Теплофизика и аэромеханика, *2023*, *том 30*, *№ 4*

УДК 532.59

Двумерные стационарно-бегущие волны на поверхности вертикального ривулета*

С.П. Актершев, С.В. Алексеенко, А.В. Бобылев

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, *Новосибирск*

E-mail: sergey-aktershev@mail.ru

На основе разработанной полуаналитической модели исследованы нелинейные волны в прямолинейном ривулете, стекающем по вертикальной пластине. Численным методом получены характеристики нелинейных квазидвумерных стационарно-бегущих волн. При малых значениях волнового числа найдено другое волновое семейство (семейство двугорбых волн), которое ответвляется от первого семейства посредством удвоения пространственного периода. Показано, что в некотором узком диапазоне частоты возбуждения стационарно-бегущие волны не существуют, а реализуется пульсирующий волновой режим.

Ключевые слова: ривулетное течение, стационарно-бегущие нелинейные волны, теоретическая модель.

Введение

Течение тонких слоев (пленок) жидкости реализуется в различных технологических процессах и аппаратах, предназначенных для интенсификации процессов тепломассообмена, таких как абсорберы, ректификационные колонны, кристаллизаторы, электролизеры, биологические и химические реакторы. Практически значимым является пленочное течение при наличии контактных линий раздела, называемое также ручейковым (ривулетным), которое реализуется во многих установках в нефтегазовой, химической промышленности, в холодильной технике, в дистилляционных колоннах, в установках по ожижению природного газа. Особое внимание к ривулетному течению обусловлено в основном его прикладным значением. Абсолютное большинство теоретических исследований, начиная с пионерской работы [1], посвящены стационарным и гладким (без волн) ривулетам, стекающим по наклонной плоскости [2, 3], а также по искривленным поверхностям [4–7]. Профиль гладкого ручейка и стационарные режимы ручейкового течения были рассчитаны как аналитически в приближении теории смазки [1, 4, 8], так и численными методами на основе уравнений Навье–Стокса.

В большинстве практически важных случаев ривулетное течение неустойчиво и на поверхности слоя жидкости развиваются волны. Устойчивость ручейкового потока

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-29-00254).

изучалась в ограниченном количестве работ [9–13]. Эти расчеты устойчивости выполнены в приближении теории смазки, т.е. при очень малых числах Рейнольдса, для длинных плоских возмущений (нормальной моды). В недавней работе [14] численными методами исследовано развитие ручейковой структуры в пленке жидкости, стекающей по нижней поверхности наклонной пластины. Особое внимание было уделено механизму формирования пространственного периода ручейковой структуры и ее эволюции во времени. Определено несколько возможных причин отклонения наблюдаемых в экспериментах длин волн в поперечном направлении от той, которая предсказана первичным механизмом Рэлея–Тейлора. В работе [15] на основе интегрального метода Капицы–Шкадова с использованием автомодельного профиля скорости выполнен линейный анализ устойчивости ручейка, стекающего по нижней поверхности наклонного цилиндра. Были рассчитаны дисперсионные зависимости для длинных плоских волн, определены параметры волн максимального роста.

