

УДК 621.926.086

## ЭНТРОПИЯ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ В РЕЖИМАХ СЕПАРАЦИИ

Е. М. Барский

*Иерусалимский колледж инженерного дела, E-mail: eugene@jce.ac.il,  
П. я. 3566, г. Иерусалим, 91035, Израиль*

Разработан новый подход к анализу двухфазных течений в режимах сепарации и обогащения полезных ископаемых. Он базируется на физической аналогии между этими течениями и кинетической теорией идеального газа. Анализ, проведенный с этих позиций, позволил сформулировать и обосновать инварианты для такого рода течений. Главным среди них является энтропия двухфазного течения. Производными от нее служат такие параметры, как потенциальное извлечение, хаотизирующий фактор и подвижность системы. Математическая модель, описывающая с позиций нового подхода двухфазное течение, позволяет применить к анализу данного течения методы статистической механики.

*Сепарация, инвариантность, энтропия, скорость потока, обогащение полезных ископаемых, математическая модель*

### ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование двухфазных потоков используется для анализа различных физических задач, в том числе для описания процессов обогащения полезных ископаемых (см., например, [1, 2]). Известные автору такого рода модели имеют, как правило, конкретные приложения, хотя напрашивается необходимость разработки обобщающей модели для любых режимов двухфазных течений, позволяющей анализировать с единых позиций основные экспериментальные данные массообмена в такого рода потоках.

Известно, что поведение двухфазных потоков невозможно описать на основе современного аналитического подхода, базирующегося на постулатах классической динамики с ее строгим детерминизмом. Целесообразно применить для такого описания статистический метод [7].

Принципиальное отличие статистического подхода заключается в том, что в его основе лежит определение состояния сразу всей системы, а не единичных объектов, как это делается при применении классических методов. И хотя при этом приходится абстрагироваться от большого числа частных факторов, удастся прояснить общую картину процесса. Главный результат этого подхода составил понятие энтропии.

Л. Больцман ввел следующее определение энтропии [3]:

$$H = k \ln \varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — число микросостояний системы, соответствующее тому макросостоянию, энтропия которого равна  $H$ ;  $k$  — число Больцмана.

В последние годы интерес к статистической теории резко возрос в двух направлениях.

С одной стороны, появилось большое число фундаментальных работ, расширяющих и углубляющих теорию Больцмана. С другой стороны, основные идеи этой теории довольно успешно используются в других отраслях знаний, в таких системах, как твердое тело, ядерная материя, магнетизм, квантовая оптика, полимеризация и др. Эти модели хорошо описывают многие необратимые процессы, например теплопроводность, диффузию и электролиз. Они дают возможность проанализировать с этих позиций двухфазное течение с полифракционной твердой фазой в режиме обогащения или сепарации. Главные трудности, возникающие при этом, имеют три основных аспекта.

Во-первых, в статистической механике газовые системы рассматриваются в ограниченном объеме. Причем все возможные направления движения частиц считаются равновероятными. В двухфазном потоке нет закрытых объемов, а результирующее движение частиц имеет преимущественное направление.

Во-вторых, основополагающим параметром газовой системы является температура. В двухфазном течении температура среды не определяет основные параметры процесса и не играет какой-то заметной роли.

В-третьих, здесь придется отказаться от общепринятых параметров (температура, теплоемкость, работа и т. д.) и ввести новые параметры (вероятность направления движения, потенциальное извлечение, хаотизирующий фактор, подвижность твердой фазы и т. д.).

Вместе с тем следует отметить, что при рассмотрении движения частиц в двухфазном потоке нами использованы основные идеи и методы теории идеального газа, так как между этими процессами просматривается достаточно глубокая физическая аналогия.

### 1. РАССЛАИВАНИЕ — ОДНА ИЗ МОДЕЛЕЙ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ

В идеализированных условиях невозмущенного и неструктурированного потока скорость частицы приобретет значение

$$v = w - w_0, \quad (2)$$

где  $v$  — скорость твердой частицы относительно стенок вертикальной трубы;  $w$  — скорость потока;  $w_0$  — скорость витания частицы.

Если поместить в реальный поток полифракционную смесь частиц, то их движение, кроме соотношения (2), будет зависеть от возмущений, определяемых случайными факторами процесса (турбулентность, неравномерность концентраций и скоростей частиц, столкновения их между собой и со стенками, ограждающими поток, их неправильная форма и многое другое).

