

УДК 536.2 (075)

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ РЕАКТОРА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ВОДОРОДА ИЗ МЕТАНА

И. В. Кудинов, А. А. Пименов, Г. В. Михеева

Самарский государственный технический университет, 443001 Самара, Россия

E-mails: igor-kudinov@bk.ru, andpimenov@yandex.com, galinn21@list.ru

Проведено исследование теплового и термонапряженного состояния реактора, предназначенного для получения водорода путем пиролиза метана и представляющего собой кварцевый цилиндр, заполненный оловом. При определении температурного состояния задача для двухслойной конструкции (кварц — олово) с использованием функции Хевисайда сводилась к задаче для однослойной конструкции с переменными (кусочно-однородными) свойствами материала. На основе определения положения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий с помощью интегрального метода теплового баланса получено аналитическое решение, включающее алгебраические полиномиальные функции с коэффициентами, экспоненциально стабилизирующимися во времени. Найденное решение использовано для определения квазистатических температурных напряжений, в случае когда конструкция представляет собой двухслойный полый цилиндр (плоская деформация). С помощью метода сопряжения слоев получено точное аналитическое решение задачи термоупругости, из анализа которого следует, что в точке контакта слоев окружные и осевые напряжения имеют скачок (разрыв) со сменой знака в нем. Показано, что в отдельных режимах пуска окружные и осевые напряжения могут превышать предел прочности кварцевого слоя. С использованием полученных результатов выбраны режимы пуска, в которых напряжения не превышают допустимых величин.

Ключевые слова: пиролиз метана, двухслойный цилиндр, краевые задачи, теплопроводность, термоупругость, интегральный метод теплового баланса.

DOI: 10.15372/PMTF20220120

Введение. Водород, являющийся ценным химическим сырьем, может быть использован также в качестве высококалорийного топлива. Известно несколько способов его получения, среди которых наибольшее распространение получили электролиз воды, газификация угля и паровая конверсия метана [1]. Однако все эти способы энергозатратны, что не позволяет использовать водород в качестве экологически чистого топлива. Необходимо разработка менее затратных способов его получения, таких как пиролиз метана. Данный способ получения водорода не сопровождается выбросом углекислого газа в атмосферу [1–5].

Установки, используемые при пиролизе метана с целью получения водорода, представляют собой многослойные конструкции, в которых теплота передается от нагревательных элементов к нагреваемому олову через стенку реактора. В данной работе представлены

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках соглашения № 05.607.21.0311 от 02.12.19 (уникальный идентификатор соглашения RFMEFI60719X0311).

© Кудинов И. В., Пименов А. А., Михеева Г. В., 2022

результаты исследования теплового и термонапряженного состояний конструкции, целью которого являлась разработка рекомендаций по обеспечению ее надежной работы в режимах нагрева. При проектировании подобных конструкций необходимо иметь аналитические решения соответствующих краевых задач (теплопроводности и термоупругости). При получении подобных решений с помощью как точных, так и приближенных аналитических методов возникают математические трудности, обусловленные необходимостью выполнения условий сопряжения температур и тепловых потоков на границах слоев в задачах теплопроводности или равенства напряжений и перемещений в задачах термоупругости. При выполнении этих условий в тепловых задачах возникает система многопараметрических трансцендентных уравнений, решение которой может быть получено лишь численными методами. Для задач термоупругости получаются системы алгебраических линейных уравнений относительно констант интегрирования, в которых коэффициенты включают интегралы, содержащие решения температурных задач. От вида этих решений существенно зависит сложность получения решений задач термоупругости [6].

При решении задач теплопроводности широко используется интегральный метод теплового баланса, в котором на основе определения положения фронта температурного возмущения краевая задача разделяется на две части [5–11]. Использование дополнительных искоемых функций позволяет получать аналитические решения в форме алгебраических полиномов с точностью, достаточной для инженерных приложений. Однако этот метод может быть использован лишь для однослойной конструкции. В данной работе с использованием функции Хевисайда задача теплопроводности для двухслойной конструкции сводится к задаче для однослойной конструкции с переменными (кусочно-однородными) свойствами материала. Эта задача решается интегральным методом теплового баланса [11].

При решении задач термоупругости для многослойных конструкций также применяются методы, основанные на теории обобщенных функций [11–13], что позволяет не задавать условия сопряжения. В данном случае эти условия выполняются изначально за счет использования функции Хевисайда. Интегрирование дифференциальных уравнений полученных таким путем краевых задач существенно затруднено. Анализ работ [12, 13] позволяет сделать вывод, что эти уравнения содержат дельта-функцию Дирака и ее производную (частично вырожденные дифференциальные уравнения). Их интегрирование представляет большие математические трудности, которые в случае многослойных конструкций являются непреодолимыми. В случаях, когда такие решения удается получить, они оказываются сложными и громоздкими, а следовательно, малоприспособленными для последующего использования в инженерной практике. Таким образом, при решении задач термоупругости более целесообразно применять предложенный в настоящей работе метод сопряжения, но лишь в том случае, если решения соответствующих температурных задач имеют простой вид.