Первые подробные экспериментальные исследования волновых режимов в ривулете, стекающем по нижней наружной поверхности наклонной трубы, были выполнены в работах [16–18]. Были исследованы волны, возбужденные периодическими колебаниями расхода, и показано, что волны имеют трехмерную подковообразную форму, а их профиль (в продольном сечении) при некоторых параметрах течения соответствует волнам в стекающих пленках жидкости. Обнаружено, что мгновенный профиль аксиальной скорости колеблется относительно автомодельного параболического профиля, что может служить некоторым обоснованием для применения интегрального метода Капицы–Шкадова к волновым ривулетам, как это было успешно сделано для волновых пленок жидкости. В экспериментах были исследованы волновые характеристики естественных и возбужденных волн (толщина пленки, амплитуда, частота, фазовая скорость волн, трение на стенке). В работе [19] впервые были экспериментально исследованы крупноамплитудные периодические волны на ручейке, стекающем по вертикальной пластине. В экспериментах применялись рабочие поверхности и рабочие жидкости с разными физическими свойствами, что позволило исследовать волновые режимы ривулетного течения при различных углах смачивания. Возбужденные волны генерировались периодическими пульсациями расхода. Эксперименты проводились с использованием полевого метода лазерной индуцированной флюоресценции (PLIF), что позволило получить детальную информацию о форме волновых ривулетов для разных чисел Рейнольдса в широком диапазоне частоты возбуждения при двух различных углах смачивания. Выявлено, что закономерности волнового движения существенно зависят от величины угла смачивания. Численное моделирование нелинейных волн на поверхности вертикального ручейка постоянной ширины впервые выполнено в трехмерной постановке в [20]. Уравнения трехмерного волнового течения тонкого слоя жидкости решались конечно-разностным методом с использованием граничных условий на контактной линии. Расчеты выполнены только для двух различных жидкостей для тех условий, которые реализовывались в экспериментах [19]. Сравнение расчетов с экспериментальными данными показало, что используемая модель хорошо описывает форму и амплитуду волн. В недавней статье [21] разработана полуаналитическая модель для описания нелинейных волн в ручейке, стекающем по нижней наружной поверхности цилиндра, наклоненного под малым углом к горизонту. Уравнения модели выведены на основе метода взвешенной невязки проецированием уравнений динамики пленки жидкости на построенную специальным образом систему базисных ортогональных полиномов. В отличие от трудоемких численных расчетов [20], полуаналитическая модель позволяет реализовать серии расчетов с целью анализа влияния физических свойств жидкости и параметров ривулетного течения на характеристики нелинейных волн. Подробно исследован простой случай квазидвумерных волн. Нелинейные волновые режимы ривулетного течения исследованы численно в рамках двух различно поставленных проблем. Первая — задача о стационарно-бегущих волнах с заданной длиной волны. Вторая проблема — пространственная эволюция возбужденных волн с заданной частотой. В расчетах впервые получены характеристики нелинейных двумерных стационарно-бегущих волн при различных значениях волнового числа k. Показано, что при малых значениях k волна имеет вид солитоноподобного пика большой амплитуды, а с ростом k трансформируется в синусоподобные волны малой амплитуды.

В настоящей работе полуаналитическая модель [21] применена для описания нелинейных волн в ривулете, стекающем по вертикальной пластине. В предыдущем исследовании волнового ручейкового течения на поверхности наклонного цилиндра [21] обнаружены некоторые новые эффекты нелинейных волн. В частности, найдены узкие интервалы волнового числа, в которых стационарно-бегущие волны не обнаружены, а реализуется пульсирующий волновой режим. Кроме того, при малых значениях волнового числа k выявлено другое волновое семейство (семейство двугорбых волн), которое ответвляется от первого семейства посредством удвоения пространственного периода. Основная цель работы — выяснить, обусловлены ли обнаруженные эффекты только малой величиной угла наклона к горизонту или эти эффекты имеют общий характер (т.е. характерны для волнового ривулетного течения в целом).

1. Полуаналитическая модель волнового течения ривулета

Рассмотрим течение ривулета постоянной ширины $2b_{\rm riv}$ на вертикальной пластине. Введем декартову систему координат $Oxyz$ так, что ось Ox направлена вниз, а ось Oy — по нормали к пластине (рис. 1). Будем считать, что максимальная толщина слоя жидкости h много меньше характерной длины волны возмущения, а также много меньше полуширины ривулета $b_{\rm riv}$ (длинноволновое приближение). Система уравнений основана на IBL-модели [22] для длинноволновых трехмерных возмущений применительно к ривулетному течению. В этой модели профиль скорости считается полиномом второй степени от безразмерной переменной $\eta = y/h(x,z,t)$, который удовлетворяет граничным условиям на стенке и на поверхности пленки. При этом компоненты скорости по осям Ox, Oz имеют вид

$$u = \frac{3q}{2h}\left(2\eta - \eta^2\right),\ \ w = \frac{3m}{2h}\left(2\eta - \eta^2\right), \tag{1}$$