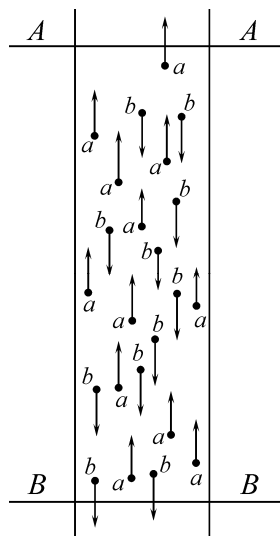
Представим, что мы помещаем в вертикальный восходящий поток полифракционную смесь с небольшой концентрацией. Мелкие и легкие частицы приобретут наибольшую скорость, более крупные — меньшую. При отсутствии возмущений вся смесь частиц по истечении некоторого промежутка времени начала бы двигаться с различными, соответствующими каждому классу крупности, скоростями, что привело бы к расслаиванию частиц в потоке. Возмущения и случайные факторы препятствуют этому. В то же время понятно, что при достаточной длине канала каждый класс крупности, несмотря на возмущения, получает распределение скоростей, математическое ожидание которого выражается соотношением (2) или близко к нему. Это происходит потому, что при таких скоростях система частиц приобретает энергетическое равновесие с потоком. В этом плане можно говорить не о расслаивании в геометрическом аспекте относительно стенок канала, а о расслаивании полифракционной смеси по скоростям движения

частиц в потоке в зависимости от их гидродинамической характеристики. Наиболее интересно это явление исследовать в режиме, когда часть твердой фазы движется с потоком среды вверх, а часть выпадает вниз, против течения потока [4].

В таком течении самые мелкие частицы поднимаются с потоком, самые крупные — выпадают против течения, а частицы промежуточных классов делятся в некоторой пропорции между этими двумя выходами. Данное явление наблюдается, например, при элементарной сепарации сыпучих материалов в вертикальном канале. Для построения модели двухфазного течения рассмотрим поведение в потоке классов такой крупности, частицы которых попадают в оба выхода.

## 2. ОБОСНОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Вначале рассмотрим частицы с одинаковыми аэродинамическими характеристиками, двигающиеся в оба направления в восходящем потоке через ограниченный по высоте объем канала (рисунок). Чтобы не быть завязанным на учет размера частиц и их формы, упростим систему. Пусть система состоит из частиц сферической формы одинакового размера. При этом оставим без внимания истинную скорость частиц, а рассмотрим для каждой из них проекцию скорости на вертикальную ось. При этом проекции могут быть ориентированы лишь двумя способами: вверх или вниз. Отметим, что вероятность этой ориентации для каждой частицы не зависит от ориентации остальных. Упростим систему еще больше, оставив без внимания величину проекции. Нас интересует лишь направление проекции. Введем условные обозначения для направлений: вверх —  $a$ , вниз —  $b$  (отметим, что  $a$  и  $b$  не обязательно числа, а просто символы).



Модель движения частиц в режиме критического течения

Под системой будем понимать общую совокупность направлений скоростей движения всех частиц через пространство, ограниченное плоскостями  $A$  и  $B$ . При этом воспользуемся только одним понятием статистической механики — стационарным состоянием системы. Это понятие означает, что вероятность обнаружить частицу в любом элементе объема не зависит явно от времени. Следовательно, стационарные состояния рассматриваемых нами систем можно переисчислять, хотя их число может быть большим.

Как известно, со статистической точки зрения количество состояний определяется возможным числом распределений частиц в системе.

### 3. ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Предположим, что система состоит из одинаковых частиц. Ясно, что в режиме, обеспечивающем их распределение в оба выхода, система, состоящая из одной такой частицы, обладает двумя разными стационарными состояниями: одним со скоростью, направленной вверх, —  $a$ , а другим со скоростью, направленной вниз, —  $b$ . Система из двух частиц будет обладать четырьмя состояниями ( $aa$ ,  $ab$ ,  $ba$ ,  $bb$ ), из трех частиц — восемью состояниями ( $aaa$ ,  $aab$ ,  $aba$ ,  $baa$ ,  $abb$ ,  $bab$ ,  $bba$ ,  $bbb$ ) и т. д.

Полное число всех возможных состояний системы, состоящей из  $N$  частиц, составит

$$\varphi = 2^N.$$

С позиций рассматриваемого процесса известный интерес представляет возможность разделения частиц в оба выхода во всей области  $AB$ .

