= \sum_{\nu=0}^n \alpha^{\nu} P_{rr}^{\nu}, & P_{r\theta}^{(n)} &= \sum_{\nu=0}^n \alpha^{\nu} P_{r\theta}^{\nu}, & P_{\theta\theta}^{(n)} &= \sum_{\nu=0}^n \alpha^{\nu} P_{\theta\theta}^{\nu}. \end{aligned} \quad (36)$$

Для нахождения составляющих потенциалов внесем ряды (33) в условие (32). Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях параметра в разных частях равенства приводит к последовательности однотипных линейных задач для потенциалов φ_ν, ψ_ν

$$\begin{aligned} \varphi_\nu + (w/\bar{w}')\bar{\varphi}'_\nu + \bar{\psi}_\nu &= g^1\delta_{\nu 0} + (1/(P_0\bar{w}'))(\varphi\bar{\varphi}')_{\nu-1} \quad \text{на } \gamma, \\ (\varphi\bar{\varphi}')_{\nu-1} &= \sum_{k=0}^{\nu-1} \varphi_k\bar{\varphi}'_{\nu-1-k} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (37)$$

в которой первая задача ($\nu = 0$) совпадает с задачей линейной упругости, а в каждой из последующих задач правая часть краевого условия вычисляется по решениям всех предыдущих.

5. В рамках нелинейной модели рассмотрим задачу о растяжении пластины с отверстием. Пусть неограниченная пластина с отверстием, имеющим в деформированном состоянии форму эллипса с полуосями a и b ($a > b$), под действием всестороннего растяжения на бесконечности напряжением P_0 и в отсутствие нагрузок на контуре отверстия находится в равновесии. Найдем поле напряжений в пластине и исследуем его свойства.

Совместим декартовы оси с осями эллипса, направив ось абсцисс вдоль его большой оси. Тогда уравнение эллипса (контур L) запишется в виде $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Конформное отображение внешности эллипса в плоскости z на внешность единичного круга в плоскости ζ определяется преобразованием

$$\begin{aligned} z = x + iy = w(\zeta) &= n(\zeta + m/\zeta), \quad \zeta = r \exp(i\theta) \in K, \\ 0 < n = (a + b)/2 < \infty, \quad 0 < m = (a - b)/(a + b) < 1, \end{aligned} \quad (38)$$

в котором параметр m определяет форму отверстия, а параметр n — его размеры (при $m \rightarrow 0$ эллипс вырождается в окружность, а при $m \rightarrow 1$ — в прямолинейную щель). Следовательно, связь между декартовыми и криволинейными координатами в плоскости z дается формулами $x = n(r + m/r) \cos \theta$, $y = n(r - m/r) \sin \theta$. В данном случае криволинейные координаты r, θ — эллиптические: кривые $r = \text{const}$ соответствуют эллипсам, а кривые $\theta = \text{const}$ — гиперболам (граничному эллипсу отвечает $r = 1$):

$$\frac{x^2}{(r + m/r)^2} + \frac{y^2}{(r - m/r)^2} = n^2, \quad \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 4mn^2.$$

Краевые условия на контуре отверстия и бесконечности в вещественной и комплексной формах имеют вид

$$p_x = p_y = 0; \quad p^1 = p_x + ip_y = 0, \quad g^1 = i \int_0^s p^1 ds = 0 \quad \text{при } r = 1; \quad (39)$$

$$P_{xx}^\infty = P_{yy}^\infty = P_0, \quad P_{xy}^\infty = 0; \quad P_\infty^{11} = \bar{P}_\infty^{22} = 0, \quad P_\infty^{12} = 2P_0 \quad \text{при } r = \infty. \quad (40)$$

В силу (39) условие для потенциалов (21) (где можно положить $C = 0$) становится однородным; после конформного преобразования (38) оно принимает вид

$$\bar{w}(\bar{\zeta}) - \bar{\sigma}(\bar{\zeta})\chi(\zeta) + \tau(\zeta) = 0, \quad \chi(\zeta) = \sigma'(\zeta)/w'(\zeta), \quad \zeta \in \gamma.$$