где $q(x,z,t) = \int_0^h u\,dy$ и $m(x,z,t) = \int_0^h w\,dy$ — расходы жидкости в направлении осей Ox и Oz соответственно, h — толщина слоя жидкости. Уравнения модели [21] для искомых функций $h(x, \xi, t)$, $q(x, \xi, t)$, $m(x, \xi, t)$ в безразмерных переменных имеют вид

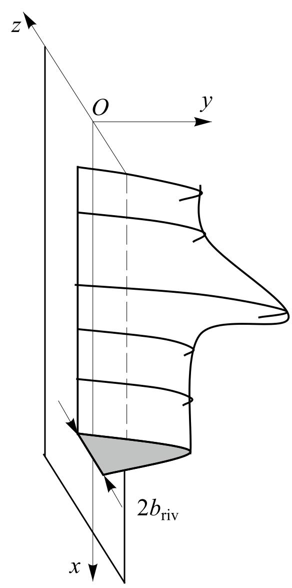


Рис. 1. Схема ривулентного течения.

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{6}{5}\left(\frac{q^2}{h}\right)+\frac{6}{5b}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{qm}{h}\right)=\frac{3}{\mathrm{Re}}\left(h-\frac{q}{h^2}\right)+\mathrm{We}\,h\frac{\partial\Delta h}{\partial x},$$

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{6}{5b}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{m^2}{h}\right)+\frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qm}{h}\right)=\frac{\mathrm{We}}{b}h\frac{\partial\Delta h}{\partial\xi}-\frac{3}{\mathrm{Re}}\frac{m}{h^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{1}{b}\frac{\partial m}{\partial\xi}=0,$$

где $\Delta h=\partial^2 h/\partial x^2+\partial^2 h/\partial z^2$. В качестве масштаба расстояния использована толщина слоя жидкости на оси симметрии невозмущенного ривулета H_0; масштаб расхода $q_m=gH_0^3/3\nu$, масштаб времени $t_m=H_0^2/q_m$, масштаб скорости $u_m=H_0/t_m$. Вместо координаты z используется безразмерная переменная $\xi=z/b_{\mathrm{riv}}$. Уравнения (2) содержат безразмерные параметры $\mathrm{Re}=gH_0^3/3\nu^2$ — число Рейнольдса и $\mathrm{We}=\left(3\mathrm{Fi}/\mathrm{Re}^5\right)^{1/3}$ — число Вебера ($\mathrm{Fi}=\sigma^3/\left(\rho^3 g\nu^4\right)$ — число Капицы). Невозмущенному течению соответствует стационарное решение $h_0(\xi)=f_0\equiv 1-\xi^2$, $q_0(\xi)=f_0^3$, $m=0$. Отметим, что h, q — четные функции координаты ξ, а m — нечетная функция координаты ξ.

Для описания волнового режима течения введем новые искомые функции $\tilde h(x,\xi,t)$, $\tilde q(x,\xi,t)$, $\tilde m(x,\xi,t)$, положив $h=f_0\tilde h$, $q=f_0^3\tilde q$, $m=f_0^3\tilde m$. Используя новые искомые функции, преобразуем систему уравнений (2) к виду

$$f_0^3\frac{\partial\tilde q}{\partial t}+f_0^5\frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde q^2}{\tilde h}\right)+\frac{6}{5b}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\tilde q\tilde m}{\tilde h}f_0^5\right)=\frac{3}{\mathrm{Re}}f_0\left(\tilde h-\frac{\tilde q}{\tilde h^2}\right)+f_0\mathrm{We}\tilde h\frac{\partial L}{\partial x},$$

$$f_0^3\frac{\partial\tilde m}{\partial t}+f_0^5\frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde q\tilde m}{\tilde h}\right)+\frac{6}{5b}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\tilde m^2}{\tilde h}f_0^5\right)=f_0\left(\frac{\mathrm{We}}{b}\tilde h\frac{\partial L}{\partial\xi}-\frac{3}{\mathrm{Re}}\frac{\tilde m}{\tilde h^2}\right), \tag{3}$$

$$f_0\frac{\partial\tilde h}{\partial t}+f_0^3\frac{\partial\tilde q}{\partial x}+\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f_0^3\tilde m\right)=0.$$