Назовем потенциальным извлечением количество частиц, скорость которых ориентирована вверх. Величина этого параметра изменяется в количестве частиц в пределах  $0 \leq \varepsilon_f \leq N$  или в долях единицы  $0 \leq \varepsilon_f \leq 1$ .

Можно выразить это распределение двумя цифрами, например, вверх ориентировано 70 % частиц, а вниз 30 %. Такая двузначность оценки состояния системы неудобна для анализа. Оказывается, здесь можно применить однозначный параметр. Для этого нужно оценивать отклонение в распределении не от нуля, а от 50 % всех частиц. В рассматриваемом примере будет  $z = 20$  %. Показатель, отражающий величину потенциального извлечения, запишется так:

$$\text{в количестве частиц } \varepsilon_f = \frac{N}{2} + z, \quad (3)$$

$$\text{в долях единицы } \varepsilon_f = \frac{1}{2} + \frac{z}{N}.$$

Назовем  $z$  фактором разделения:  $-N/2 \leq z \leq +N/2$  в количестве частиц и  $-1/2 \leq z \leq +1/2$  в долях единицы. Выход вниз при этом составит:

$$\varepsilon_c = \frac{N}{2} - z \text{ в количестве частиц и} \quad (4)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} - \frac{z}{N} \text{ в долях единицы.}$$

Параметры (3) и (4) различаются на константу, а производные их по модулю одинаковы. В равновероятном варианте распределения  $z = 0$ .

Несмотря на то что число состояний системы велико и составляет  $2^N$ , величина возможных значений потенциальных извлечений составляет всего  $(N+1)$ . В нашем примере для двух частиц можно получить три значения для  $z$ : 1)  $aa$  — обе частицы ориентированы вверх ( $z = +1$ ); 2)  $bb$  — обе частицы ориентированы вниз ( $z = -1$ ); 3)  $ab$  и  $ba$  — частицы имеют различную ориентацию ( $z = 0$ ). Отметим, что последние два значения автомодельны.

Для трех частиц будет всего четыре возможных значения распределения ( $z = +1.5$ ;  $z = -1.5$ ;  $z = -0.5$ ;  $z = +0.5$ ).

Таким образом, число состояний значительно больше возможных значений потенциального извлечения. При  $N = 10$  величина  $\varphi = 1024$ , а число возможных значений фактора извлечения будет только 11.

Подчеркнем два принципиальных момента в определении автомодельности.

Во-первых, это определение применимо не к состояниям системы, которые все различны, а только к величине фактора извлечения.

Во-вторых, практическое определение автомодельности во многом обусловлено совершенством методики эксперимента. При применении более тонкой методики анализа можно обнаружить разницу в извлечении там, где ее, казалось бы, не было, если разбить частицы на более узкие классы.

Если для  $N$  частиц конкретная конфигурация системы выбирается случайным образом, то вероятность ее составляет  $1/2^N$ . Если эта конфигурация имеет  $c$  автомодельных состояний, то вероятность ее составит  $c/2^N$ .

Ясно, что любые из состояний системы, автомодельные между собой по фактору извлечения, являются равновероятными.

Для представления какого-либо одного состояния системы можно использовать либо наглядный образ (см. рисунок), либо символическую запись [5]:

$$a_1 b_2 a_3 a_4 b_5 a_6 b_7 \dots a_i b_j \dots b_N. \quad (5)$$

Такая запись показывает систему с фиксацией направления проекции скорости для всех частиц. В связи с тем что проекция скорости каждой из  $N$  частиц имеет только две ориентации, определить общее число состояний из  $a$  и  $b$  для  $N$  частиц можно при помощи бинома Ньютона

$$\varphi = (a + b)^N = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{(N-k)!k!} a^{N-k} b^k, \quad (6)$$

где  $k$  — порядковый номер слагаемого.

Для рассматриваемого случая перебор состояний интереснее провести в других пределах, а именно в пределах изменения фактора разделения от  $-N/2$  до  $+N/2$ .

