

Потери полного давления в воздушно-газовом канале в основном связаны с переходом сверхзвукового течения в дозвуковое на участке 2—3 (см. рис. 1). При тепловом дросселировании (с увеличением β_T) потери уменьшаются. Коэффициент потерь полного давления на всей длине канала $\sigma_{2-4}^* = p_4^*/p_2^*$ составляет 0,4—0,45 в диапазоне $\beta_T = 0,4 \div 1$. Коэффициент потерь полного давления в камере сгорания, учитывающий и гидравлические потери на коллекторе 2, составляет 0,85—0,88 при $\beta_T = 0,4 \div 1$ при различных \bar{g}_{H_2} . Коэффициент потерь в скачках равен примерно 0,45 и практически не зависит от β_T (из-за промежуточного гидравлического дросселирования).

Выводы. В условиях сверхзвукового течения воздуха в исследованной камере при $p_R = (0,2 \div 0,4) \cdot 10^2$ кПа, $M = 1,5 \div 2$ самовоспламенение водородных струй, истекающих по потоку воздуха, происходит при $T_E^* \geq 1050$ К.

Стабилизация горения распыленного в воздухе (или в водородно-воздушном факеле) керосина в рассмотренных условиях реализуется при $\beta_{H_2} \geq 0,004$, а для зажигания керосина необходим $\beta_{H_2} \geq 0,04$. При стабилизации горения распыленного углеводородного топлива водородным факелом происходит существенное улучшение зажигания жидкого топлива с интенсификацией его горения.

Поступила в редакцию 10/XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Груздев, Н. А. Малышевская, А. В. Талантов. ФГВ, 1979, 15, 2, 170.
2. J. J. Isaak, R. A. Cookson. AIAA J., 1973, 11, 7, 1036.
3. R. A. Cookson, J. J. Isaak. AIAA Paper 1974, N 74—1160.
4. Ю. М. Аннушкин, Г. Ф. Маслов. ФГВ, 1980, 16, 1, 26.
5. P. Contensou, R. Marquet, C. Huet. ICAS Paper, 1972, N 24.

УДК 536.46 : 517.94

АСИМПТОТИКО-ТЕПЛОВАЯ ТЕОРИЯ ЗАЖИГАНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЕЩЕСТВ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ РЕАКЦИЯМИ

И. С. Любченко, В. В. Матвеев, Г. Н. Марченко
(Казань)

В тепловой теории зажигания обычно рассматриваются реагирующие системы, в которых протекает только одна экзотермическая реакция [1—3]. Реальные же процессы, как правило, характеризуются многостадийностью, и в общем случае при анализе макрокинетических закономерностей процесса зажигания необходимо учитывать специфику и характеристики каждой стадии. По этой причине результаты, полученные в рамках тепловой теории зажигания конденсированных веществ, применимы лишь в предельных случаях, когда скорость процесса определяется кинетикой одной из стадий. В общем же случае наличие нескольких реакций приводит к усложнению закономерностей процесса зажигания.

Цель настоящего исследования — разработка асимптотико-тепловой теории зажигания конденсированных веществ на случай одновременного протекания двух последовательных несамоускоряющихся экзотермических реакций.

Одномерная задача зажигания нелетучих взрывчатых систем, способных к двухстадийному последовательному превращению $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$, при ряде упрощающих предположений тепловой теории зажигания [1]

может быть описана следующей системой уравнений, граничных и начальных условий [4]:

$$T_t = \kappa T_{xx} + c^{-1} \sum_{i=1}^2 Q_i a_{i-1} \Phi_i, \quad \Phi_i = k_i \exp[-E_i/(RT)], \quad i = 1, 2,$$

$$a_{0i} = -a_0 \Phi_i, \quad a_{2i} = a_i \Phi_i, \quad a_i = 1 - a_0 - a_2, \quad (1)$$

$$x = 0: -\lambda T_x = F(t, T); \quad x = \infty: T = T_0; \quad t = 0: T = T_0, \quad a_0 = 1.$$

Здесь T_0 , T — начальная и текущая температуры вещества; t — время; x — пространственная координата; a_i — массовые доли веществ A_i ($i = 0, 1, 2$); c , κ , λ — теплоемкость, коэффициенты температуропроводности и теплопроводности вещества (постоянные); Q_i , k_i , E_i — тепловой эффект, предэкспонент и энергия активации i -й стадии реакции $A_{i-1} \rightarrow A_i$, $i = 1, 2$; R — универсальная газовая постоянная; F — функция, характеризующая условия теплообмена зажигаемого вещества с внешним источником тепла. При зажигании вещества переменным тепловым потоком плотности $q(t)$ функция $F = q(t)$, а в случае конвективного теплообмена необходимо положить $F = \alpha(T_c - T)$, где α , T_c — коэффициент теплообмена и температура окружающей среды (постоянные).