Здесь $L\equiv\frac{\partial^2\left(f_0\tilde h\right)}{\partial x^2}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\left(f_0\tilde h\right)}{\partial\xi^2}=f_0\left(\frac{\partial^2\tilde h}{\partial x^2}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\tilde h}{\partial\xi^2}\right)-\frac{1}{b^2}\left(4\xi\frac{\partial\tilde h}{\partial\xi}+2\tilde h\right)$, $b=b_{\mathrm{riv}}/H_0$.

Для решения системы (3) применим метод взвешенной невязки. На интервале $-1<\xi<1$ возмем систему из $2N$ базисных полиномов $\psi_j(\xi)$ таких, что при четном j полином четный, а при нечетном j полином нечетный. Определим произведение базисных полиномов одинаковой четности с помощью весовой функции $G(\xi)\equiv f_0^3$ следующим образом: $\left\langle\psi_k\psi_j\right\rangle=\int_{-1}^{1}G(\xi)\psi_j\psi_k d\xi$ и потребуем, чтобы все полиномы одинаковой четности были ортогональны друг другу. Четные функции $\tilde h$ и $\tilde q$ разложим в ряд по четным полиномам, а нечетную функцию $\tilde m$ — в ряд по нечетным полиномам:

$$\tilde h=\sum_{j=1}^{N}H_j(x,t)\cdot\psi_{2j-2}(\xi),\ \ \tilde q=\sum_{j=1}^{N}Q_j(x,t)\cdot\psi_{2j-2}(\xi),\ \ \tilde m=\sum_{j=1}^{N}M_j(x,t)\cdot\psi_{2j-1}(\xi). \tag{4}$$

При подстановке рядов (4) в уравнения (3) получаются невязки. Невязку каждого уравнения следует спроецировать на все базисные полиномы соответствующей четности и приравнять к нулю. В результате получается система из $3N$ уравнений в частных производных для неизвестных функций H_{2k-2}, Q_{2k-2}, M_{2k-1}, $k = 1, 2, ..., N$. Коэффициенты этих уравнений вычисляются аналитически через соответствующие интегралы. В простейшем случае $N = 1$, который соответствует квазидвумерным волнам, базис состоит из одного четного полинома $\psi_0 \equiv 1$ и одного нечетного полинома $\psi_1 \equiv \xi$. В этом случае каждый ряд (4) состоит из одного слагаемого, т.е. $\tilde{h} = H(x,t)$, $\tilde{q} = Q(x,t)$, $\tilde{m} = \xi M(x,t)$. При этом поперечное сечение поверхности волнового ривулета остается параболой (как и в случае невозмущенного течения). Находим: $L = f_0 \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \dfrac{2}{b^2} H$, $\dfrac{\partial L}{\partial x} = f_0 \dfrac{\partial^3 H}{\partial x^3} - \dfrac{2}{b^2}\dfrac{\partial H}{\partial x}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \xi} = -2\xi \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$. Итак, в рассматриваем случае квазидвумерных волн система уравнений (3) принимает вид