В этом случае

$$(a + b)^N = \sum_{-N/2}^{+N/2} \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}N + z\right)! \left(\frac{1}{2}N - z\right)!} a^{N/2+z} b^{N/2-z}. \quad (7)$$

Результат вычисления биномиальных коэффициентов в такой зависимости известен в математической статистике. Приближенно их можно представить в виде [5]

$$\varphi(N; z) \approx \frac{N!}{\frac{N!}{2} \frac{N!}{2}} e^{-\frac{2z^2}{N}}, \quad (8)$$

или

$$\varphi(N; z) = \varphi(N; 0) e^{-\frac{2z^2}{N}}. \quad (9)$$

Значение коэффициента при экспоненте получим при помощи формулы Стирлинга, и окончательный результат составит

$$\varphi = 2^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{2z^2}{N}}.$$

Справедливость этого выражения можно проверить, если просуммировать его по всем значениям от  $-N/2$  до  $+N/2$ . Суммирование можно заменить интегрированием выражения

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{2z^2}{N}} dz = 2^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2z^2}{N}} dz. \quad (10)$$

Введем новую переменную

$$\frac{2z^2}{N} = y^2.$$

Тогда  $d_y = \sqrt{\frac{2}{N}} dz$  и  $dz = \sqrt{\frac{N}{2}} dy$ .

С учетом этого подынтегральное выражение преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \sqrt{\frac{N}{2}} dy = \sqrt{\frac{N}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

Согласно справочным данным, последний интеграл равен  $\sqrt{\pi}$ .

Если все подставить в зависимость (10), можно получить

$$\varphi = 2^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \sqrt{\frac{N}{2}} \sqrt{\pi} = 2^N,$$

что в точности соответствует общему числу состояний системы.

Распределение, определяемое правой частью выражения (9), есть распределение Гаусса. Оно имеет максимум в точке  $z = 0$ .

Для такого рода кривых мерой относительной ширины является среднеквадратичное отклонение. Величина его составляет  $\sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N}$ .

Если в кипящем слое или вертикальном сепараторе при производительности 10 т/ч общее число частиц при крупности 60 мкм составляет  $N = 10^{10}$ , то относительная ширина распределения будет порядка  $10^{-5}$ . Это значит, что здесь имеет место резкий максимум при  $z = 0$ .

Физический смысл этого заключается в том, что фактически достигаемый в конкретных условиях фактор разделения не является, в принципе, единственно возможным, а наиболее вероятным из всех возможных вариантов. Вероятность этого разделения настолько подавляет по своей величине любое другое мыслимое распределение, что его можно считать для данных условий единственно возможным, т. е. детерминированным. Данный факт объясняет ранее непонятные устойчивость и постоянство кривых разделения, наблюдаемых в реальных процессах.

Если в рассматриваемой системе вверх ориентировано  $(N/2 + z)$  частиц, а вниз —  $(N/2 - z)$ , то разность этих величин составит

$$\left(\frac{N}{2} + z\right) - \left(\frac{N}{2} - z\right) = 2z. \quad (11)$$

Ясно, что величина параметра  $2z$  каким-то образом, функционально или корреляционно, связана со скоростью потока. Но скорость потока отражает одну сторону процесса — его кинетическую составляющую.

Потенциальная составляющая связана с фактором разделения

$$I = 2zc,$$

где  $I$  — подъемный фактор;  $c$  — коэффициент пропорциональности;  $z$  — фактор разделения.

По аналогии с кинетической теорией газов параметр  $c$  должен включать в себя гравитационный параметр, который, как известно, равен для единичной частицы  $gd$  ( $g$  — ускорение свободного падения;  $d$  — диаметр частицы). Кроме того, он должен включать в себя массу частицы  $m$ .

В окончательном виде для узкого класса крупности можно записать

$$I = -2zgd m .$$

Размерность этого параметра [Нм] равна размерности энергии. Знак минус отражает направленность гравитационной силы против потока.

Подъемный фактор выражает потенциальную энергию дебаланса частиц. В целом этот параметр однозначно оценивает величину и направление потенциального извлечения.

Дифференциал от подъемного фактора запишется как

$$dI = -2gdmdz .$$

Дифференциал от параметров  $I$ ,  $z$  или  $N$  нужно понимать не как бесконечно малую величину, а как число частиц на несколько порядков меньше самих этих величин. Такой прием успешно применяется в кинетической теории газов, где молекулы рассматриваются как твердые шарики.

Потенциальное извлечение определяет отклонение в ориентации частиц в потоке от равновесного ( $z = 0$ ). Для одной частицы потенциальная энергия в потоке составляет  $gd m$ . Поэтому потенциальное извлечение характеризует некоторую суммарную энергию части частиц.

В этой зависимости

$$m = V(\rho - \rho_0) ,$$

где  $m$  — масса частицы;  $V$  — объем частицы;  $\rho$ ,  $\rho_0$  — плотность материала и среды.