В безразмерных переменных

$$\Theta = T/T_0, \quad \xi = x/x_0, \quad \tau = \kappa t/x_0^2, \quad \eta_1 = 1 - a_0, \quad \eta_2 = a_2, \quad \varepsilon = (RT_0)/(E_1 + E_2),$$

$$\gamma = cRT_0^2[(E_1 + E_2)(Q_1 + Q_2)]^{-1}, \quad \omega = \rho(Q_1 + Q_2)(k_1 + k_2)x_0^2/\lambda T_0,$$

$$\Theta_* = T_*/T_0, \quad f = x_0 F/\lambda T_0, \quad \sigma_E = E_1/(E_1 + E_2), \quad (2)$$

$$\sigma_Q = Q_1/(Q_1 + Q_2), \quad \nu_k = k_1/(k_1 + k_2),$$

где T_* — масштабная температура, а x_0 — толщина теплового слоя, задача (1) имеет вид

$$\Theta_\tau - \Theta_{\xi\xi} = \varepsilon \gamma^{-1} [\sigma_Q \eta_{1\tau} + (1 - \sigma_Q) \eta_{2\tau}], \quad \Phi_* = \exp[(\Theta - \Theta_*)/\varepsilon \Theta \Theta_*],$$

$$\eta_{1\tau} = \omega \gamma \varepsilon^{-1} \sigma_k (1 - \eta_1) \Phi_*^{\sigma_E} \exp[-\sigma_E/\varepsilon \Theta_*],$$

$$\eta_{2\tau} = \omega \gamma \varepsilon^{-1} (1 - \sigma_k) (\eta_1 - \eta_2) \Phi_*^{1-\sigma_E} \exp[-(1 - \sigma_E)/\varepsilon \Theta_*], \quad (3)$$

$$\xi = 0: -\Theta_\xi = f(\tau, \Theta); \quad \xi = \infty: \Theta = 1; \quad \tau = 0: \Theta = 1, \quad \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

Следует заметить, что для активированных реакций $\varepsilon \ll 1$, $\gamma \ll 1$, масштабная температура Θ_* является искомой величиной, а x_0 выбирается таким образом, чтобы функция f содержала наименьшее число параметров и была бы порядка $O(1)$. Например:

$$q(t) = q_0 = \text{const}, \quad x_0 = (\lambda T_0)/q_0, \quad f = 1, \quad (4)$$

$$q(T(t)) = \alpha(T_c - T), \quad x_0 = (\lambda T_0)/(\alpha T_c), \quad f = 1 - \sigma_c \Theta, \quad \sigma_c = T_0/T_c. \quad (5)$$

Используя метод составных асимптотических разложений [5—8], будем искать пространственно-временное распределение температуры при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$\Theta(\tau, \xi, \varepsilon) = \bar{\Theta}(\tau, \xi) + \sigma_Q \Theta_1(\tau, \xi, \varepsilon) + (1 - \sigma_Q) \Theta_2(\tau, \xi, \varepsilon),$$

$$\Theta_i(\tau, \xi, \varepsilon) = \varepsilon \Theta_*^2 [\varphi_i(z, y) + \nu_0(\varepsilon) \psi_i(z, w)] + \dots, \quad (6)$$

$$z = z_0 + (\tau - \tau^*)/\nu_1(\varepsilon), \quad y = \xi/\nu_1^{1/2}(\varepsilon), \quad w = \xi/\nu_2(\varepsilon),$$

где τ_* , z_0 , $\nu_K(\varepsilon)$ ($K = 0, 1, 2$) — соответственно искомые безразмерное время задержки зажигания, константа и функции малого параметра ε , удовлетворяющие неравенствам

$$\nu_2(\varepsilon) \ll \nu_1^{1/2}(\varepsilon) \ll 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

Функции Θ_i в (6) характеризуют вклад в температурном поле i -ых ста-

дий реакций, а $\bar{\Theta}$ является решением задачи (3) при $\varepsilon = 0$, т. е. на инертной стадии прогрева

$$\bar{\Theta}_\tau = \bar{\Theta}_{\xi\xi}, \quad \xi = \infty : \bar{\Theta} = 1; \quad \tau = 0 : \bar{\Theta} = 1; \quad \xi = 0 : -\bar{\Theta}_\xi = f(\tau, \bar{\Theta}). \quad (8)$$