$$
\begin{gathered}
f_0^3 \frac{\partial Q}{\partial t} + f_0^5 \frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{H}\right) + \frac{6}{5b}\frac{QM}{H}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f_0^5 \xi\right) = \\
= \frac{3}{\mathrm{Re}} f_0 \left(H - \frac{Q}{H^2}\right) + \mathrm{We}\left(f_0^2 H \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} - \frac{2}{b^2} f_0 H \frac{\partial H}{\partial x}\right), \\
f_0^3 \xi \frac{\partial M}{\partial t} + f_0^5 \xi \frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{QM}{H}\right) + \frac{6}{5b}\frac{M^2}{H}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f_0^5 \xi^2\right) = -f_0 \xi \left(\frac{2\mathrm{We}}{b} H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{3}{\mathrm{Re}}\frac{M}{H^2}\right), \\
f_0 \frac{\partial H}{\partial t} + f_0^3 \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{M}{b}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f_0^3 \xi\right) = 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Спроецируем уравнения (5) на соответствующие элементы базиса. Для этого умножим первое и третье уравнения на $\psi_0 = 1$, а второе уравнение — на $\psi_1 = \xi$, затем проинтегрируем все три уравнения по ξ на интервале (–1; 1). В результате получаем

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{32}{33}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{H}\right) = \frac{35}{8\mathrm{Re}}\left(H - \frac{Q}{H^2}\right) + \frac{7\mathrm{We}}{6} H \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} - \frac{5}{2b^2}\frac{\partial H}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{96}{143}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{QM}{H}\right) - \frac{96}{143}\frac{M^2}{bH} = -\frac{63}{8\mathrm{Re}}\frac{M}{H^2} - \frac{21\mathrm{We}}{4b} H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{24}{35}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

При выводе уравнений (6) использованы следующие интегралы (см. [21]):

$$
\int_{-1}^{1} f_0 d\xi = \frac{4}{3}, \quad \int_{-1}^{1} f_0^2 d\xi = \frac{16}{15}, \quad \int_{-1}^{1} f_0^3 d\xi = \frac{32}{35}, \quad \int_{-1}^{1} f_0^5 d\xi = \frac{512}{693}, \quad \int_{-1}^{1} f_0 \xi^2 d\xi = \frac{4}{15},
$$

$$
\int_{-1}^{1} f_0^5 \xi^2 d\xi = \frac{512}{693 \cdot 13}.
$$

2. Линейный анализ устойчивости

Невозмущенному течению соответствует $H = 1$, $Q = 1$, $M = 0$. Для анализа устойчивости невозмущенного течения положим $H = 1 + \tilde{H}$, $Q = 1 + \tilde{Q}$, $M = \tilde{M}$ и линеаризуем уравнения (6) относительно малых возмущений $\tilde{H}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{M}$. Представим возмущения в виде бегущей волны: $\tilde{H} = H_a \exp\left(ik(x-Ct)+\beta t\right)$, $\tilde{Q} = Q_a \exp\left(ik(x-Ct)+\beta t\right)$, $\tilde{M} =$ $= M_a \exp\left(ik(x-Ct)+\beta t\right)$.

Здесь H_a, Q_a, M_a — амплитуды, k — волновое число, C — фазовая скорость волны, β — временной инкремент волны. Подставив это в линеаризованные уравнения, после некоторых преобразований, подробно описанных в [21], получаем систему двух уравнений для β и C:

$$\begin{gathered}\left(\beta\mathrm{Re}+\frac{35}{16}\right)^2=\left(k\mathrm{Re}\right)^2\left(\left(C-\frac{32}{33}\right)^2-E\right)+\left(\frac{35}{16}\right)^2,\\ \left(\beta\mathrm{Re}+\frac{35}{16}\right)\left(C-\frac{32}{33}\right)=\frac{157}{66},\end{gathered} \tag{7}$$

где $E=\frac{41}{35}\left(\frac{16}{33}\right)^2+\frac{2\mathrm{We}}{b^2}+\frac{4\mathrm{We}}{5}k^2$.