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ

Рассмотрим систему, состоящую из частиц одного класса крупности. Разобьем ее на две неравные между собой части. Пометим частицы одной части другим цветом или другой какой-либо меткой, например изотопами. Получим две различные по величине системы. Обозначим количество одних частиц  $N_1$ , других —  $N_2$ . Вначале будем наблюдать систему частиц с  $N_1$ . Когда определим число состояний этой системы, начнем наблюдать систему с  $N_2$ . После этого рассмотрим характеристики системы, образованной частицами обоих классов. Каждая система в отдельности определяется некоторыми фиксированными значениями  $z_1$  и  $z_2$ , не равными нулю.

Обозначим число допустимых состояний первой системы  $\varphi_1$ . Каждое из этих состояний может реализоваться вместе с любым из  $\varphi_2$  допустимых состояний второй системы.

Поэтому полное число состояний объединенной системы составит

$$\varphi = \varphi_1 \varphi_2 . \tag{12}$$

Это соотношение можно дополнить следующим:

$$z = z_1 + z_2$$

или

$$z_2 = z - z_1 . \tag{13}$$

При постоянстве числа частиц в системах

$$N = N_1 + N_2 = \text{const} .$$

Реализацию объединенной системы достаточно полно можно охарактеризовать из (13) одним из факторов разделения, например  $z_1$ .

Для получения суммарного числа всех допустимых состояний достаточно просуммировать (13) по всем возможным значениям  $z_1$ :

$$\varphi = \sum_{z_1} \varphi_1 \varphi_2.$$

С учетом ранее полученной зависимости (9) запишем

$$\varphi = \varphi_1(N_1; z_1) \varphi_2(N_2; z_2) = \varphi_1(N_1; 0) \varphi_2(N_2; 0) e^{-\left(\frac{2z_1^2}{N_1} + \frac{2z_2^2}{N_2}\right)}. \quad (14)$$

Рассмотрим эту зависимость в функции  $z_1$ . Тогда (14) перепишем так:

$$\varphi = A e^{-\left[\frac{2z_1^2}{N_1} + \frac{2(z-z_1)^2}{N_2}\right]}. \quad (15)$$

Известно, что  $\ln y(x)$  имеет максимум при том же значении, что и  $y(x)$ . Поэтому из (15) получим

$$\ln \varphi = \ln A - \frac{2z_1^2}{N_1} - \frac{2(z-z_1)^2}{N_2}.$$

Эта величина имеет экстремум, когда производная по  $z$  равна нулю.

Для первой производной

$$-\frac{4z_1}{N_1} + \frac{4(z-z_1)}{N_2} = 0.$$

Вторая производная здесь отрицательна и, следовательно, экстремум является максимумом. Таким образом, наиболее вероятна та конфигурация, для которой выполняется соотношение

$$\frac{z_1}{N_1} = \frac{z-z_1}{N_2} = \frac{z_2}{N_2}. \quad (16)$$

Это очень интересное соотношение. Оно показывает, что наиболее вероятное состояние системы устанавливается таким образом, что фактор разделения нивелирует число частиц в системе. В практике сепарации давно установлена инвариантность фракционного разделения от содержания частиц в исходной смеси. Зависимость (16) показывает статистическую основу этого эмпирического результата, до сих пор никак не объясненного.

Полученный результат можно обобщить с учетом подъемного фактора

$$\varphi(N; I) = \varphi_1(N_1; I_1) \varphi_2(N_2; I - I_1).$$

Для экстремума необходимо, чтобы соответствующий дифференциал равнялся нулю:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial I_1}\right)_{N_1} \varphi_2 dI_1 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial I_2}\right)_{N_2} \varphi_1 dI_2 = 0.$$

Разделим это уравнение на  $\varphi_1 \varphi_2$  и учтем, что  $dI_1 = -dI_2$ , получим

$$\frac{1}{\varphi_1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial I_1}\right)_{N_1} = \frac{1}{\varphi_2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial I_2}\right)_{N_2}.$$



Отсюда следует

$$\left(\frac{\partial \ln \varphi_1}{\partial I_1}\right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial I_2}\right)_{N_2}. \quad (17)$$

Из данных соотношений можно сделать следующие выводы.

Во-первых, производная от логарифма числа состояний каждой системы по подъемному фактору определяет наиболее вероятную конфигурацию системы.

