

**О ВЗАИМОТНОШЕНИИ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ФАЗ ФИЛЬТРАЦИИ
В ПОРИСТО-ТРЕЩИНОВАТОМ ПЛАСТЕ**

Р. И. Медведский

(Тюмень)

Рассматривается динамика восстановления забойного давления в мгновенно остановленной скважине пористо-трещиноватого пласта при следующих условиях: 1) пласт бесконечен, 2) пласт ограничен круговым контуром питания, соосным скважине.

Весь период восстановления давления в ограниченном пласте делится на две фазы: первую и вторую. Под первой фазой понимается отрезок времени $t \geq 0$, в течение которого восстановление давления происходит с небольшой ошибкой (не более 1—2%) таким же образом, как если бы пласт был бесконечным. Оставшееся время относится ко второй фазе.

Доказывается, что в пористо-трещиноватом пласте в отличие от пористого первая фаза при малой упругости трещин может вообще отсутствовать.

Известно, что в бесконечном пористом [1] и пористо-трещиноватом [2] пластах кривая восстановления забойного давления для достаточно больших значений времени асимптотически аппроксимируется некоторой линейной функцией от логарифма времени. Из данного выше определения не следует, что в пределах первой фазы имеет место упомянутое логарифмическое приближение. Поэтому возникает необходимость во введении понятия логарифмичности первой фазы. Логарифмичность первой фазы лежит в основе известного метода касательной определения геолого-физических параметров пласта по кривым восстановления забойного давления [1,2].

В. Н. Шелкачевым показано [1], что в пористом пласте при $r_k \geq 100 r_c$ первая фаза всегда логарифмична и кривая восстановления давления для значений времени из промежутка $(100 r_c^2/\kappa, 0.1 r_k^2/\kappa)$ допускает логарифмическое приближение. Здесь r_k и r_c — радиусы контура питания и скважины, κ — пьезопроводность пласта.

Из того, что в пористо-трещиноватом пласте первая фаза при определенных сочетаниях фильтрационных параметров может иметь нулевую длительность, автоматически вытекает отсутствие логарифмичности. Отсюда следует, что в данной ситуации метод касательной обработки кривых восстановления давления непригоден, так что возникает необходимость в разработке метода определения геолого-физических параметров по закономерностям второй фазы фильтрации. Подобный метод, являющийся развитием идей Полларда [3], излагается ниже.

Незнание того, что в пористо-трещиноватом пласте логарифмичность первой фазы может отсутствовать, послужило причиной дискуссии авторов работ [4,5].

1. Пусть функция $U(r, t)$ означает отклонение давления в трещинах возмущенного пласта над стационарным. В пористо-трещиноватых пластах, проницаемость пористых блоков которых пренебрежимо мала, функция U удовлетворяет уравнению [2]

$$\begin{aligned} \kappa \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 U &= \left(1 + \varepsilon \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} U, & \nabla^2 U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r}\right) \\ \kappa &= \frac{k}{\mu (\beta_1 + \beta_2)}, & \tau &= \frac{\mu}{\beta_2 \alpha}, & \varepsilon &= \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь r — расстояние по радиусу, t — время, ε — относительная упругость, τ — время запаздывания, k — проницаемость трещин, μ — вязкость жидкости, β_1 и β_2 — упругости трещин и пористых блоков, α — коэффициент массообмена трещин и блоков, h — мощность пласта.

При исследовании динамики восстановления забойного давления после «мгновенной» остановки скважины, работавшей с расходом q_0 на стационарном режиме, без большой ошибки можно считать, что она имеет нулевой радиус и будет стоком (источником). Тогда уравнение (1.1) необходимо решать при таких граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r \rightarrow 0} &= 1, & U &= 0 & \text{при } r &= r_k \\ U &= \frac{\partial U}{\partial t} = 0 & & & \text{при } t &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Решая задачу (1.1), (1.2), находим, опуская подробности

$$U(r, t) = \frac{\mu q_0}{2\pi kh} \Phi_\varepsilon(\xi, \xi_k, \lambda); \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{\kappa t}}, \quad \xi_k = \frac{r_k}{\sqrt{\kappa t}}, \quad \lambda = \frac{t}{\tau} \quad (1.3)$$