Систему уравнений (7) можно свести к одному квадратному уравнению относительно положительной переменной $Y=\left(\beta\mathrm{Re}+\frac{35}{16}\right)^2$:

$$Y^2-\left(\left(\frac{35}{16}\right)^2-E\left(k\mathrm{Re}\right)^2\right)Y-\left(k\mathrm{Re}\frac{157}{66}\right)^2=0.$$

Отсюда находим его положительный корень:

$$Y=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{35}{16}\right)^2-E\left(k\mathrm{Re}\right)^2+\sqrt{\left(\left(\frac{35}{16}\right)^2-E\left(k\mathrm{Re}\right)^2\right)^2+4\left(k\mathrm{Re}\frac{157}{66}\right)^2}\right) \text{—}$$

и получаем инкремент и фазовую скорость волн:

$$\beta=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{35}{16}\pm\sqrt{Y}\right),\quad C=\frac{32}{33}\pm\frac{157}{66\sqrt{Y}}, \tag{8}$$

где знак «плюс» соответствует неустойчивой моде, для которой $\beta > 0$ в некотором диапазоне волновых чисел. Знак «минус» соответствует устойчивой моде, для которой при любом значении волнового числа $\beta < 0$.

На рис. 2 показаны расчетные зависимости инкремента и фазовой скорости от волнового числа при $\mathrm{Fi}^{1/3} = 1000$, $\mathrm{Re} = 50$ для различных значений параметра b. Кривые $\beta(k)$ и $C(k)$ качественно подобны соответствующим кривым для двумерных волн в однородной пленке жидкости [23]. Кривые $\beta(k)$ имеют максимум, которому соответствует минимум на кривых $C(k)$. С увеличением параметра b диапазон неустойчивости расширяется, максимальное значение инкремента растет, а фазовая скорость волн уменьшается.

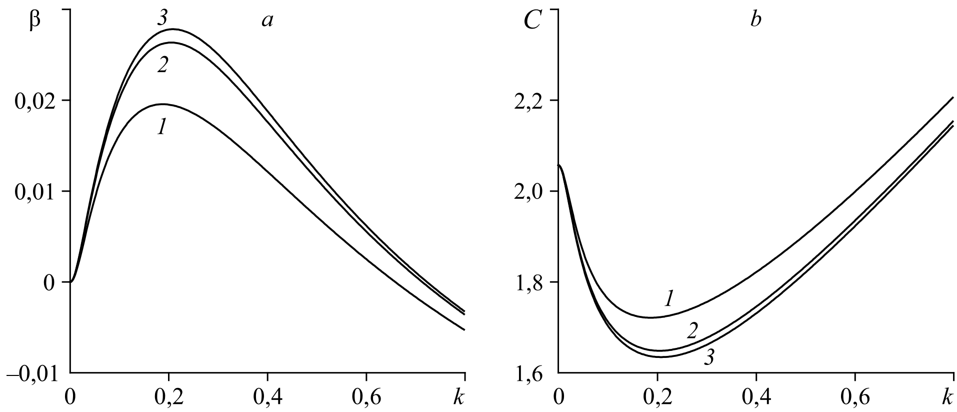


Рис. 2. Инкремент (*a*) и фазовая скорость (*b*) возмущений при $\mathrm{Fi}^{1/3} = 1000$, Re = 50 для *b* = 5 (*1*), 10 (*2*), 15 (*3*).