1. Математическая постановка и решение задачи теплопроводности. При получении аналитических решений задач теплопроводности и термоупругости для конструкции, схема которой приведена на рис. 1, будем рассматривать лишь первые два ее слоя (кварц — олово). При этом на внешней поверхности первого слоя будем задавать граничное условие первого рода, соответствующее максимальной температуре, поддерживаемой нагревательными элементами (при электрическом нагреве). Тепловым потоком, подаваемым от расплавляемого металла (олова) к движущемуся по трубке газу (метану), вследствие его незначительности будем пренебрегать, кроме того, будем считать, что стенка стакана плоская. С учетом принятых допущений математическая постановка задачи теплопроводности для двухслойной плоской стенки (см. рис. 1) при идеальном контакте слоев имеет следующий вид (считаем, что на начальной стадии нагрева нерасплавленное

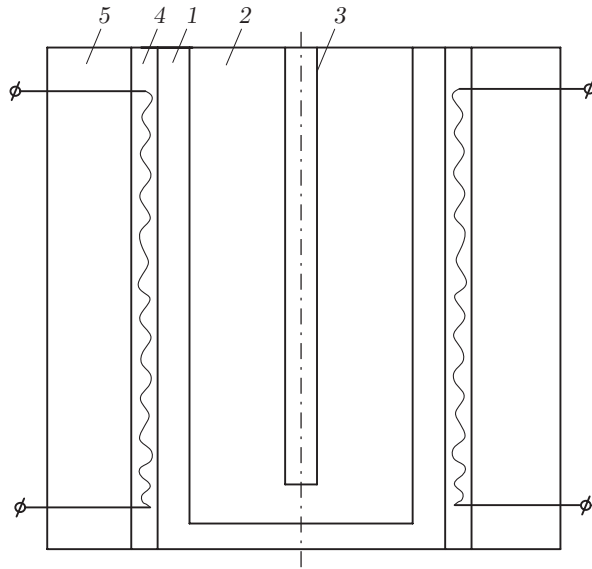


Рис. 1

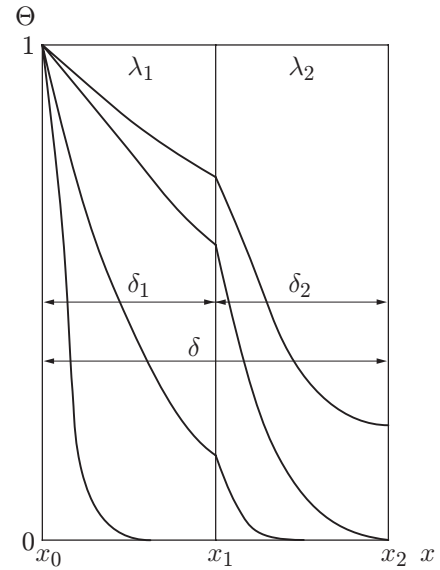


Рис. 2

Рис. 1. Схема установки, в которой проводится пиролиз метана:

1 — кварцевый стакан, 2 — расплавленный металл (олово, свинец, алюминий и др.), через который пропускается метан с целью его нагрева до температуры пиролиза, 3 — трубка, по которой подается метан, 4 — нагревательные элементы, 5 — слой тепловой изоляции для уменьшения потерь тепла

Рис. 2. Схема теплообмена в двухслойной пластине

олово занимает весь объем кварцевого стакана) (рис. 2):

$$C_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2}, \quad x_0 < x < x_1, \quad C_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2}, \quad x_1 < x < x_2, \\ \Theta_1(x, 0) = \Theta_2(x, 0) = 0, \quad \Theta_1(0, t) = 1, \quad \Theta_1(x_1, t) = \Theta_2(x_1, t), \\ \lambda_1 \frac{\partial \Theta_1(x_1, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \Theta_2(x_1, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Theta_2(x_2, t)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $\Theta_1 = (T_1 - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0)$, $\Theta_2 = (T_2 - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0)$ — безразмерные температуры первого и второго слоев; T_1, T_2 — температуры слоев, К; t — время, с; x — координата, м; $C_1 = c_1 \rho_1$, $C_2 = c_2 \rho_2$ — объемные теплоемкости слоев, Дж/(м³·К); c_1, c_2 — теплоемкости слоев, Дж/(кг·К); ρ_1, ρ_2 — плотности слоев, кг/м³; λ_1, λ_2 — теплопроводности слоев, Вт/(м·К); T_0 — начальная температура, К; $T_{\text{ст}}$ — температура первого слоя при $x = 0$, К; $\delta_1 = x_1 - x_0$ — толщина первого слоя, м; $\delta_2 = x_2 - x_1$ — толщина второго слоя, м; $\delta = \delta_1 + \delta_2$; $\Delta T = T_{\text{ст}} - T_0$; $x_0 = 0$.

Двухслойное тело с теплофизическими характеристиками C_1, C_2 и λ_1, λ_2 заменим на однослойное с переменными (кусочно-однородными) характеристиками

$$\lambda(x) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)H(x - x_1), \quad C(x) = C_1 + (C_2 - C_1)H(x - x_1). \quad (2)$$

Здесь $H(x - x_1)$ — функция Хевисайда, определяемая соотношением

$$H(x - x_1) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ 1, & x \geq x_1. \end{cases}$$

Задача (1) с учетом (2) принимает вид

$$C(x) \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} \right], \quad t > 0, \quad 0 < x < x_2; \quad (3)$$

$$\Theta(x, 0) = 0, \quad \Theta(0, t) = 1, \quad \frac{\partial \Theta_2(x_2, t)}{\partial x} = 0.$$