Асимптотическое приближение (6) указывает на наличие в окрестности $\xi = 0, \tau = \tau_*$ временного и пространственных пограничных слоев, а из (8), согласно принципа максимума [9], следуют неравенства $\bar{\Theta}(\tau_*, 0) > \bar{\Theta}(\tau, 0) > \bar{\Theta}(\tau, \xi)$ при $\tau_* > \tau, \xi > 0$ и функция Φ_* в (3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ существенно отлична от нуля лишь в окрестности $\Theta = \Theta_*$. Поэтому определим масштабную температуру в виде

$$\Theta_* = \bar{\Theta}(\tau_*, 0). \quad (9)$$

Покажем, что в случае кондуктивного теплообмена (4) справедливо неравенство $\nu_0(\varepsilon) \ll 1, \varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, с одной стороны, $\Delta = f(\tau, \Theta) - f(\tau, \bar{\Theta}) = 0$, а с другой — из (3) и (8) по определению Δ и разложению (6) находим

$$\begin{aligned} \Delta = -(\Theta_\xi - \bar{\Theta}_\xi)|_{\xi=0} = -\varepsilon\nu_1^{-1/2}\Theta_*^2 \{ & \sigma_Q [\varphi_{1y}(z, 0) + \\ & + \nu_0\nu_1^{1/2}\nu_2^{-1}\psi_{1w}(z, 0)] + (1 - \sigma_Q) [\varphi_{2y}(z, 0) + \\ & + \nu_0\nu_1^{1/2}\nu_2^{-1}\psi_{2w}(z, 0)] + \dots \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, равенство $\Delta = 0$ будет справедливым, если положить

$$\nu_0 = \nu_2\nu_1^{-1/2}, \quad \varphi_{iy}(z, 0) = -\psi_{iw}(z, 0), \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

а с учетом (7) и (11) имеем $\nu_0 \ll 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выразим функцию Φ_* через z и w , подставляя (6) в (3). С учетом (7), (9) и неравенства $\nu_0 \ll 1$ определим параметры ν_1, ν_2 :

$$\nu_1 = \varepsilon\Theta_*^2 (d\Theta_*/d\tau_*)^{-1}, \quad \nu_2 = \varepsilon\Theta_*^2 f_*^{-1}, \quad f_* = f(\tau_*, \Theta_*) \quad (12)$$

и после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Phi_* &= \Phi_0 + \dots, \quad \Phi_0 = \Phi_1 \exp(-z_0 - w), \\ \Phi_1 &= \exp[z + \sigma_Q\varphi_1(z, 0) + (1 - \sigma_Q)\varphi_2(z, 0)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, параметры ν_K ($K = 0, 1, 2$) полностью определены, а из (10) с учетом (12) следует оценка

$$|\Delta| = 0(\delta), \quad \delta = [\varepsilon\Theta_*^2 (d\Theta_*/d\tau_*)]^{1/2} \ll 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Поэтому соотношения (11) и полученные ниже формулы будут иметь место лишь для таких законов теплообмена между внешним источником и веществом, для которых выполняется неравенство

$$|\Delta| \ll \delta, \quad \delta = 0(\varepsilon^{1/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (15)$$

Покажем, что (15) справедливо в случае конвективного теплообмена (5). Действительно, используя (5), найдем $|\Delta| = \sigma_c |\Theta - \bar{\Theta}| < |\Theta - \bar{\Theta}|$ и в согласии с (6) имеем $|\Delta| = 0(\varepsilon)$, т. е. неравенство (15) выполняется. Заметим далее, что функция Φ_0 из (13) в «растянутой» пространственной переменной y с учетом (7) является трансцендентно малой величиной, а поэтому при подстановке разложения (6) в (3) в переменных z и y получим

$$\varphi_{iz} = \varphi_{iw}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

При этой же подстановке, согласно (7), (13) и (16), в переменных z и w будем иметь

$$\begin{aligned} -\psi_{1ww} &= A_1(1 - \eta_1) \Phi_1^{\sigma_E} \exp(-\sigma_E w), \\ -\psi_{2ww} &= A_2(\eta_1 - \eta_2) \Phi_1^{1-\sigma_E} \exp[-(1 - \sigma_E)w], \\ -\psi_{jww} &= \gamma_0 \gamma^{-1} \eta_{jz}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (17)$$