3. Стационарно-бегущие нелинейные волны

Стационарно-бегущие волны с заданным волновым числом k получены численно решением системы уравнений (6). Для этого использовался конечно-разностный метод на участке протяженностью $\Lambda = 2\pi / k$ (т.е. одна длина волны). На интервале $0 < x < \Lambda$ задавалась равномерная сетка с узлами $x_j = j\Lambda / N_x$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N_x$ и уравнения (6) были представлены в разностном виде по неявной схеме. На каждом временном шаге значения H_j, Q_j, M_j вычислялись методом итераций (в правую часть уравнений подставлялись значения, найденные из предыдущей итерации). Для начала итераций брались значения на предыдущем временном слое, а сходимость итерационного алгоритма обеспечивалась малой величиной шага по времени. В начальный момент времени задавалось распределение в виде $H = 1 + H_a \cos kx$ (здесь H_a — амплитуда малого возмущения), а на концах участка ставились периодические условия $H(\Lambda, t) = H(0, t)$, $Q(\Lambda, t) = Q(0, t)$, $M(\Lambda, t) = M(0, t)$. Вычисления продолжались до тех пор, пока начальное возмущение не развивалось в стационарно-бегущую волну, параметры которой в дальнейшем оставались постоянными. В данной постановке задачи средняя толщина пленки на оси симметрии ривулета $\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} H dx$ не меняется во времени (это следует из третьего уравнения (6)). При этом средний расход $Q_{\mathrm{av}} = \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} Q dx$ меняется в процессе эволюции начального возмущения, а установившееся значение Q_{av} несколько отличается от начального значения. Критерием установившегося режима был тот факт, что для произвольного значения x устанавливалась периодическая зависимость $H(t)$, а средний расход Q_{av} и скорость распространения волны C остаются постоянными. Действительно, для стационарно-бегущей волны все искомые функции зависят только от одной переменной $\zeta = x - Ct$, поэтому из третьего уравнения (6) следует линейное соотношение между расходом и толщиной ривулета: $(24/35)Q = CH + \mathrm{const}$. На каждом временном шаге скорость распространения волны вычислялась из наклона зависимости $Q_j(H_j)$ для всех узлов $j = 0, 1, 2, \ldots, N_x$ методом наименьших квадратов.

На рис. 3 показаны 3D-поверхности волнового ривулета при Re = 75, b = 10, $\mathrm{Fi}^{1/3}$ = = 1000 для различных значений волнового числа k (показаны два периода). При $k \ll 1$ волна имеет вид высокоамплитудных солитоноподобных пиков с крутым фронтом и пологим задним склоном. Между пиками расположен участок остаточного слоя постоянной толщины (см. рис. 3*a*). С ростом k амплитуда пика уменьшается, а впереди пика появляется капиллярная рябь малой амплитуды. При дальнейшем увеличении k амплитуда пика становится сравнимой с амплитудой капиллярной ряби (см. рис. 3*b*), а количество осцилляций капиллярной ряби уменьшается. При дальнейшем росте k амплитуда волны продолжает убывать, капиллярная рябь исчезает, а форма волны становится близка к синусоидальной (см. рис. 3*c*). Эта закономерность изменения формы волны с ростом волнового числа наблюдается при всех значениях параметров Re, b, Fi (в исследованном диапазоне).

На рис. 4 приведена скорость C стационарно-бегущих волн в зависимости от волнового числа для двух различных значений Fi. Там же для сравнения показана рассчитанная