С помощью аналитического продолжения представим это условие в виде функционального уравнения во внешности круга K

$$\bar{w}(1/\zeta) - \bar{\sigma}(1/\zeta)\chi(\zeta) + \tau(\zeta) = 0, \quad \zeta \in K. \quad (41)$$

Функцию $\sigma(\zeta)$ будем искать в форме, аналогичной отображению (38) и содержащей два свободных вещественных параметра c и d , тогда функция $\tau(\zeta)$ определится уравнением (41). В итоге потенциалы будут иметь вид

$$\sigma(\zeta) = n \left(c\zeta + \frac{md}{\zeta} \right), \quad \tau(\zeta) = n \left(\frac{c + md\zeta^2}{\zeta} \frac{c\zeta^2 - md}{\zeta^2 - m} - \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta} \right). \quad (42)$$

Потенциалам (42) отвечают следующие выражения для напряжений (19) и (20) (преобразованные отображением (38)):

$$P^{12} = \frac{1}{2T} \left(1 - \frac{c\zeta^2 - md}{\zeta^2 - m} \frac{c\bar{\zeta}^2 - md}{\bar{\zeta}^2 - m} \right),$$

$$P^{11} = \frac{\zeta^2}{2T(\bar{\zeta}^2 - m)} \left(\frac{2m(d-c)(\zeta\bar{\zeta} - 1)}{(\bar{\zeta}^2 - m)^2} \frac{c\zeta - md\bar{\zeta}}{\zeta} + \frac{c - md\bar{\zeta}^2}{\bar{\zeta}^2} \frac{c\bar{\zeta}^2 - md}{\bar{\zeta}^2 - m} + \frac{m\bar{\zeta}^2 - 1}{\bar{\zeta}^2} \right). \quad (43)$$

В бесконечно удаленной точке пластины напряжения имеют значения $P_{\infty}^{12} = (1 - c^2)/(2T)$, $P_{\infty}^{11} = (m/(2T))(1 - cd)$. Следовательно, условиям на бесконечности (40) можно удовлетворить, полагая

$$d = 1/c, \quad c^2 = 1 - 4TP_0. \quad (44)$$

Согласно формулам (31), (38), (43) и (44) (где положено $\zeta = r \exp(i\theta)$, $\bar{\zeta} = r \exp(-i\theta)$) эллиптические компоненты напряжений можно записать в виде

$$P_{rr} = \frac{P_0}{c^2 E^2} (r^2 - 1)(r^4 - m^2)(c^2 r^2 - m^2), \quad P_{r\theta} = \frac{P_0}{c^2 E^2} 2mr^2(r^2 - 1)(c^2 r^2 - m^2) \sin 2\theta,$$

$$P_{\theta\theta} = \frac{P_0}{c^2 E^2} [2(c^2 r^4 - m^2)E - (r^2 - 1)(r^4 - m^2)(c^2 r^2 - m^2)], \quad (45)$$

$$E = r^4 + m^2 - 2mr^2 \cos 2\theta.$$

Формулы (45) определяют точное решение задачи. Таким образом, распределение напряжений в пластине с отверстием зависит от растягивающего усилия, упругой постоянной материала и формы отверстия и не зависит от размеров отверстия. Из выражения (44) для c^2 следует, что найденное решение сохраняет силу только для приложенного усилия, для которого $P_0 < 1/(4T)$. На контуре отверстия L ($r = 1$) напряжения имеют значения

$$P_{rr}^L = P_{r\theta}^L = 0, \quad P_{\theta\theta}^L = \frac{2P_0}{c^2} \frac{c^2 - m^2}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}. \quad (46)$$

Примем для определенности, что $P_0 > 0$, тогда с учетом определения параметров и ограничения на растяжение получим $0 < P_0 < 1/(4T)$, $0 < c^2 < 1$, $0 < m^2 < 1$. Из (46) в силу неравенства $1 + m^2 - 2m \cos 2\theta \geq (1 - m)^2 > 0$ следует, что знак напряжения $P_{\theta\theta}^L$ определяется знаком разности $c^2 - m^2$. Рассмотрим различные случаи.