где функция $\Phi_1(z)$ определена в (13) и введены обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= f_*^{-1} \omega \sigma_k \left[(\varepsilon \Theta_*^2) / (d\Theta_* / d\tau_*) \right]^{1/2} \exp \left[-\sigma_E (z_0 + (\varepsilon \Theta_*)^{-1}) \right], \\ A_2 &= f_*^{-1} \omega (1 - \sigma_k) \left[(\varepsilon \Theta_*^2) / (d\Theta_* / d\tau_*) \right]^{1/2} \exp \left[-(1 - \sigma_E) (z_0 + (\varepsilon \Theta_*)^{-1}) \right], \\ \gamma_0 &= (f_* \Theta_*)^{-1} [\varepsilon (d\Theta_* / d\tau_*)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Запишем начальные и граничные условия к уравнениям (16), (17). Из (3), (6) и (7) следует, что

$$\varphi_i(-\infty, y) = \varphi_i(z, \infty) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

$$\eta_j(-\infty, \xi) = \psi_j(z, \infty) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

Применяя к (16) интегральное преобразование Фурье, получим с учетом (19) соотношения Абеля [10]

$$\varphi_i(z, 0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z \varphi_{iy}(s, 0) \frac{ds}{\sqrt{z-s}}, \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

Рассмотрим далее решение системы (17), предполагая, что зажигание имеет место в невырожденном режиме [1], т. е. при условии $\gamma \gamma_0^{-1} \ll 1$, отвечающем малым глубинам превращения $\eta_i \ll 1$, $i = 1, 2$. Тогда функции $\eta_i(\tau, \xi, \varepsilon)$ можно искать в виде

$$\eta_i = \gamma \gamma_0^{-1} h_i(z, w) + \dots, \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

и в первом уравнении (17) пренебречь величиной η_i по сравнению с единицей. Полагая $A_1 = 1$, найдем из (18) z_0 и величину β по формулам

$$z_0 = -(\varepsilon \Theta_*)^{-1} + \sigma_E^{-1} \ln \left\{ \omega \sigma_k f_*^{-1} \left[(\varepsilon \Theta_*^2) / (d\Theta_* / d\tau_*) \right]^{1/2} \right\}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma \gamma_0^{-1} A_2(z_0) = \gamma (1 - \sigma_k) \left\{ \frac{\sigma_E^{-1}}{(\varepsilon \sigma_k^2 f_*^{-2})^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \omega^{2\sigma_E^{-1}} \left[\Theta_*^{-2} (d\Theta_* / d\tau_*) \right]^{1/\sigma_E} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

а уравнения (17) представим в виде

$$\begin{aligned} -\psi_{1ww} &= \Phi_1^{\sigma_E} \exp(-\sigma_E w), \quad -w_{2ww} = \beta (h_1 - \\ &- h_2) \Phi_1^{1-\sigma_E} \exp[-(1 - \sigma_E) w], \quad -\psi_{jww} = h_{jz}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (25)$$

Система уравнений (25) при условиях (20) с учетом (22) легко интегрируется и дает

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\sigma_E^{-2} \Phi_1^{\sigma_E} \exp(-\sigma_E w), \quad h_1 = \exp(-\sigma_E w) \int_{-\infty}^z \Phi_1^{\sigma_E}(s) ds, \\ h_2 &= \beta \exp(-w) \int_{-\infty}^z \left\{ \Phi_1^{1-\sigma_E}(s) \int_{-\infty}^s \Phi_1^{\sigma_E}(u) du \cdot \exp[\beta \exp[- \right. \\ &\quad \left. -(1 - \sigma_E) w] \int_z^s \Phi_1^{1-\sigma_E}(v) dv \right\} ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение для функции ψ_2 , определяемое двойным интегралом по переменной w от h_{2z} , здесь не приводится из-за громоздкости. Однако, опуская промежуточные выкладки, запишем в явном виде выражение для $\psi_{2w}(z, 0)$:

$$\psi_{2w}(z, 0) = -\sigma_E^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{1 - \sigma_E}\right) \int_{-\infty}^z \Phi_1^{\sigma_E}(u) \left[\gamma^* \left(\frac{\sigma_E}{1 - \sigma_E}, \beta N(z, u) \right) \right] du, \quad (27)$$

где

$$\Gamma(n) = \gamma(n, \infty), \quad \gamma(n, x) = \int_0^x t^{n-1} \exp(-t) dt,$$

$$\gamma^*(n, x) = x^{-n} \Gamma^{-1}(n) \gamma(n, x), \quad N(z, u) = \int_u^z \Phi_1^{1-\sigma_E}(s) ds. \quad (28)$$

Введем новую функцию $\varphi(z) = \sigma_Q \varphi_1(z, 0) + (1 - \sigma_Q) \varphi_2(z, 0)$, относительно которой, согласно (11) и (21), имеем соотношение