Вследствие необходимости дифференцирования функции Хевисайда при интегрировании уравнения (3) возникают существенные математические трудности. Для упрощения этого уравнения введем новую независимую переменную $z = z(x)$ [11]:

$$z(x) = \sum_{i=0}^1 \int_{x_i}^x \frac{1}{\lambda(x)} dx, \quad (4)$$

где величина $1/\lambda(x)$ с использованием функции Хевисайда определяется в виде

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) H(x - x_1). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и выполняя интегрирование, находим

$$z(x) = \frac{x - x_0}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (x - x_1) H(x - x_1). \quad (6)$$

Из соотношения (6) получаем следующие эквивалентные толщины слоев:

$$z_2 = \frac{x_1 - x_0}{\lambda_1} + \frac{x_2 - x_1}{\lambda_2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i}{\lambda_i}, \quad z_1 = \frac{x_1 - x_0}{\lambda_1} = \frac{\delta_1}{\lambda_1}.$$

Следовательно, новая переменная $z = z(x)$ представляет собой термическое сопротивление $R = \delta/\lambda$ соответствующего участка стенки.

Дифференцируя (4) по x , находим

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda(x)}. \quad (7)$$

Поскольку переменная z является функцией x , соотношение в квадратных скобках уравнения (3) можно представить в виде

$$\lambda(x) \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} = \lambda(x) \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial z} \frac{\partial z(x)}{\partial x}. \quad (8)$$

С учетом (7), (8) уравнение (3) принимает вид

$$C(z) \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\lambda(z)} \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad 0 < z < z_2. \quad (9)$$

Следует отметить, что в уравнении (9) не требуется дифференцирования ступенчатой функции, поэтому оно является более простым для интегрирования по сравнению с уравнением (3). Краевые условия для уравнения (9) имеют вид

$$\Theta(z, 0) = 0; \quad (10)$$

$$\Theta(0, t) = 1; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Theta(z_2, t)}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

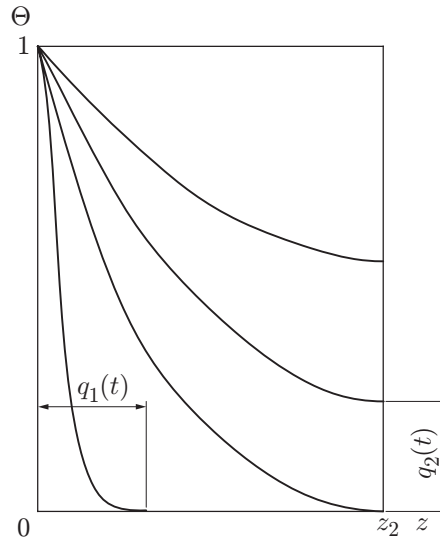


Рис. 3. Схема теплообмена в эквивалентной однослойной пластине

Найдем решение задачи (9)–(12) с помощью интегрального метода теплового баланса [11]. С использованием этого метода введем понятие фронта температурного возмущения $q_1(t)$, позволяющего разделить тепловой процесс на две стадии по времени: $0 \leq t \leq t_2$ и $t_2 \leq t < \infty$ (t_2 — момент времени, в который фронт температурного возмущения $q_1(t)$ достигает координаты $z = z_2$). При этом исходная область $0 < z < z_2$ разделяется на две подобласти: $0 \leq z \leq q_1(t)$ и $q_1(t) \leq z \leq z_2$ ($q_1(t)$ — функция, определяющая закон перемещения подвижной границы во времени) (рис. 3). На второй стадии процесса температура изменяется по всей толщине пластины. В данном случае понятие фронта температурного возмущения теряет смысл и вводится новая (дополнительная) искомая функция $q_2(t)$, характеризующая изменение температуры в точке $z = z_2$.

С учетом принятых допущений математическая постановка задачи для первой стадии процесса имеет вид

$$C(z) \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\lambda(z)} \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad 0 < z < q_1(t); \quad (13)$$

$$\Theta(0, t) = 1; \quad (14)$$

$$\Theta(q_1, t) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, t)}{\partial z} = 0; \quad (16)$$

$$q_1(0) = 0, \quad (17)$$

где соотношения (15), (16) представляют собой условия сопряжения нагретой и ненагретой зон. Так как за пределами фронта температурного возмущения $q_1(t)$ задача (13)–(17) не определена, то выполнения начального условия (10) по всей толщине пластины не требуется, поэтому оно заменяется на условие (17), которое должно выполняться лишь в одной точке $z = 0$ при $t = 0$. Кроме того, в задаче (13)–(17) отсутствует граничное условие (12), поскольку оно не влияет на процесс теплообмена на первой стадии.

Решение задачи (13)–(17) будем искать в виде

$$\Theta(z, t) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k(q_1) z^k, \quad (18)$$

где $a_k(q_1)$ — неизвестные коэффициенты; z^k — координатные функции.