При слабом растяжении, когда $P_0 < (1 - m^2)/(4T)$ ($c^2 > m^2$), будем иметь $P_{\theta\theta}^L > 0$, т. е. контур отверстия растянут, причем

$$P_+ = (P_{\theta\theta}^L)_{\max} = \frac{2P_0}{c^2} \frac{c^2 - m^2}{(1 - m)^2} \quad \text{при } 2\theta = 0; 2\pi,$$

$$P_- = (P_{\theta\theta}^L)_{\min} = \frac{2P_0}{c^2} \frac{c^2 - m^2}{(1 + m)^2} \quad \text{при } 2\theta = \pi; 3\pi$$

($2\theta = 0; 2\pi$ отвечают точкам эллипса на большой оси, а $2\theta = \pi; 3\pi$ — точкам на малой оси). В случае $c^2 > m^2$ для $0 < \alpha = 4TP_0 < 1$ можно принять $c^2 = 1 - \alpha$, $m^2 = 1 - \sqrt{\alpha}$. Тогда

$$c^2 = m^2(2 - m^2), \quad P_+ = \frac{4P_0}{2 - m^2} \frac{1 + m}{1 - m}, \quad P_- = \frac{4P_0}{2 - m^2} \frac{1 - m}{1 + m}.$$

Отсюда следует, что в предельном случае кругового отверстия $m \rightarrow 0$, $P_+ \rightarrow 2P_0$, $P_- \rightarrow 2P_0$, т. е. на граничной окружности растягивающее усилие постоянно и вдвое превышает приложенное. В предельном случае прямолинейной щели получаем $m \rightarrow 1$, $P_+ \rightarrow \infty$, $P_- \rightarrow 0$, т. е. в концах щели растягивающее усилие неограниченно велико, а в серединах ее берегов оно отсутствует.

При нейтральном растяжении, когда $P_0 = (1 - m^2)/(4T)$ ($c^2 = m^2$), будем иметь $P_{\theta\theta}^L = 0$, т. е. контур отверстия нейтрален. Таким образом, существует растягивающее усилие (зависящее от свойств материала и формы отверстия), при котором контур отверстия не подвержен растяжению-сжатию. В предельных случаях получим $m \rightarrow 0$, $P_0 \rightarrow 1/(4T)$; $m \rightarrow 1$, $P_0 \rightarrow 0$, т. е. в случае окружности это усилие совпадает с максимальным растяжением, а в случае щели — с минимальным.

Наконец, при сильном растяжении, когда $P_0 > (1 - m^2)/(4T)$ ($c^2 < m^2$), имеем $P_{\theta\theta}^L < 0$, т. е. контур отверстия сжат, причем

$$P_- = -\frac{2P_0}{c^2} \frac{m^2 - c^2}{(1 - m)^2} \quad \text{при } 2\theta = 0; 2\pi, \quad P_+ = -\frac{2P_0}{c^2} \frac{m^2 - c^2}{(1 + m)^2} \quad \text{при } 2\theta = \pi; 3\pi.$$

В случае $c^2 < m^2$ для $0 < \alpha = 4TP_0 < 1$ можно положить $c^2 = 1 - \alpha$, $m^2 = 1 - \alpha^2$. Тогда

$$c^2 = 1 - \sqrt{1 - m^2}, \quad P_- = -\frac{2P_0}{(1 - m)^2} \sqrt{1 - m^2}, \quad P_+ = -\frac{2P_0}{(1 + m)^2} \sqrt{1 - m^2}.$$

Отсюда ясно, что в предельном случае кругового отверстия $P_- \rightarrow -2P_0$, $P_+ \rightarrow -2P_0$ при $m \rightarrow 0$, т. е. на окружности сжимающее усилие постоянно и вдвое превышает приложенное. В случае щели получим $P_- \rightarrow -\infty$, $P_+ \rightarrow 0$ при $m \rightarrow 1$, т. е. в концах щели сжимающее усилие неограниченно велико, а в серединах ее берегов оно отсутствует.