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z [\sigma_Q \psi_{1w}(s, 0) + (1 - \sigma_Q) \psi_{2w}(s, 0)] \frac{ds}{\sqrt{z-s}}. \quad (29)$$

Подставляя в (29) выражения для ψ_{iw} из (26) и (27) и учитывая (28), имеем нелинейное интегральное уравнение относительно функции $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z R(s, \varphi(s)) \frac{ds}{\sqrt{z-s}}, \quad (30)$$

где ядро R с учетом равенства $\gamma^*(n, 0) = \Gamma^{-1}(n+1)$ может быть представлено в виде

$$N(z, u) = \int_u^z \exp[(1 - \sigma_E)(v + \varphi(v))] dv, \quad R(z, \varphi(z)) =$$

$$= \sigma_E^{-1} \exp[\sigma_E(z + \varphi(z))] -$$

$$- \frac{1 - \sigma_Q}{\sigma_E} \Gamma\left(\frac{1}{1 - \sigma_E}\right) \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^z \exp\{\sigma_E[u + \varphi(u)]\} \gamma^*\left(\frac{\sigma_E}{1 - \sigma_E}, \beta N(z, u)\right) du. \quad (31)$$

Для предельных значений $\beta (\beta \gg 1, \beta \ll 1)$ из (31) имеем

$$\beta \gg 1: R = R_0 + \dots; \quad \beta \ll 1: R = \sigma_Q R_0 + \dots,$$

$$R_0 = \sigma_E^{-1} \exp\{\sigma_E[z + \varphi(z)]\}. \quad (32)$$

Особенностью уравнения (30) с ядром (32) является тот факт, что его решение существует лишь в области $z \in (-\infty, z^0)$, а при $z \rightarrow z^0$ функция $\varphi(z) \rightarrow \infty$. Методом вычитания особенностей, сохраняющим формулу Ньютона — Лейбница, вычислим асимптотику $\varphi(z)$ при $z \rightarrow z^0$ для ядра (32):

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\sigma_E} \ln(z^0 - z) + \frac{1}{\sigma_E} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sigma_E} \right)^{1/2} \right] + \frac{d_0}{\sigma_E} + O \left\{ \left[\frac{(z^0 - z)}{\sigma_E} \right]^{1/2} \right\},$$

$$z^0 = -\frac{1}{\sigma_E} [d_0 + \ln(\chi \sigma_E^{-1/2})], \quad \chi = \begin{cases} 1, & \beta \gg 1, \\ \sigma_Q, & \beta \ll 1. \end{cases} \quad (33)$$

В частном случае $\beta \gg 1, \chi = 1, \sigma_E = 1$ из (33) имеем $z^0 = -d_0$, причем интегрирование уравнения (30) на ЭВМ в этом случае дает $z^0 = -0,37$ ($d_0 = 0,37$), $\varphi(z^0) = 0,7 \cdot 10^{46}$. В [11] в этом случае получено значение $z^0 = -0,431$ ($d_0 = 0,431$), а проведенный в данной работе расчет дает величину $\varphi(-0,431) = 1,8974$, т. е. действительно при $z \rightarrow z^0$ в общем случае (30), (32) функция $\varphi(z)$ неограниченно возрастает (рис. 1)¹. С другой стороны, в момент зажигания $\tau = \tau_*$ из (6) находим $\bar{z}_* = z_0$.

Таким образом, принимая за момент зажигания момент «взрыва температуры» на поверхности зажигаемого вещества, необходимо положить $z^0 = z_0$. Для рассматриваемых предельных значений параметра β из (23) и (33) получим трансцендентное уравнение для определения времени за-

¹ Липня I соответствует условиям $\sigma_E = 0,45, \sigma_Q = 0,90$, а 2 — $\sigma_E = 0,35, \sigma_Q = 0,10$.