Функция Φ_ε определяется изображением по Лапласу

$$L\Phi_\varepsilon(\xi, \xi_k, \lambda) = \frac{1}{s} K_0(\xi\zeta) - \frac{1}{s} K_0(\xi_k\zeta) \frac{I_0(\xi\zeta)}{I_0(\xi_k\zeta)}, \quad \zeta = \left(\frac{1 + \varepsilon s}{1 + s} s \right)^{1/2}$$

$$L\Phi_\varepsilon(\xi, \xi_k, \lambda) = \int_0^\infty e^{-s\lambda} \Phi_\varepsilon(\xi, \xi_k, \lambda) d\lambda \quad (1.4)$$

Здесь s — параметр преобразования Лапласа. В первой фазе фильтрации, когда можно считать $r_k = \infty$, функция U определяется равенством

$$U(r, t) = \frac{1.7q_0}{2\pi kh} \Phi_\varepsilon(\xi, \lambda), \quad L\Phi_\varepsilon(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{s} K_0(\xi\zeta) \quad (1.5)$$

Выражение для $\Phi_\varepsilon(\xi, \lambda)$ получается из (1.4) при $\xi_k = \infty$, как это следует из свойств функции Макдональда K_0 и модифицированной функции Бесселя I_0 .

Функции $\Phi_\varepsilon(\xi, \xi_k, \lambda)$ и $\Phi_\varepsilon(\xi, \lambda)$ естественно назвать функциями линейного непрерывно-действующего источника в ограниченном и бесконечном пористо-трещиноватом пласте соответственно.

Уже теперь можно доказать, что в пористо-трещиноватом пласте при некотором сочетании параметров ξ , τ , κ и r_k первая фаза может иметь нулевую длительность.

В самом деле, сравним между собой $\Phi_0(\xi, \xi_k, \lambda)$ и $\Phi_0(\xi, \lambda)$ при $\xi = 0$, когда $\zeta = \sqrt{s/(1+s)}$.

Правые пределы указанных выше функций при $\lambda \rightarrow 0+$ могут быть найдены средствами операционного исчисления, например

$$\Phi_0(\xi, \xi_k, \lambda) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s), \quad s \rightarrow \infty$$

где $F(s)$ — правая часть (1.4).

Тогда из (1.4) и (1.5) следует:

$$\Phi_0(\xi, \xi_k, 0) = K_0(\xi) - K_0(\xi_k) \frac{I_0(\xi)}{I_0(\xi_k)} \quad (1.6)$$

$$\Phi_0(\xi, 0) = K_0(\xi) \quad (1.7)$$

Если τ достаточно велико и, следовательно, ε_k мало, то (1.6) разнится от (1.7) значительно больше, чем на 1—2%, так что длительность первой фазы в таком пласте равна нулю, а вторая фаза наступает немедленно.

При $\varepsilon = 1$ функции $\Phi_1(\xi, \xi_k, \lambda)$ и $\Phi_1(\xi, \lambda)$, как следует из их лапласовых изображений (1.4) и (1.5), соответствуют чисто пористой среде, в которой роль зерен играют блоки, а роль поровых каналов — трещины. Однако в пористом пласте длительность первой фазы, как показано В. Н. Щелкачевым [1], определяется соотношением $t \leq 0.1 r_k^2 / \kappa$ и определяется только удаленностью границы пласта и величиной коэффициента пьезопроводности.

Следовательно, при прочих равных условиях длительность первой фазы минимальна при $\varepsilon = 0$ и максимальна при $\varepsilon = 1$. При $\xi = 0$ и большой величине времени запаздывания τ длительность первой фазы, как это было показано, может быть равной нулю.

Для того чтобы представить картину восстановления забойного давления в условиях преждевременного влияния контура питания, необходимо располагать вычислительными алгоритмами функций $\Phi_\varepsilon(\xi, \xi_k, \lambda)$ и $\Phi_\varepsilon(\xi, \lambda)$.