Из формул (45) также следует, что при $r^* = m/c$ напряжения можно записать в виде, аналогичном контурным напряжениям (46):

$$P_{rr}^* = P_{r\theta}^* = 0, \quad P_{\theta\theta}^* = -\frac{2P_0(c^2 - m^2)}{c^4 + m^2 - 2mc^2 \cos 2\theta},$$

$$c^4 + m^2 - 2mc^2 \cos 2\theta \geq (c^2 - m)^2 > 0.$$

Таким образом, существует эллиптический контур L^* , софокусный граничному эллипсу L , который подобно последнему подвержен только растяжению-сжатию. При этом знак напряжения $P_{\theta\theta}^*$ противоположен знаку $P_{\theta\theta}^L$. Контур L^* реализуется в пластине только при сильном растяжении, когда он растянут и охватывает сжатый контур L : $c^2 < m^2$, $r^* > 1$ (при нейтральном растяжении он совпадает с контуром отверстия, а при слабом находится внутри отверстия).

6. В условиях, когда приложенной нагрузке отвечает малая по сравнению с единицей величина $\alpha = 4TP_0$, для рассмотренной задачи установим приближенные решения, пользуясь методом малого параметра.

Для составляющих потенциалов нулевого порядка краевая задача (37) (при $\nu = 0$) совпадает с задачей линейной упругости

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta^2 + m)/(\zeta(1 - m\zeta^2))\bar{\varphi}'_0(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}_0(\bar{\zeta}) = 0, \quad \zeta \in \gamma.$$

Ее решение и отвечающие ему напряжения известны [1]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= (nP_0/2)(\zeta - m/\zeta), & \psi_0(\zeta) &= -nP_0(1 + m^2)\zeta/(\zeta^2 - m), \\ P_{rr}^0 &= (P_0/E^2)(r^2 - 1)(r^4 - m^2)(r^2 - m^2), \\ P_{r\theta}^0 &= (P_0/E^2)2mr^2(r^2 - 1)(r^2 - m^2) \sin 2\theta, \\ P_{\theta\theta}^0 &= (P_0/E^2)(r^4 - m^2)[2E - (r^2 - 1)(r^2 - m^2)]. \end{aligned} \quad (47)$$

Эти результаты следуют также из нелинейных формул (26), (42) и (45) при $c \approx 1$ и отвечают случаю слабого растяжения.

Составляющие потенциалы первого порядка определяются из задачи (37) ($\nu = 1$):

$$\varphi_1(\zeta) + \frac{\zeta^2 + m}{\zeta(1 - m\zeta^2)} \bar{\varphi}'_1(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}_1(\bar{\zeta}) = \frac{nP_0}{4} \frac{\zeta^2 - m}{\zeta} \frac{1 + m\zeta^2}{1 - m\zeta^2}, \quad \zeta \in \gamma.$$

Методом функциональных уравнений [8] можно установить, что эти потенциалы и отвечающие им напряжения равны

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= (nP_0/8)(\zeta - 3m/\zeta), & \psi_1(\zeta) &= -nP_0m^2\zeta/(\zeta^2 - m), \\ P_{rr}^1 &= -(P_0/E^2)m^2(r^2 - 1)(r^4 - m^2), & P_{r\theta}^1 &= -(P_0/E^2)2m^3r^2(r^2 - 1)\sin 2\theta, \\ P_{\theta\theta}^1 &= -(P_0/E^2)m^2[2E - (r^2 - 1)(r^4 - m^2)]. \end{aligned} \quad (48)$$

Наконец, составляющие потенциалы второго порядка находятся из задачи (37) при $\nu = 2$:

$$\varphi_2(\zeta) + \frac{\zeta^2 + m}{\zeta(1 - m\zeta^2)} \bar{\varphi}'_2(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}_2(\bar{\zeta}) = \frac{nP_0}{8} \frac{2m(\zeta^4 - 1) + (1 - 3m^2)\zeta^2}{\zeta(1 - m\zeta^2)}, \quad \zeta \in \gamma.$$