Очевидно, что при использовании принятой системы координатных функций соотношение (18) удовлетворяет граничному условию (14). Для получения решения задачи (13)–(17) во втором приближении подставим (18), ограничиваясь двумя членами ряда, в граничные условия (15), (16). Имеем систему двух алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_1(q_1)$ и $a_2(q_1)$. После их определения соотношение (18) принимает вид

$$\Theta(z, t) = 1 - \frac{z}{q_1(t)} \left(2 - \frac{z}{q_1(t)} \right). \quad (19)$$

Потребуем, чтобы соотношение (19) удовлетворяло не уравнению (13), а некоторому осредненному в пределах толщины прогретого слоя ($0 < z < q_1(t)$) уравнению, т. е. интегралу теплового баланса вида [6, 7]

$$\int_0^{q_1} \left(\lambda(z) C(z) \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2} \right) dz = 0. \quad (20)$$

Аналогично (2) произведение $\lambda(z)C(z)$ записывается в виде

$$\lambda(z)C(z) = \lambda_1 C_1 + (\lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1) H(z - z_1). \quad (21)$$

Интегрируя второе слагаемое соотношения (20), получаем

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2} dz = \frac{\partial \Theta(q_1, t)}{\partial z} - \frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial z}. \quad (22)$$

Учитывая (16), а также определяя производную от функции (19) по z , находим $\partial \Theta(0, t)/\partial z = -2/q_1$ в точке $z = 0$. Тогда соотношение (22) принимает вид

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2} dz = \frac{2}{q_1}. \quad (23)$$

Подставляя (19), (21), (23) в (20), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\lambda_1 C_1 \int_0^{q_1} \left(1 - \frac{z}{q_1} \left(2 - \frac{z}{q_1} \right) \right) dz + \right. \\ \left. + \int_{z_1}^{q_1} \left(1 - \frac{z}{q_1} \left(2 - \frac{z}{q_1} \right) \right) (\lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1) H(z - z_1) dz \right] = \frac{2}{q_1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Вычисляя интегралы в (24), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $q_1(t)$:

$$\frac{dq_1}{dt} \left[q_1 \lambda_1 C_1 + (\lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1) \left(q_1 - \frac{z_1^2}{q_1} (3 - 2z_1^3) \right) H(q_1 - z_1) \right] = 6, \quad (25)$$

интегрируя которое при начальном условии $q_1(0) = 0$, для двухслойной стенки находим

$$q_1^2 \lambda_1 C_1 + (\lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1) \left(q_1^2 - 6z_1^2 \ln \frac{q_1}{z_1} - 4 \frac{z_1^3}{q_1} + 3z_1^2 \right) H(q_1 - z_1) - 12t = 0. \quad (26)$$

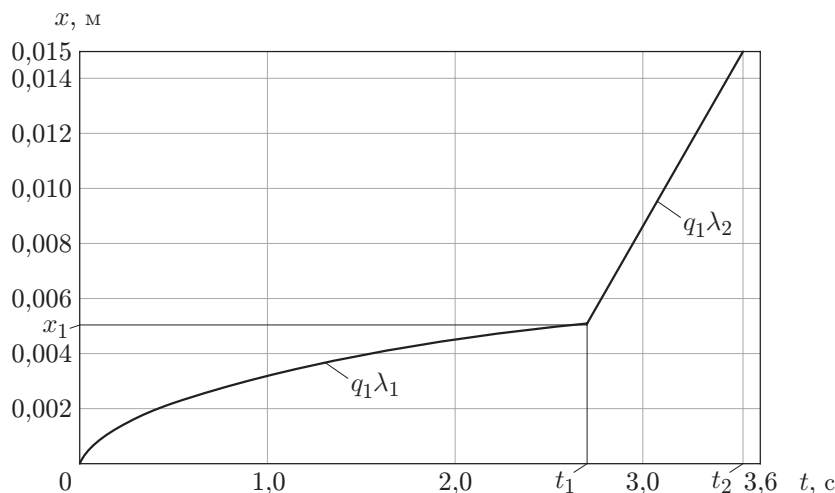


Рис. 4. Зависимость положения фронта температурного возмущения от времени t

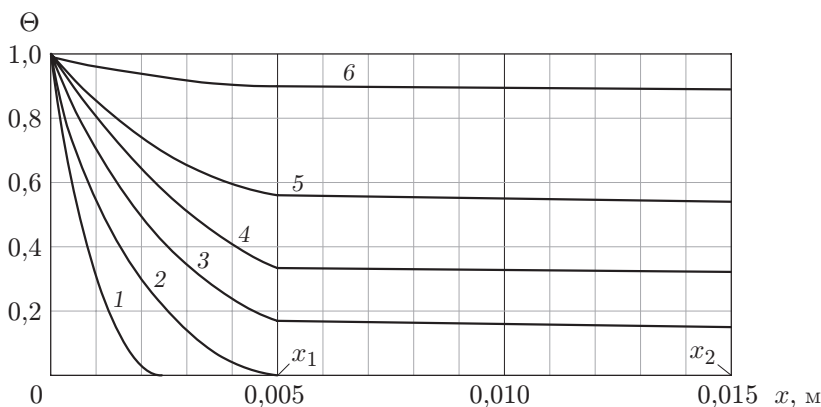


Рис. 5. Распределение температуры в двухслойной системе кварц — олово:
1 — $t = 0,5$ с, 2 — $t = 2,7$ с, 3 — $t = 12$ с, 4 — $t = 20$ с, 5 — $t = 40$ с, 6 — $t = 100$ с

Полагая в (26) $q_1 = z_2$, находим время окончания первой стадии процесса $t = t_2$. Определим положение фронта температурного возмущения $q_1(t)$ при следующих исходных данных: $T_0 = 293$ К, $T_{\text{ст}} = 1273$ К, $\delta_1 = 0,005$ м, $\delta_2 = 0,01$ м, $\rho_1 = 2136$ кг/м³, $\rho_2 = 6970$ кг/м³, $\lambda_1 = 1,5$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 49$ Вт/(м·К), $C_1 = 957$ Дж/(м³·К), $C_2 = 255$ Дж/(м³·К).