Во-вторых, две системы находятся в равновесии друг относительно друга, когда объединенная система находится в наиболее вероятной конфигурации, т. е. когда число допустимых состояний максимально.

В-третьих, обратим внимание на выражение, стоящее в числителе (17):

$$H = \ln \varphi. \quad (18)$$

Эта зависимость есть не что иное, как энтропия, аналогичная выражению Больцмана (1).

Известно, что энтропия является мерой беспорядка или неопределенности системы, т. е. чем больше  $\varphi$ , тем больше  $H$ , что соответствует смыслу процесса. Но эта энтропия (18) выведена не для поведения идеального газа в зависимости от его температуры. Она получена для характеристики двухфазного движения в сепарационном режиме.

Таким образом, вводится новое понятие в теорию двухфазных течений и одновременно от них перекидывается мостик к статистической механике идеального газа.

## 5. СИСТЕМА ЕДИНИЦ ДЛЯ ЭНТРОПИИ

Это важный вопрос для понимания роли энтропии как в двухфазных течениях, так и в любых других случаях, где ее можно использовать.

Согласно определению, данному Клаузиусом, энтропия  $H$  определяется следующей зависимостью:

$$dH = \frac{dQ}{T},$$

где  $Q$  — количество тепла, ккал;  $T$  — абсолютная температура, град.

Отсюда следует, что размерность этого параметра составляет ккал/град или эрг/град.

Больцман ввел статистическую интерпретацию энтропии в виде зависимости (1). Для сохранения размерности величине  $k$  — коэффициенту пропорциональности — присвоили размерность энтропии, т. е. ккал/град или эрг/град.

В середине XX в. была разработана статистическая теория информации. Ключевым моментом ее явилось определение понятия информационной энтропии.

В теории информации система единиц основана на двоичном исчислении (*bits*), поэтому зависимость для энтропии в ней имеет вид

$$H = k \log_2 P,$$

где  $P$  — вероятность события;  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Информационная энтропия по форме написания символов в точности соответствует термодинамической энтропии, введенной Больцманом. Зная о том, что в термодинамике энтропия имеет размерность энергии, деленной на температуру, попытались связать эти зависимости за счет того, что в формуле информационной энтропии посчитали коэффициент пропорциональности, равный коэффициенту Л. Больцмана [6, 10]

$$k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град.}$$

Эта связка представляется необоснованной, так как понятно, что информация не зависит от температуры, при которой она передается.

Сама по себе термодинамическая энтропия часто трактуется, с одной стороны, как коэффициент полезного действия процесса, с другой — как потребное количество энергии, необходимой для реализации соответствующего состояния системы [8].

Эти предположения часто приводят к абсурдным результатам. В качестве примера можно привести ситуацию, возникающую при разделении газовых смесей.

При приготовлении ядерного горючего Ж. Акере [9] приводит интересные цифры. Для разделения смеси, содержащей 99.3 %  $U^{238}F_6$  и 0.7 %  $U^{235}F_6$  требуется, согласно энтропии смешения, 0.023 кВт·ч на 1 кг второго компонента, но действительная затрата энергии достигает  $1.2 \cdot 10^6$  кВт·ч, что примерно в 50 млн раз больше. На основании этих данных П. Шамбодаль [10] делает вывод о несовершенстве теории разделения газов.

Нам представляется, что дело здесь не в совершенстве этой теории, а в не совсем правильной трактовке энтропии. Энтропия в данном случае должна выступать не в качестве коэффициента полезного действия или количества необходимой энергии.

Обратим внимание на некоторые свойства этого параметра. Очевидно, было правильно, с точки зрения Клаузиуса, приписать термодинамической энтропии размерность теплоты, деленной на температуру.

Мы знаем, что теплота — это энергия. С другой стороны, температура также выражает среднюю кинетическую энергию системы, состоящей из атомов или молекул. И хотя общепринято выражать ее в градусах, строго говоря, она тоже имеет размерность энергии, так как

$$T = \frac{1}{3} m \bar{v}^2,$$

где  $m$  — масса атома или молекулы;  $\bar{v}$  — средняя скорость движения атомов или молекул.

Значит, в выражении для энтропии числитель и знаменатель имеют одинаковую размерность. Очевидно, это означает, что энтропию можно считать безразмерной величиной. Но если энтропия даже в термодинамике не энергия, а безразмерная величина, то что же она отражает?