2. Явное выражение $\Phi_\varepsilon(\xi, \xi_k, \lambda)$ может быть найдено по формуле обращения Римана—Меллина с применением теоремы вычетов, если воспользоваться тем обстоятельством, что лапласово изображение $F(s)$ этой функции мероморфно в левой полуплоскости комплексного переменного s с полюсами в точках $s = 0$, $s = -a_n$ и $s = -b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Величины $-a_n$ и $-b_n$ будут корнями квадратного уравнения

$$(\varepsilon_k \zeta)^2 = -\eta_n$$

решение которого дает

$$2\varepsilon a_n = 1 + \eta_n \theta - d_n, \quad 2\varepsilon b_n = 1 + \eta_n \theta + d_n$$

$$d_n = [(1 + \eta_n \theta)^2 - 4\varepsilon \eta_n \theta]^{1/2}, \quad \theta = \xi_k^{-2} \quad (2.1)$$

Таким образом, имеем

$$\varphi_\varepsilon(\xi, \xi_k, \lambda) = -\ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\frac{1 - \varepsilon a_n}{d_n} e^{-a_n \lambda} + \frac{\varepsilon b_n - 1}{d_n} e^{-b_n \lambda} \right] J_0(\rho \sqrt{\eta_n})$$

$$C_n = 2 / \eta_n J_1^2(\sqrt{\eta_n}), \quad \rho = \xi / \xi_k \quad (2.2)$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка первого рода, $\sqrt{\eta_n}$ — корни уравнения $J_0(\sqrt{\eta_n}) = 0$.

При $\varepsilon = 0$ формула (2.2) совпадает с решением Э. А. Авакян [6], при $\varepsilon = 1$ — с решением М. Маскета краевой задачи (1.2) для уравнения пьезопроводности [1].

По той же формуле обращения Римана—Меллина можно было бы найти явное выражение, и для функции $\varphi_\varepsilon(\xi, \lambda)$. Оно будет довольно сложным, и для вычислительных целей малоприспособным.

Для исследования скважин восстановления давления достаточную точность дает следующая приближенная формула:

$$\varphi_\varepsilon(\xi, \lambda) \approx \varphi_-(\xi, \lambda) - \frac{1}{2} \left[\ln \frac{4\lambda}{\gamma \xi^2} - \text{Ei}(-\lambda) + \text{Ei}\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \right] \quad (2.3)$$

Здесь $\text{Ei}(-\lambda)$ — интегральная экспонента.

Это приближение будет нижним и может быть получено следующим образом. Воспользуемся равенством

$$-\frac{1}{2} \text{Ei}\left(-\frac{\xi^2}{4\lambda}\right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{4\lambda}{\gamma \xi^2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(\xi, \mu) [1 - h(\lambda - \mu)] d\mu$$

$$F(\xi, \mu) = \mu^{-1} [1 - \exp(-\xi^2/4\mu)]$$

Здесь $h(\lambda)$ — функция Хевисайда, $\gamma = 1.7810\dots$ — постоянная Эйлера. В изображениях по Лапласу последнее равенство принимает вид

$$K_0(\xi \sqrt{s}) = \ln \frac{2}{\gamma \xi \sqrt{s}} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(\xi, \mu) [1 - e^{-s\mu}] d\mu \quad (2.4)$$

Полагая здесь ζ вместо \sqrt{s} , получаем

$$\frac{1}{s} K_0(\xi \zeta) = \frac{1}{s} \ln \frac{2}{\gamma \xi \zeta} + \frac{1}{2s} \int_0^{\infty} F(\xi, \mu) [1 - \exp(-\zeta^2 \mu)] d\mu \quad (2.5)$$

Переход в этом равенстве к оригиналам дает с учетом (1.5) и смысла величины ζ

$$\varphi_\varepsilon(\xi, \lambda) = \varphi_-(\xi, \lambda) + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(\xi, \mu) [1 - Q(\lambda, \mu)] d\mu$$

Функция $Q(\lambda, \mu)$ определяется операционным изображением

$$LQ(\lambda, \mu) = s^{-1} \exp(-\zeta^2 \mu)$$

из разложения которого в ряд по $[s(1+s)\mu]^{-1}$ и перехода в дальнейшем к оригиналам, получается

$$1 > Q(\lambda, \mu) > e^{-\mu h(\lambda - \varepsilon \mu)}$$

Первое из этих неравенств влечет из (2.5) следующее:

$$\varphi_\varepsilon(\xi, \lambda) > \varphi_-(\xi, \lambda)$$

т. е. приближение (2.3) действительно будет нижним. Второе неравенство дает возможность оценить погрешность (2.3) сверху. В самом деле, из него вытекает

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(\xi, \mu) [1 - Q(\lambda, \mu)] d\mu < \frac{1}{2} \int_0^{\lambda/\varepsilon} F(\xi, \mu) (1 - e^{-\mu}) d\mu + \frac{1}{2} \int_{\lambda/\varepsilon}^{\infty} F(\xi, \mu) d\mu$$