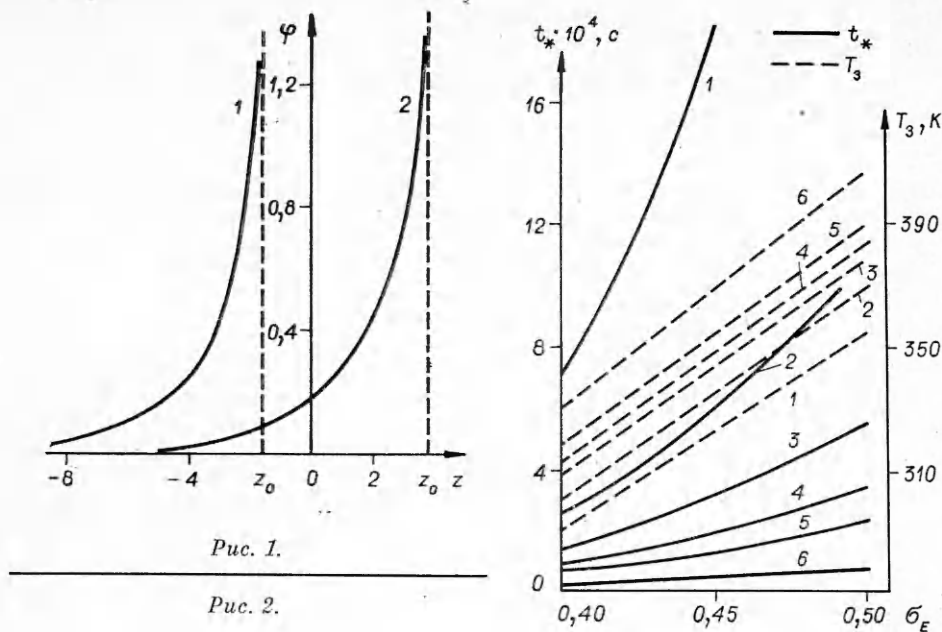


Рис. 1.

Рис. 2.

держки зажигания τ_*

$$\frac{\sigma_E}{\Theta_*} = \varepsilon \ln \left[\frac{\varepsilon^{1/2} \omega \chi \sigma_h \Theta_{z_0}}{f_* \sigma_E^{1/2}} \left(\frac{d\Theta_*}{d\tau_*} \right)^{-1/2} \exp(d_0) \right]. \quad (34)$$

При динамических режимах зажигания $F = q(t)$ с участками, где $dq/dt < 0$, возможно отсутствие решения (34), что с физической точки зрения говорит о недостаточном для зажигания количестве энергии, поступающем в вещество. Эта возможность при наличии веток с $dq/dt < 0$ в настоящей работе не рассматривается, так как критические явления при зажигании представляют самостоятельный интерес.

Найдем асимптотическое выражение для определения температуры зажигания $\Theta_\varepsilon \equiv \Theta(\tau_*, 0, \varepsilon)$. Подставляя (33) в (26) для ψ_1 и полагая $z^0 - z = \varepsilon$, находим асимптотику ψ_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\psi_1(z^0 - \varepsilon, 0) = -(2\chi\sigma_E^2)^{-1} (\pi/\varepsilon)^{1/2} [1 + O(\varepsilon^{1/2})], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (35)$$

Из (6) и (9) с учетом (11) и (12) имеем

$$\Theta_\varepsilon = \Theta_* + \varepsilon \Theta_*^2 \{ \varphi(z^0 - \varepsilon) + \varepsilon^{1/2} r_* [\sigma_Q \psi_1(z^0 - \varepsilon, 0) + (1 - \sigma_Q) \psi_2(z^0 - \varepsilon, 0)] \} + \dots, \quad r_* = \Theta_* f_*^{-1} (d\Theta_*/d\tau_*)^{1/2}. \quad (36)$$

Подставляя (33) и (35) в (36) и учитывая, что $|\psi_2(z^0 - \varepsilon, 0)| \ll 1$ при $\beta \ll 1$ и $|\psi_1(z^0 - \varepsilon, 0) - \psi_2(z^0 - \varepsilon, 0)| \ll 1$ при $\beta \gg 1$, находим с точностью $O(\varepsilon^{3/2})$:

$$\Theta_\varepsilon = \Theta_* + \Theta_*^2 \left\{ \frac{\varepsilon}{2\sigma_E} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \left[\frac{1}{\sigma_E} \ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sigma_E} \right)^{1/2} \right) + \frac{d_0}{\sigma_E} - \frac{\pi^{1/2}}{2\sigma_E^2} r_* \right] \right\}. \quad (37)$$

Получим расчетные формулы для вычисления глубин выгорания с поверхности η_{1*}, η_{2*} за период задержки зажигания. Из (22) и (26) с учетом выражения для γ_0 из (18) находим

$$\eta_{1*} = \gamma \varepsilon^{-1/2} f_* \Theta_* (d\Theta_*/d\tau_*)^{-1/2} \int_{-\infty}^{z_0} \Phi_1^{\sigma_E}(s) ds + \dots, \quad \beta - \text{любое}, \quad (38)$$

$$\eta_{2*} = \begin{cases} \eta_{1*} + 0(\beta^{-1}), & \beta \gg 1, \\ \gamma \varepsilon^{-1/2} f_* \Theta_* \left(\frac{d\Theta_*}{d\tau_*} \right)^{-1/2} \beta \int_{-\infty}^{z_0} \Phi_1^{1-\sigma_E}(s) ds \int_{-\infty}^s \Phi_1^{\sigma_E}(u) du, & \beta \ll 1. \end{cases} \quad (39)$$