Попытаемся разобраться в этом. Начнем с элементарного параметра удельной теплоемкости, размерность которой аналогична размерности энтропии:

$$c_p = \frac{dQ}{dT},$$

где  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении;  $Q$  — количество тепла;  $T$  — абсолютная температура.

Для такой теплоемкости в начале XIX в. Дьюлинг и Пти вывели эмпирическое правило, согласно которому для простых кристаллов и атомарных газов при температуре выше 100–200 К теплоемкость не зависит от температуры. При этом удельная теплоемкость моля газа есть величина постоянная:

$$c_p \approx 21 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

Это правило отражает закон сохранения энергии, так как в моле газа находится одинаковое количество частиц различной массы. Потенциальная энергия тепла разгоняет мелкие частицы до больших скоростей по сравнению с тяжелыми, но произведение массы на квадрат усредненной скорости дает одну и ту же величину кинетической энергии.

В качестве атомарных газов, для которых справедливо это соотношение, можно привести, например: водород (H) с атомарным весом, принятым за единицу; азот (N) с весом 14; кислород (O) — 16; неон (Ne) — 20; хлор (Cl) — 35; аргон (Ar) — 40; йод (I) — 126; актиний (Ac) — 227 и др.

Для легких газов массовая теплоемкость имеет большие значения, для тяжелых — меньшие. Это значит, что подъем температуры конкретной массы легких газов на один градус требует больших затрат тепла, чем для тяжелых. На первый взгляд это выглядит парадоксально. На самом деле никакого парадокса нет. В легких газах в единице массы находится больше частиц, чем в тяжелых, и подвижность их выше, т. е. они имеют большую хаотизацию движения. Это и приводит к завышенной потребности в энергии.

Удельная массовая теплоемкость имеет гиперболическую зависимость с молярным весом

$$c_p = \frac{21}{\mu}.$$

В любой газовой системе имеет место хаотическое движение частиц, однако уровень интенсивности этой хаотизации различен. Удельная массовая теплоемкость выступает в качестве количественного параметра, характеризующего способность конкретного газа к хаотичному движению.

Размерность параметра  $c_p$  относительно энергии должна быть нулевой, так как в числителе и знаменателе его стоят величины, имеющие одинаковую размерность.

Сейчас можно вернуться к выражению для энтропии

$$dH = \frac{dQ}{T}.$$

Отсюда и из зависимости для  $c_p$  можно получить

$$\begin{aligned} dQ &= TdH, \\ dQ &= c_p dT. \end{aligned}$$

Значит,  $TdH = c_p dT$ .

Разделим переменные и возьмем интегралы

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{1}{c_p} \int_{T_1}^{T_2} dH.$$

Получим  $c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \Delta H$ .

Соотношение температур ничего не добавляет к размерности  $c_p$ , а логарифм соотношения несколько нивелирует их влияние на  $\Delta H$ .

Это свидетельствует о том, что при изменении температуры системы от  $T_1$  до  $T_2$  прирост энтропии определяется в основном увеличением молекулярного хаоса системы. С другой стороны, согласно формуле Больцмана, возрастание энтропии соответствует эволюции к наиболее вероятному состоянию системы, т. е. к равновесию. Это не противоречит общепринятым представлениям, но добавляет свойствам энтропии конкретный смысл, заключающийся в том, что она дает конкретную оценку хаотизации системы.

Из соотношения размерностей становится ясно, что расход энергии никоим образом не связан с энтропией состава или смешения газов. Следовательно, никакого парадокса с затратой энергии при разделении газовых систем не существует. Нельзя сопоставлять несопоставимые

параметры. В такого рода процессах энтропия может дать лишь оценку эффективности разделения компонентов, т. е. степени завершенности процесса [11].

### 6. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЭНТРОПИИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙ ДВУХФАЗНУЮ СИСТЕМУ

Определим физический смысл выражения (17). По существу, это есть величина, равная производной энтропии по подъемному фактору, одинаковая для обеих систем, т. е.

$$\frac{\partial H}{\partial I} = \frac{1}{\chi}. \quad (19)$$

По аналогии с газовой динамикой параметр  $\chi$  играет роль хаотизирующего фактора процесса, так как энтропия безразмерна, размерность для  $\chi$  должна быть равна размерности подъемного фактора — [Нм]. Хаотизирующим фактором в этом процессе является параметр, пропорциональный квадрату скорости потока среды. Выражение для него составит

$$\chi = \frac{m_0 w^2}{2},$$

где  $w$  — скорость потока среды;  $m_0$  — масса среды в объеме частицы.