Имеем

$$R_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty F(\xi, \mu) (1 - e^{-\mu}) d\mu = K_0(\xi) - \ln \frac{2}{\gamma \xi}$$

как это получается из (2.4) заменой s на 1. Далее

$$\frac{1}{2} \int_{\lambda/\varepsilon}^\infty F(\xi, \mu) d\mu < \frac{\varepsilon \xi^2}{4\lambda} = R_2$$

Итак, погрешность приближения (2.3) не более величины

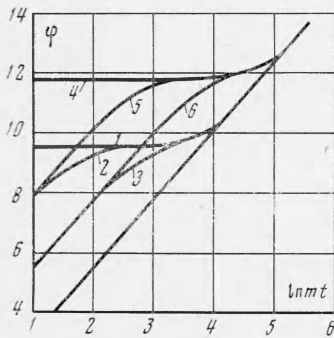
$$(R_1 + R_2) / \varphi_-(\xi, \lambda)$$

Отсюда вытекает, что погрешность (2.3)

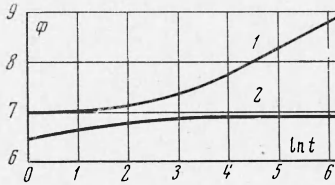
- а) не более 0.7% при $\xi \leq 0.1$ и $\xi^2 / 4\lambda \leq 0.01$ для $0 < \varepsilon < 1$,
- б) не более 0.35% при $\xi \leq 0.1$ для $\xi = 0$,
- в) не более 0.5% при $\xi^2 / 4\lambda \leq 0.01$ для $\varepsilon = 1$.

Таким образом, приближение (2.3) вполне приемлемо для исследования нестационарных процессов в непосредственной близости к источнику и, тем более, для анализа восстановления забойного давления.

Согласно полученным результатам (формулы (1.5) и (2.3) при $r = r_c$) приращение давления $\Delta p_c(t)$ на забое мгновенно остановленной скважины пористо-трещи-



Фиг. 1



Фиг. 2

новатого пласта в первую фазу фильтрации выражается формулой

$$U(r_c, t) = \Delta p_c(t) = \frac{\mu q_0}{4\pi k h} \left[\ln \frac{4}{\gamma} m t - \text{Ei} \left(-\frac{t}{\tau} \right) + \text{Ei} \left(-\frac{t}{\varepsilon \tau} \right) \right] \quad \left(m = \frac{\kappa}{r_c^2} \right) \quad (2.6)$$

Формула (2.6) отличается от соответствующей формулы для пористого пласта

$$\Delta p_c(t) = \frac{\mu q_0}{4\pi k h} \ln \frac{4}{\gamma} m t \quad (2.7)$$

двумя последними слагаемыми, которые исчезающе малы при больших значениях времени t . Поэтому в полулогарифмической анаморфозе кривая (2.6) будет иметь (2.7) своей прямолинейной асимптотой, как это представлено на фиг. 1, на оси ординат которой отложена величина

$$\psi = \frac{4\pi k h}{\mu} \frac{\Delta p_c}{q_0}$$

а кривые 1, 2 ... 6 определяются такими значениями параметров mt и ε :

кривые	1	2	3	4	5	6
$mt =$	10^4	10^4	10^4	10^5	10^5	10^5
$\varepsilon =$	0	0.01	0.1	0	0.01	0.1

По наклону логарифмической асимптоты обычным методом определяется гидропроводность пласта $k h / \mu$, если только первая фаза будет логарифмической.

В противном случае влияние контура питания сильно искажает процесс восстановления давления, как это видно из фиг. 2.

Верхняя кривая на этой фигуре соответствует бесконечному пласту, нижняя — ограниченному круговым контуром питания. Для построения кривых приняты следующие значения параметров: $\tau = 20$ час, $\varepsilon = 0$, $r_c = 0,8485$ см, $r_k = 84.85$ м, т. е. $\xi_c = 0.001$, $\xi_k = 1$.

Несколько искусственные значения, придаваемые радиусам скважины и контура питания, не изменяют физической сущности явления, однако позволяют существенно упростить вычисления. Величины остальных параметров взяты равными средним значениям по месторождению Кюровдаг АзербССР.

Как видно из фиг. 2, кривая восстановления забойного давления под влиянием контура питания может не иметь логарифмической асимптоты, и, следовательно, метод касательной в данной ситуации непригоден.