Из результатов расчетов $q_1(t)$, приведенных на рис. 4, следует, что фронт температурного возмущения достигает точки контакта $x = x_1$ через $t_1 = 2,7$ с, а координаты $x = x_2$ — через $t_2 = 3,5$ с.

Результаты расчетов температуры по формуле (19) с учетом значения функции $q_1(t)$, найденного из соотношения (26), представлены на рис. 5 (кривые 1, 2). Из анализа приведенных результатов следует, что вследствие большой теплопроводности олова температура незначительно изменяется по толщине второго слоя. Заметим, что по формуле (19) температуру можно вычислить лишь до момента времени, в который фронт температурного возмущения достигает точки $x = x_2$. Затем начинается вторая стадия процесса теплообмена, для которой математическая постановка имеет вид

$$\lambda(z)C(z) \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2}, \quad t \geq t_2, \quad 0 < z < z_2; \quad (27)$$

$$\Theta(0, t) = 1; \quad (28)$$

$$\Theta(z_2, t) = q_2(t); \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Theta(z_2, t)}{\partial z} = 0; \quad (30)$$

$$q_2(t_2) = 0, \quad (31)$$

где $q_2(t)$ — функция, определяющая изменение температуры во времени в точке $z = z_2$; t_2 — время окончания первой стадии процесса.

Следует отметить, что решение (19) задачи (13)–(17) $t = t_2$ (т. е. при $q_1(t_2) = z_2$) имеет вид

$$\Theta(z, t_2) = 1 - \frac{z}{z_2} \left(2 - \frac{z}{z_2} \right). \quad (32)$$

Соотношение (32), по сути, является начальным условием задачи (27)–(31). Однако необходимость его выполнения отсутствует. Поскольку при $t = t_2$ $q_1(t_2) = z_2$ и $q_2(t_2) = 0$, математические постановки задач (13)–(17) и (27)–(31) идентичны, следовательно, идентичны и их решения. Таким образом, в данном случае происходит непрерывный переход от решения на первой стадии процесса к решению на второй стадии без необходимости выполнения начального условия (32), так как оно будет выполнено в процессе решения задачи (13)–(17). Задача (27)–(31) имеет еще одно начальное условие (31), задаваемое не для основной функции $\Theta(z, t)$, а для некоторой дополнительной функции $q_2(t)$, введенной на второй стадии процесса. Условие (31) выполняется лишь в одной точке $z = z_2$ (при $t = t_2$), что свидетельствует об аналогии с задачей (13)–(17), в которой начальное условие (17) также выполняется лишь в одной точке $z = 0$ (при $t = 0$). Замена начального условия, выполняющегося во всей области изменения пространственной переменной, на условие, выполняющееся лишь в одной точке этой области, позволяет существенно упростить процесс получения аналитических решений как на первой, так и на второй стадии процесса, а также окончательные выражения для них.

Решение задачи (27)–(31) будем искать в виде

$$\Theta(z, t) = 1 + \sum_{k=1}^n b_k(q_2) z^k, \quad (33)$$

где $b_k(q_2)$ — неизвестные коэффициенты.

Соотношение (33) удовлетворяет граничному условию (28). Неизвестные коэффициенты $b_k(q_2)$ находятся из граничных условий (29), (30). Подставляя (33) (ограничиваясь двумя членами ряда) в (29), (30), получаем систему двух алгебраических уравнений относительно $b_1(q_2)$ и $b_2(q_2)$. Подставляя найденные из решения этой системы неизвестные коэффициенты в соотношение (33), находим

$$\Theta(z, t) = 1 - (1 - q_2(t)) \left(2 - \frac{z}{z_2} \right) \frac{z}{z_2}. \quad (34)$$

При $q_2(t) = 0$ соотношение (34) совпадает с начальным условием (32). Следовательно, даже на этой стадии решения задачи (27)–(31) начальное условие (32) выполняется.

Потребуем, чтобы соотношение (34) удовлетворяло осредненному в пределах толщины пластины уравнению (27), т. е. интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^{z_2} \left(\lambda(z) C(z) \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2} \right) dz = 0. \quad (35)$$

Вычисляя интеграл от второго слагаемого соотношения (35), получаем

$$\int_0^{z_2} \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2} dz = \frac{\partial \Theta(z_2, t)}{\partial z} - \frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial z}. \quad (36)$$

С учетом (30) соотношение (36) принимает вид

$$\int_0^{z_2} \lambda(z) C(z) \frac{\partial \Theta(z, \tau)}{\partial \tau} dz = - \frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial z}. \quad (37)$$

Подставляя (34) в (37) и вычисляя интегралы относительно неизвестной функции $q_2(t)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dq_2}{dt} = a(1 - q_2), \quad (38)$$

где $a = 3z_2/(2a_1)$; $a_1 = \lambda_2 C_2 - (1/2)(\lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1)(3 - (z_1/z_2)(z_1/z_2)^2)$.

Интегрируя уравнение (38) при начальном условии (31), находим

$$q_2(t) = 1 - e^{-a_2(t-t_1)}, \quad (39)$$

где $a_2 = 3/(a_1 z_2^2)$.

С учетом (39) соотношение (34) является решением задачи (27)–(31) во втором приближении. Результаты расчетов по формуле (34) для приведенных выше исходных данных представлены на рис. 5 (кривые 3–6).