Равенство $\eta_{2*} = \eta_{1*}$ при $\beta \gg 1$ следует из (25) при $\beta(h_1 - h_2) = 0(1)$. Численное интегрирование на ЭВМ уравнения (30) с учетом (33) дает

$$D_0 = \int_{-\infty}^{z_0} \Phi_1^{\sigma_E}(s) ds = d_1 [\chi \sigma_E^{1/2}]^{-1}, \quad D_1 = \int_{-\infty}^{z_0} \Phi_1^{1-\sigma_E}(s) ds, \quad (40)$$

где $d_1 = 1,48$ при $d_0 = 0,431$ и $d_1 = 1,8837$ при $d_0 = 0,37$, а значения D_0, D_1 и z_0 при $\beta \ll 1$ и $d_0 = 0,431$ приведены в таблице для некоторых значений σ_E, σ_Q . Таким образом, из (38)–(40) имеем

$$\begin{aligned} \beta \ll 1: \eta_{1*} &= \frac{d_1}{\sigma_Q \sigma_E^{1/2}} \gamma \varepsilon^{-1/2} f_* \Theta_* \left(\frac{d\Theta_*}{d\tau_*} \right)^{-1/2}, \quad \eta_{2*} < \beta D_1 \eta_{1*}, \\ \beta \gg 1: \eta_{1*} &= \eta_{2*} = \frac{d_1}{\sigma_E^{1/2}} \gamma \varepsilon^{-1/2} f_* \Theta_* \left(\frac{d\Theta_*}{d\tau_*} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Количество тепла Q_* , подведенное к веществу от внешнего источника за период задержки, с точностью до членов порядка $\varepsilon^{3/2}$ равно теплу H_* , запасенному веществом к моменту зажигания τ_* ,

$$H_* = Q_* = c\rho T_0 x_0 \int_0^{\tau_*} f(u, \Theta(u)) du, \quad (42)$$

а размерные величины t_*, T_*, \bar{T}_* вычисляются по формулам

$$t_* = x_0^2 \kappa^{-1} \tau_*, \quad T_* = \Theta_* T_0, \quad \bar{T}_* = \Theta_* T_0. \quad (43)$$

Определим области изменения τ_* , в которых величина параметра β существенно отличается от единицы. Введем, согласно (24), функцию $U(\tau_*)$ и параметр M :

$$U(\tau_*) = \left[f_*^{1-\sigma_E} \left(\Theta_*^{-2} \frac{d\Theta_*}{d\tau_*} \right)^{\frac{1-3\sigma_E}{2}} \right]^{\frac{1}{\sigma_E}}, \quad M = \gamma^{-1} (1 - \sigma_h)^{-1} \omega^{\frac{1-2\sigma_E}{\sigma_E}} (\varepsilon^{1/2} \sigma_h)^{\frac{1-\sigma_E}{\sigma_E}}.$$

Тогда случаю $\beta \ll 1$ отвечает неравенство $U(\tau_*) \ll M$, равносильное $U(\tau_*) \leq 0,1M$, а при $\beta \gg 1$ имеет место неравенство $U(\tau_*) \gg M$, равносильное $U(\tau_*) \geq 10M$. Последние неравенства и определяют области изменения τ_* и совместно с уравнением (34) позволяют вычислить время задержки τ_* .

В качестве примера рассмотрим задачу о зажигании вещества постоянным тепловым потоком q_0 с теплофизическими характеристиками

σ_Q	D_0	D_1	z_0	σ_Q	D_0	D_1	z_0
0,1	23,40	35,89	3,53	0,7	3,34	1,94	-1,33
	22,06	21,43	3,27		3,15	1,99	-1,05
0,2	11,70	12,69	1,80	0,9	2,60	1,33	-1,96
	11,03	9,19	1,73		2,45	1,46	-1,61
0,5	4,68	3,21	-0,49				
	4,41	3,00	-0,31				

Примечание. Числа над чертой соответствуют $\sigma_E = 0,40$, под чертой — $\sigma_E = 0,45$.