3.1 В данном разделе излагается метод определения геолого-физических параметров пласта, основанный на формулах (1.3) и (2.2), описывающих вторую фазу фильтрации в предположении, что границей пласта будет круговой контур питания. Необходимость его применения возникает в тех случаях, когда первая фаза восстановления давления не будет логарифмической. При этом влияние границ нефтяного пласта будет очень существенным и не может не учитываться. Следуя И. А. Чарному [7], впервые предложившему расчет такого рода для пористого пласта, будем считать, что реальный пласт допускает аппроксимацию кругом некоторого радиуса r_k с постоянным контурным давлением p_k .

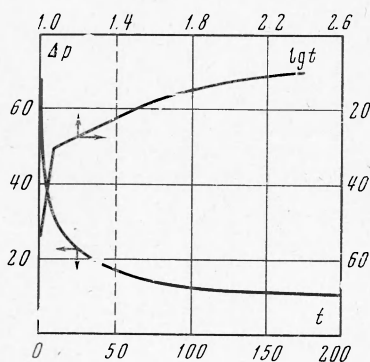
Тогда восстановление давления в поздний период фазы фильтрации будет описываться формулой

$$\Delta p(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} \quad (\Delta p(t) = p(t) - p_k) \quad (3.1)$$

Здесь $\Delta p(t)$ — отклонение текущего забойного давления $p(t)$ от пластового p_k , равного давлению на контуре питания $r = r_k$

$$A = \frac{\mu q_0}{2\pi k^2} C_1 \frac{1 - \varepsilon\tau\alpha}{a_1}, \quad B = A \frac{\varepsilon\tau\beta - 1}{1 - \varepsilon\tau\alpha} \quad (3.2)$$

$$\alpha = \frac{a_1}{\tau}, \quad \beta = \frac{b_1}{\tau}, \quad C_1 = \frac{2}{\eta_1 J_1^2(\sqrt{\eta_1})} = 1.283$$



Фиг. 3

Формула (3.1) получается из (1.3) и (2.3) пренебрежением всех слагаемых бесконечной суммы, кроме двух первых. Для достаточно больших значений времени оба эти слагаемые значительно больше всех остальных.

Если только практическая кривая, начиная с некоторого времени достаточно хорошо описывается двучленом (3.1), то коэффициенты A , B , α и β можно определить графическими построениями [8] или аналитически по способу Ланцоша [8].

Из самого смысла этих величин следуют равенства:

$$\frac{B}{A} = \frac{\varepsilon\tau\beta - 1}{1 - \varepsilon\tau\alpha}, \quad \alpha + \beta = \frac{1 + \eta_1\theta}{\varepsilon\tau}, \quad \alpha\beta = \frac{\varepsilon\eta_1\theta}{(\varepsilon\tau)^2}$$

Разрешая эти уравнения относительно неизвестных, имеем

$$\eta_1\theta = (\alpha + \beta)\delta - 1, \quad \varepsilon\eta_1\theta = \alpha\beta\delta^2, \quad \tau\varepsilon = \delta, \quad \delta = (A + B) / (A\alpha + B\beta) \quad (3.3)$$

Из системы (3.3) легко определяются θ , ε и τ в указанной последовательности.

Поскольку $a_1 = (\beta - \alpha)\varepsilon\tau$, из (3.2) следует:

$$\frac{kh}{\mu} = 0.2 \frac{1 - \varepsilon\tau\alpha}{(\beta - \alpha)\varepsilon\tau} \frac{q_0}{A} \quad (3.4)$$

По известным величинам θ и τ находим

$$x / r_k^2 = \theta / \tau$$

Изложенная методика показывается на примере скважины 24 Стрельненского месторождения Куйбышевской области, заимствованном из работы [9]. До остановки эта скважина работала с постоянным расходом $q_0 = 430 \text{ м}^3 / \text{сутки} = 1977 \text{ см}^3 / \text{сек}$. Скважина переливающая, так что остановку можно считать мгновенной. Эффективная мощность пласта равна 5 м. Пласт будет пористо-трещиноватым.

Кривая отклонения текущего забойного давления от пластового изображена на фиг. 3 в функции от времени и его десятичного логарифма. Как видно из нее, кривая изменения давления в полулогарифмической анаморфозе представляет собой начальную часть кривых, показанных на фиг. 1, до выхода их на асимптоту. Отсутствие логарифмической асимптоты в данном случае наиболее вероятно объясняется влиянием контура питания.