2. Математическая постановка и решение задачи термоупругости. Полученные выше приближенные аналитические решения задач теплопроводности вследствие их простоты могут быть использованы при нахождении аналитических решений задач термоупругости для многослойных конструкций. Решение температурной задачи в плоском случае при условиях адиабатной стенки незначительно отличается от решения температурной задачи в цилиндрических координатах (для данной конструкции различие не превышает 5 %). При определении температурных напряжений такая погрешность является незначительной. Получим решение задачи термоупругости для двухслойного полого цилиндра (плоская деформация) в следующей математической постановке (рис. 6):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr} - \frac{U_1}{r^2} &= \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} \alpha_1 \frac{dT_1}{dr}, & r_0 \leq r \leq r_1, \\ \frac{d^2 U_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_2}{dr} - \frac{U_2}{r^2} &= \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \alpha_2 \frac{dT_2}{dr}, & r_1 \leq r \leq r_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь U_i , T_i , ν_i , α_i ($i = 1, 2$) — перемещения, температуры, коэффициенты Пуассона и линейного расширения слоев соответственно; r — радиальная координата; $r_2 - r_1 = \delta_1$ — толщина первого слоя; $r_1 - r_0 = \delta_2$ — толщина второго слоя; T_1 , T_2 — температуры, найденные по формулам (19), (34) соответственно.

Интегрируя уравнения (40), находим [14, 15]

$$U_1 = \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} \frac{\alpha_1}{r} \int_{r_0}^r T_1 r dr + C_{11} r + \frac{C_{12}}{r}, \quad U_2 = \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \frac{\alpha_2}{r} \int_{r_1}^r T_2 r dr + C_{21} r + \frac{C_{22}}{r}, \quad (41)$$

где C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} — константы интегрирования.

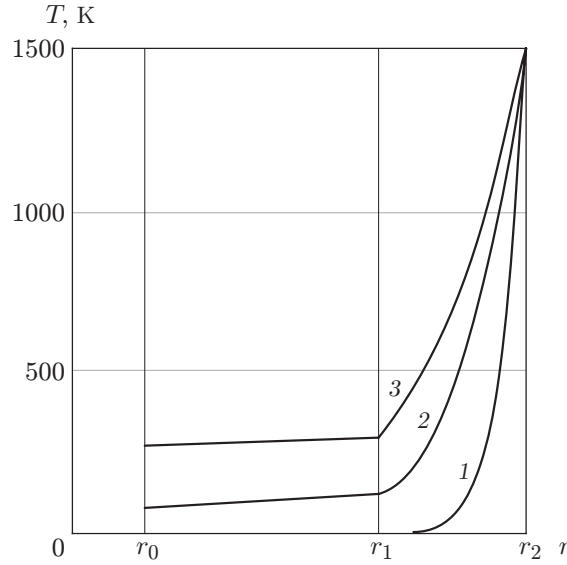


Рис. 6. Схема теплообмена в задаче определения температурных напряжений:

1 — $t = 2,7$ с, 2 — $t = 4,2$ с, 3 — $t = 8,3$ с

Используя формулы (41), для радиальных, окружных и осевых напряжений получаем следующие соотношения [14, 15]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r1} &= -\frac{\alpha_1 E_1}{1 - \nu_1} \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r T_1 r dr + \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left(\frac{C_{11}}{1 - 2\nu_1} - \frac{C_{12}}{r^2} \right), \\
 \sigma_{r2} &= -\frac{\alpha_2 E_2}{1 - \nu_2} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r T_2 r dr + \frac{E_2}{1 + \nu_2} \left(\frac{C_{21}}{1 - 2\nu_2} - \frac{C_{22}}{r^2} \right), \\
 \sigma_{\theta 1} &= \frac{\alpha_1 E_1}{1 - \nu_1} \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r T_1 r dr - \frac{\alpha_1 E_1 T_1}{1 - \nu_1} + \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left(\frac{C_{11}}{1 - 2\nu_1} + \frac{C_{12}}{r^2} \right), \\
 \sigma_{\theta 2} &= \frac{\alpha_2 E_2}{1 - \nu_2} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r T_2 r dr - \frac{\alpha_2 E_2 T_2}{1 - \nu_2} + \frac{E_2}{1 + \nu_2} \left(\frac{C_{21}}{1 - 2\nu_2} + \frac{C_{22}}{r^2} \right); \\
 \sigma_{z1} &= -\frac{\alpha_1 E_1 T_1}{1 - \nu_1} + \frac{2\nu_1 E_1 C_{11}}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}, \quad \sigma_{z2} = -\frac{\alpha_2 E_2 T_2}{1 - \nu_2} + \frac{2\nu_2 E_2 C_{21}}{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Константы интегрирования находятся из граничных условий

$$\sigma_{r1}(r_0) = 0, \quad \sigma_{r2}(r_2) = 0; \tag{44}$$

$$\sigma_{r1}(r_1) = \sigma_{r2}(r_1), \quad U_1(r_1) = U_2(r_1), \tag{45}$$

где условия (44) обозначают отсутствие радиальных напряжений в граничных точках r_0 и r_2 , условия (45) — непрерывность радиальных напряжений и перемещений в точке контакта слоев $r = r_1$.

Подставляя (42) в (44), (45), получаем систему четырех алгебраических линейных уравнений относительно констант интегрирования C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} .