Тем же методом устанавливаем, что данные потенциалы и соответствующие им напряжения имеют значения

$$\begin{aligned} \varphi_2(\zeta) &= (nP_0/8)(\zeta - 3m/\zeta), & \psi_2(\zeta) &= -(nP_0/8)(1 + 9m^2)\zeta/(\zeta^2 - m), \\ P_{rr}^2 &= (P_0/(8E^2))(r^2 - 1)(r^4 - m^2)(r^2 - 9m^2), \\ P_{r\theta}^2 &= (P_0/(8E^2))2mr^2(r^2 - 1)(r^2 - 9m^2)\sin 2\theta, \\ P_{\theta\theta}^2 &= (P_0/(8E^2))[2E(r^4 - 9m^2) - (r^2 - 1)(r^4 - m^2)(r^2 - 9m^2)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Таким образом, согласно (35) и (36) в нулевом приближении напряжения определяются формулами (47):

$$\begin{aligned} P_{rr}^{(0)} &= P_{rr}^0 = (P_0/E^2)(r^2 - 1)(r^4 - m^2)(r^2 - m^2), \\ P_{r\theta}^{(0)} &= P_{r\theta}^0 = (P_0/E^2)2mr^2(r^2 - 1)(r^2 - m^2)\sin 2\theta, \\ P_{\theta\theta}^{(0)} &= P_{\theta\theta}^0 = (P_0/E^2)[2E(r^4 - m^2) - (r^2 - 1)(r^4 - m^2)(r^2 - m^2)], \end{aligned} \quad (50)$$

в первом приближении — формулами (47) и (48):

$$\begin{aligned} P_{rr}^{(1)} &= P_{rr}^0 + \alpha P_{rr}^1 = (P_0/E^2)(r^2 - 1)(r^4 - m^2)[r^2 - m^2(1 + \alpha)], \\ P_{r\theta}^{(1)} &= P_{r\theta}^0 + \alpha P_{r\theta}^1 = (P_0/E^2)2mr^2(r^2 - 1)[r^2 - m^2(1 + \alpha)]\sin 2\theta, \end{aligned} \quad (51)$$

$$P_{\theta\theta}^{(1)} = P_{\theta\theta}^0 + \alpha P_{\theta\theta}^1 = (P_0/E^2)\{2E[r^4 - m^2(1 + \alpha)] - (r^2 - 1)(r^4 - m^2)[r^2 - m^2(1 + \alpha)]\},$$

а во втором приближении — формулами (47)–(49):

$$\begin{aligned} P_{rr}^{(2)} &= P_{rr}^0 + \alpha P_{rr}^1 + \alpha^2 P_{rr}^2 = (P_0/E^2)(r^2 - 1)(r^4 - m^2)[r^2(1 + \alpha^2/8) - m^2(1 + \alpha + (9/8)\alpha^2)], \\ P_{r\theta}^{(2)} &= P_{r\theta}^0 + \alpha P_{r\theta}^1 + \alpha^2 P_{r\theta}^2 = (P_0/E^2)2mr^2(r^2 - 1)[r^2(1 + \alpha^2/8) - m^2(1 + \alpha + (9/8)\alpha^2)]\sin 2\theta, \\ P_{\theta\theta}^{(2)} &= P_{\theta\theta}^0 + \alpha P_{\theta\theta}^1 + \alpha^2 P_{\theta\theta}^2 = (P_0/E^2)\{2E[r^4(1 + \alpha^2/8) - m^2(1 + \alpha + (9/8)\alpha^2)] - \\ &\quad - (r^2 - 1)(r^4 - m^2)[r^2(1 + \alpha^2/8) - m^2(1 + \alpha + (9/8)\alpha^2)]\}. \end{aligned} \quad (52)$$

На контуре отверстия ($r = 1$) ненулевые напряжения в приближенных решениях (50)–(52) имеют значения