Количество состояний первой системы равно  $\varphi_1$  и каждое из них может реализоваться одновременно с любым из допустимых состояний системы  $\varphi_2$ , т. е. суммарная неопределенность совокупной системы будет больше, чем суммарная неопределенность двух изолированных систем, так как логарифм произведения больше логарифма суммы при  $N \gg 1$ :

$$H_{\Sigma} > H_1 + H_2.$$

Из (9) следует, что

$$\varphi = \frac{N!}{\frac{N}{2}! \frac{N}{2}!} e^{-\frac{2z^2}{N}}.$$

Отсюда

$$H = \ln \varphi = \ln N! - 2 \ln \frac{N}{2}! - \frac{2z^2}{N}.$$

С учетом формулы Стирлинга из этого выражения получается энтропия для критического течения в режимах сепарации

$$H = N \ln 2 - \frac{2z^2}{N}. \quad (20)$$

Для пневмотранспортного режима энтропия для каждого узкого класса запишется

$$H = N \ln 2 - \frac{2(+N/2)^2}{N} = N \ln 2 - \frac{N}{2} = N \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \approx 0.19315N. \quad (21)$$

Точно такое же значение будет иметь энтропия для падающего слоя, для которого  $z = -N/2$ . Для полифракционной твердой фазы зависимость (20) преобразуется к виду

$$H_0 = N_0 \ln 2 - \sum_k \frac{2z_k^2}{N_k}, \quad (22)$$

где  $H_0$  — общая энтропия полифракционной твердой фазы в потоке среды;  $N_0$  — общее число частиц в потоке;  $k$  — количество различных узких классов;  $z_k$  — фактор разделения для  $k$ -го узкого класса;  $N_k$  — количество частиц в  $k$ -м узком классе крупности.

Для пневмотранспортного режима и падающего слоя при полифракционной смеси частиц

$$H_0 = 0.19315N_0. \quad (23)$$

Эти результаты можно с успехом приложить к анализу двухфазных потоков в режимах сепарации и обогащения полезных ископаемых, например для процесса, описанного в [12].

#### **ВЫВОДЫ**

1. Разработана концепция анализа двухфазных потоков в режимах сепарации с позиций статистической теории.

2. Определено понятие энтропии твердой фазы для такого рода потоков.

3. С позиций нового подхода к анализу процесса введены новые параметры, характеризующие двухфазный поток: фактор разделения, хаотизирующий фактор и потенциальное разделение.

4. С этих позиций удалось объяснить инвариантность кривых разделения от состава твердой фазы и устойчивость эти кривых.

5. Формулировка понятия энтропии двухфазного потока открывает возможности для дальнейшего анализа процессов сепарации и обогащения полезных ископаемых методами статистической механики.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Хикилмаз К., Усулай У., Билеен С., Иехелер М., Акдоган Г. Эффект шероховатых и острых частиц пирита на флотацию при трехмерном подходе // ФТПРПИ. — 2006. — № 4.
2. Красноштейн А. Е., Казаков Б. П., Шалимов А. В. К моделированию сложных аэрогазотермодинамических процессов в атмосфере рудников // ФТПРПИ. — 2008. — № 6.
3. Prigoqine I., Stengers I. Order out Chaos, Moskow, URSS, 2005.
4. Barsky M. Fractionating of Powders, Moskow, "Nedra", 1980.
5. Kittel C. Thermal Physics., "John Willy and Sons, Inc.", New York, 1977.
6. Brilloun L. Science and information theory, "Academic Press Inc.", New York, 1977.
7. Barsky E., Barsky M. Cascade Separation of Powders, "Cambridge International Science Publishing", Cambridge, 2006.
8. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature, New York, "Freeman", 1982.
9. Ackeret J. Die Entwicklung des Entropiebegriffes, Schweizerische Bauzeitung, No. 5, 1959.
10. Chambadal P. Evolution et Applications du Concept D'entropie Dunod, Paris, 1963.
11. Barsky E. Efficacy of Separation of a Pourable Materials, Thermal physics of High Temperatures, No. 6, 2009.
12. Лесин Ю. В., Лукьянов С. Ю., Тюленев М. А. Массоперенос дисперсных частиц при фильтрации воды в крупнозернистых средах // ФТПРПИ. — 2008. — № 6.

*Поступила в редакцию 18/VI 2012*