Задача термоупругости решалась при следующих значениях параметров: $\nu_1 = 0,44$, $E_1 = 35 \cdot 10^9$ Па, $\alpha_1 = 26,7 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$, $\nu_2 = 0,17$, $E_2 = 73 \cdot 10^9$ Па, $\alpha_2 = 0,55 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$, $\delta_1 = 0,005$ м, $\delta_2 = 0,01$ м.

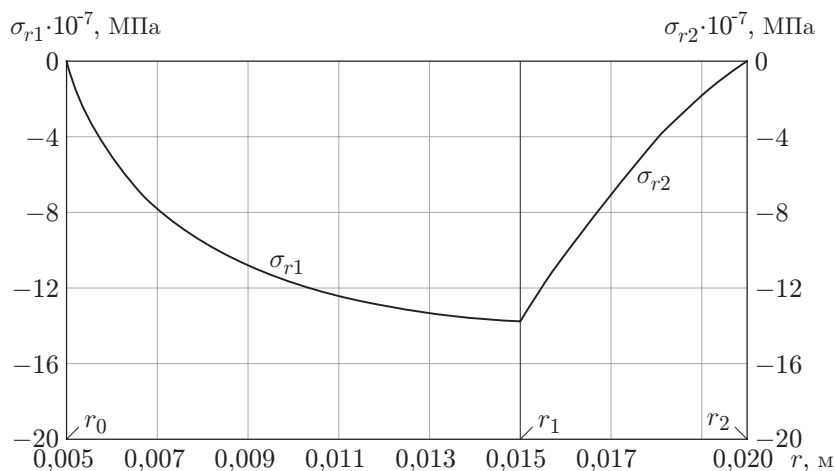


Рис. 7. Распределение радиальных напряжений в системе олово (σ_{r1}) — кварц (σ_{r2}) (см. кривую 3 на рис. 5)

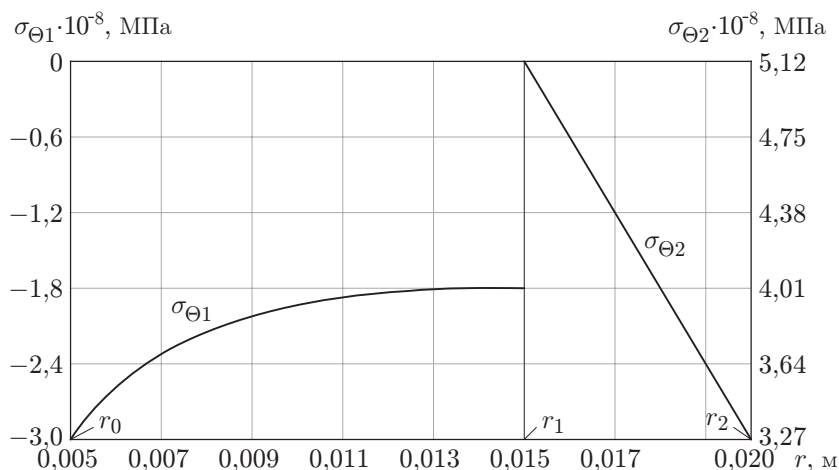


Рис. 8. Распределение окружных напряжений в системе олово ($\sigma_{\theta1}$) — кварц ($\sigma_{\theta2}$) (см. кривую 3 на рис. 5)

С использованием приведенных значений параметров получены следующие значения констант интегрирования: $C_{11} = 0,176 \cdot 10^{-3}$, $C_{12} = 0,367 \cdot 10^{-7}$, $C_{21} = 0,204 \cdot 10^{-2}$, $C_{22} = 0,119 \cdot 10^{-5}$.

Для расчета температурных напряжений по формулам (42), (43) используем распределение температуры в момент времени, когда слой олова, находясь в твердом состоянии, имеет температуру, близкую к температуре плавления. Выбор этого момента времени объясняется тем, что олово имеет значительно больший коэффициент линейного расширения, чем кварц. Так как олово находится внутри цилиндрического кварцевого стакана, то при их совместном нагреве температурное расширение олова будет более значительным по сравнению с расширением кварца, что приводит к возникновению больших температурных напряжений в слое кварца. Результаты расчетов напряжений по формулам (42), (43) подтверждают данный вывод (рис. 7–9). Представленные на рис. 7–9 результаты получены для момента времени нагрева $t = 12$ с, в который температура слоя олова составляет 473 К, что не превышает температуру его плавления 503 К.

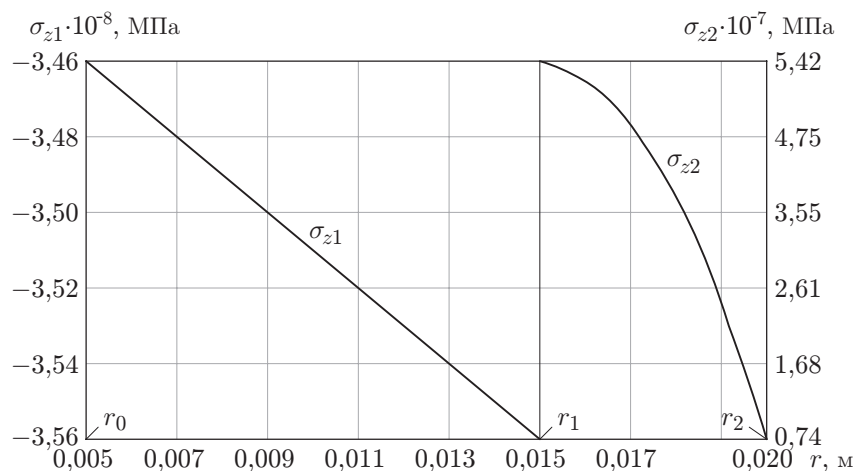


Рис. 9. Распределение осевых напряжений в системе олово (σ_{z1}) — кварц (σ_{z2}) (см. кривую 3 на рис. 5)