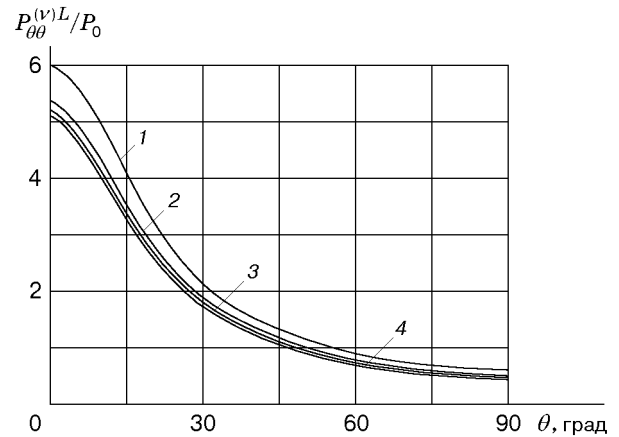
$$\begin{aligned} P_{\theta\theta}^{(0)L} &= (2P_0/E_1)(1 - m^2), & P_{\theta\theta}^{(1)L} &= (2P_0/E_1)[1 - m^2(1 + \alpha)], \\ P_{\theta\theta}^{(2)L} &= (2P_0/E_1)[1 + \alpha^2/8 - m^2(1 + \alpha + (9/8)\alpha^2)], \\ E_1 &= 1 + m^2 - 2m \cos 2\theta & (E_1 \geq (1 - m)^2 > 0). \end{aligned} \quad (53)$$

Из (46) и (53) следуют соотношения

$$\begin{aligned} P_{\theta\theta}^{(0)L} - P_{\theta\theta}^{(1)L} &= (P_0/E_1)2m\alpha, & P_{\theta\theta}^{(1)L} - P_{\theta\theta}^{(2)L} &= (P_0/(4E_1))(9m^2 - 1)\alpha^2, \\ P_{\theta\theta}^{(0)L} - P_{\theta\theta}^L &= (P_0/(c^2 E_1))2m^2\alpha, & P_{\theta\theta}^{(1)L} - P_{\theta\theta}^L &= (P_0/(c^2 E_1))2m^2\alpha^2, \\ P_{\theta\theta}^{(2)L} - P_{\theta\theta}^L &= (P_0/(4c^2 E_1))\alpha^2(c^2 - m^2 + 9m^2\alpha), \end{aligned}$$

показывающие, что при слабом растяжении ($c^2 > m^2$) пластины с вытянутым отверстием ($m > 1/3$) приближенные напряжения в каждой точке границы убывают с ростом порядка приближения, оставаясь больше точных напряжений.

Поведение контурных напряжений $P_{\theta\theta}^{(0)L}/P_0$, $P_{\theta\theta}^{(1)L}/P_0$, $P_{\theta\theta}^{(2)L}/P_0$, $P_{\theta\theta}^L/P_0$ при слабом растяжении в приближенных и точном решениях, отвечающих значениям параметров $a/b = 3$, $m = 0,5$, $\alpha = 0,3$, $c^2 = 0,7$, показано на рисунке (кривые 1–4). Видно, что учет нелинейности приводит к уменьшению контурных напряжений по сравнению с решением линейной теории. Величина уменьшения зависит от приложенной нагрузки, свойств материала и формы отверстия; она наибольшая в области максимальных напряжений (в точках большой кривизны контура) и наименьшая в области минимальных (в точках малой кривизны контура). Поведение графиков напряжений свидетельствует также о сходимости приближенных решений к точному решению.



ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
2. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.
3. Murnaghan F. D. Finite deformations of an elastic solid. N. Y.: J. Wiley; Chapman, 1951.
4. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1968.
5. Бондарь В. Д. О плоской статической задаче нелинейной упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1970. Вып. 6. С. 7–18.
6. Бондарь В. Д. Плоская задача нелинейной упругости при шаровом тензоре деформаций // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1975. Вып. 22. С. 175–187.
7. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ, 1935.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.