нитроклетчатки [1]: $\rho = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³,
 $c = 1,3 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), $\lambda =$
 $= 0,126$ Вт/(м · К), $\kappa = 0,645 \cdot 10^{-7}$ м²/с,
 $R = 8,32$ Дж/(моль · К) при $(Q_1 +$
 $+ Q_2)(k_1 + k_2) = 1,778 \cdot 10^{25}$ Дж/(кг · с),
 $E_1 + E_2 = 251,4$ кДж/моль, $Q_1 + Q_2 =$
 $= 6285$ кДж/кг. Полагая x_0 по (4)
 $x_0 = \lambda T_0 / q_0$, находим

$$f_* = 1, \Theta_* = 1 + 2(\tau_*/\pi)^{1/2},$$

$$d\Theta_*/d\tau_* = (\pi\tau_*)^{-1/2},$$

$$U(\tau_*) = \{(\pi\tau_*)^{1/2} [1 +$$

$$\frac{3\sigma_E - 1}{2\sigma_E} + 2(\tau_*/\pi)^{1/2}]^2\}^{2\sigma_E}.$$

Анализ показывает, что при $0 < \sigma_E < 1/3$ функция U монотонно убывает, а при $1/3 < \sigma_E < 1$ — монотонно возрастает. Поэтому, определяя границы областей существования τ_* через τ_{\pm} по формулам $U(\tau_-) = 0,1M$, $U(\tau_+) = 10M$, укажем области изменения τ_* для $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$. При $0 < \sigma_E < 1/3$ для $\beta \ll 1$ имеем $\tau_* \geq \tau_-$, а для $\beta \gg 1$ $0 < \tau_* \leq \tau_+$. В областях $1/3 < \sigma_E < 0,5$ и $0,5 < \sigma_E < 1$ для $\beta \ll 1$ получим $0 < \tau_* \leq \tau_-$, а для $\beta \gg 1$ — неравенство $\tau_* \geq \tau_+$. При $\sigma_E = 1/3$ имеем $U = 1$, $M \gg 1$ и реализуется случай $\beta \ll 1$.

Иллюстрация предложенного метода расчета основных характеристик зажигания с указанными параметрами для случая $\beta \ll 1$ представлена на рис. 2, 3 при $T_0 = 223$ К, $\sigma_k = 0,3$, $\sigma_q = 0,1$ и плотностях теплового потока $q_{0i} = 41,9 \cdot q_i$ кВт/м² ($q_1 = 20$, $q_2 = 40$, $q_3 = 60$, $q_4 = 80$, $q_5 = 100$, $q_6 = 200$), отмеченных на рис. 2, 3 цифрами 1–6. Расчет Θ_s по формуле (37) проводится с точностью $O(\epsilon)$, т. е. используется главный член асимптотики $\sim \epsilon \ln(1/\epsilon)$, так как выражение (37) получено при $\epsilon \rightarrow 0$, а на практике ϵ — величина ограниченная. В частном случае одностадийной реакции ($\sigma_E = 1$, $\sigma_q = 1$, $\sigma_k = 1$) $M = \infty$, ограничения отсутствуют, время задержки определяется из (34), Θ_* — из (9), Θ_s — из (37), η_* — из (38) и (40), Q_* — из (42), а t_* , T_* , T_s вычисляются по формулам (43).

В заключение авторы выражают благодарность А. Г. Мержанову за стимулирование настоящего исследования.

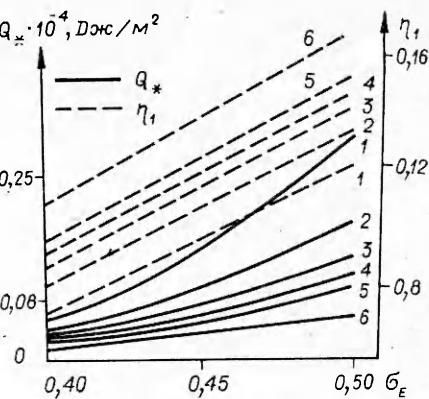


Рис. 3.

Поступила в редакцию 24/II 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мержанов, А. Э. Аверсон. Современное состояние тепловой теории зажигания. Препринт ИХФ АН СССР, 1970.
2. Я. Б. Зельдович. Докл. АН СССР, 1963, 150, 2.
3. В. Н. Вилунов. ФГВ, 1966, 2, 2.
4. И. С. Любченко, В. В. Матвеев, Г. Н. Марченко. Докл. АН СССР, 1980, 254, 4.
5. А. Х. Найфэ. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
6. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. Усп. мат. наук, 1957, 12, 5(77).
7. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
8. Д. Коул. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
9. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.
10. Г. Мюнтц. Интегральные уравнения. Линейные уравнения Вольтерра. М.: Гостехиздат, 1934.
11. A. Linan, F. A. Williams. Comb. Sci. Tech., 1971, 3, 91.