3. Анализ результатов расчетов. Анализ результатов расчетов, приведенных на рис. 7–9, позволяет сделать вывод, что радиальные температурные напряжения являются сжимающими, их максимальное значение имеет место в точке контакта и составляет $\sigma_{r1} = \sigma_{r2} = 13,8 \cdot 10^7$ Па (см. рис. 7).

Окружные температурные напряжения являются сжимающими в слое олова и растягивающими в слое кварца (см. рис. 8).

В точке контакта слоев, где происходит скачок (разрыв) напряжений, наблюдается максимальное растягивающее напряжение, составляющее $\sigma_{r2} = 5,12 \cdot 10^8$ Па. Эта величина напряжений на порядок превышает предел прочности на растяжение для данного материала $\sigma_B = 5,12 \cdot 10^7$ Па. Осевые температурные напряжения, также имеющие разрыв в точке контакта слоев, являются сжимающими для слоя олова и растягивающими для слоя кварца (см. рис. 9).

Максимальное значение растягивающего напряжения имеет место в точке контакта слоев и составляет $\sigma_{r2} = 5,42 \cdot 10^7$ Па. Это значение превышает предел прочности на растяжение для данного материала.

Следует отметить, что по формулам (42), (43) вычисляются квазистатические температурные напряжения, т. е. без учета скорости изменения температуры во времени. Полученные значения температурных напряжений зависят лишь от пространственного распределения температуры для данного момента времени нагрева. Выполненные расчеты показали, что возможность уменьшения температурных напряжений путем увеличения времени нагрева отсутствует: напряжения будут возникать даже при нагреве слоев до одинаковой температуры. Таким образом, для создания режима работы установки, в котором значения напряжения находятся в допустимых пределах, расплавленное олово необходимо заливать в кварцевый стакан, предварительно нагретый до температуры, равной температуре плавления олова.

Заключение. С использованием теории обобщенных функций и интегрального метода теплового баланса получено аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для двухслойной конструкции. Разделение процесса теплообмена на две стадии путем определения положения фронта температурного возмущения позволяет не задавать начальное условие на всей ширине конструкции, заменив его начальным условием, выполняемым лишь в точках $z = 0$ (на первой стадии процесса) и $z = z_2$ (на второй стадии). Это позволяет избежать используемой в классических методах линейной суперпозиции

частных решений, которая приводит к существенному усложнению аналитических решений и их плохой сходимости при малых значениях времени. В данном случае для каждой стадии получаются простые приближенные аналитические решения, позволяющие проводить исследование температурного состояния конструкции практически во всем диапазоне времени. Для недопущения появления превышающих предел прочности напряжений рекомендуется обеспечивать необходимый зазор между оловянной заготовкой и кварцевым стаканом; использовать металл в кусочном или порошкообразном виде; осуществлять предварительный нагрев металла до температуры, равной температуре плавления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баранов Н. Н.** Нетрадиционные источники и методы преобразования энергии. М.: Издат. дом МЭИ, 2012.
2. **Фортов В. Е.** Энергетика в современном виде / В. Е. Фортов, О. С. Попель. М.: Издат. дом "Интеллект", 2011.
3. **Ячиков И. М., Миронова Г. А., Петин С. Н.** Математическое моделирование теплового состояния расплава в реакторе с кипящим слоем // Прил. математики в экон. и техн. исслед. 2007. № 1. С. 170–176.
4. **Serban M., Lewis M. A., Marshall C. L., Doctor R. D.** Hydrogen production by direct contact pyrolysis of natural gas // Energy Fuels. 2003. V. 17, N 3. P. 705–713.
5. **Upham D. C., Agarwal V., Khechfe A., et al.** Catalytic molten metals for the direct conversion of methane to hydrogen and separable carbon // Science. 2017. V. 358, iss. 6365. P. 917–921.
6. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы нестационарной теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. М.: Высш. шк., 1978.
7. **Гудмен Т.** Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена: Сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41–96.
8. **Кудинов В. А., Кудинов И. В., Котова Е. В., Кузнецова А. Э.** Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 6. С. 912–922.
9. **Федоров Ф. М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
10. **Кудинов И. В., Котова Е. В., Кудинов В. А.** Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомым функций // Сиб. журн. вычисл. математики. 2019. Т. 22, № 2. С. 153–165.
11. **Кудинов И. В., Кудинов В. А., Скворцова М. П.** Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 4. С. 669–680.
12. **Коляно Ю. М.** Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1978. Вып. 7. С. 7–11.
13. **Коляно Ю. М., Попович В. С.** Нестационарное температурное поле в состыкованных пластинах // Физика и химия обраб. материалов. 1975. № 5. С. 16–23.
14. **Тимошенко С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1979.
15. **Коваленко А. Д.** Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965.

*Поступила в редакцию 4/VIII 2020 г.,
после доработки — 27/X 2020 г.
Принята к публикации 30/XI 2020 г.*