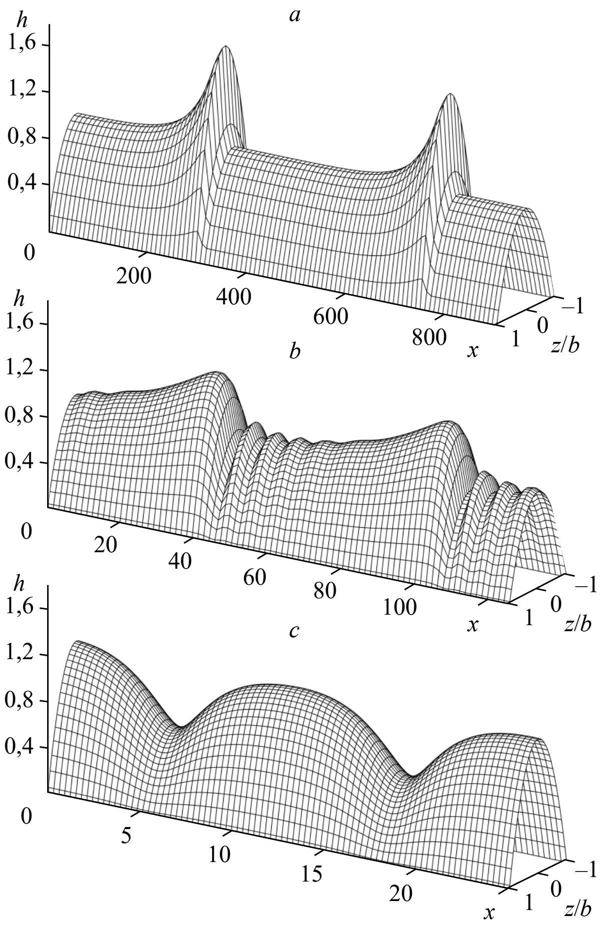


Рис. 3. Поверхность волнового ривулета при Re = 75, b = 10, $\mathrm{Fi}^{1/3}$ = 1000 для различных k = 0,014 (*a*), 0,1 (*b*), 0,5 (*c*).

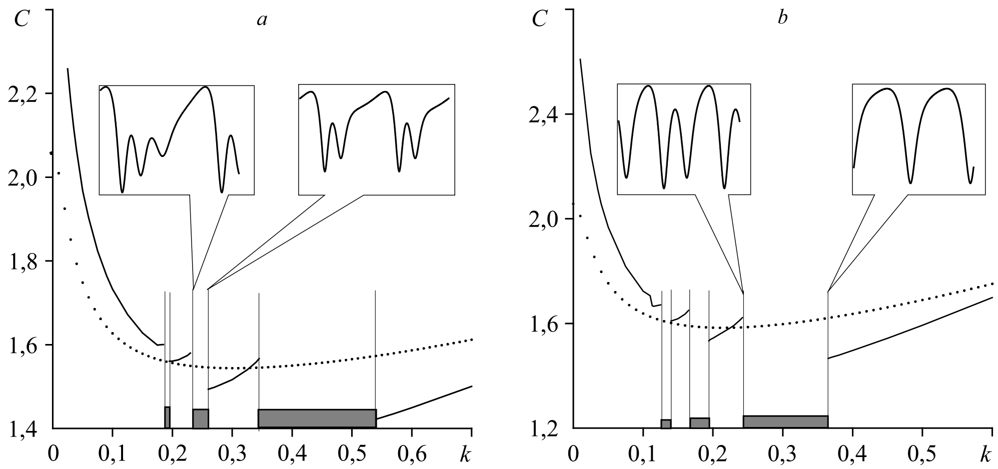


Рис. 4. Скорость нелинейных волн в зависимости от волнового числа *k* (сплошные линии) для $Fi^{1/3} = 300$ (*a*) и 1000 (*b*).

Пунктирные линии — скорость нелинейных волн;
серым цветом выделены интервалы, в которых стационарно-бегущие волны не обнаружены.

по (7) скорость линейных волн. На рисунке видно, что для нелинейных волн зависимость $C(k)$ качественно такая же, как для линейных волн, т.е. имеет падающую и растущую ветви. Однако скорость стационарно-бегущих волн при $k << 1$ существенно больше скорости линейных волн, а при *k*, близких к единице, — несколько меньше скорости линейных волн. Зависимость $C(k)$ для нелинейных волн имеет определенную особенность. На кривой $C(k)$ имеются интервалы по *k*, в которых стационарно-бегущих волн выявить не удалось (посредством используемого алгоритма). На рис. 4 эти интервалы (три для каждого значения Fi) выделены серым цветом и ограничены вертикальными линиями. Выноски на рис. 4 показывают, что внутри интервала происходит перестройка профиля волны, связанная с уменьшением количества осцилляций капиллярной ряби (на правой границе каждого интервала количество осцилляций на единицу меньше, чем на левой). В каждом из указанных интервалов устанавливается пульсирующий режим, т.е. зависимость $H(t)$ имеет колебательный характер, но колебания не являются строго периодическими, поскольку амплитуда колебаний сама квазипериодически пульсирует от некоторого минимума до некоторого максимума, при этом пульсации амплитуды сопровождаются изменением профиля волны (рис. 5). Эффект пульсирующего волнового

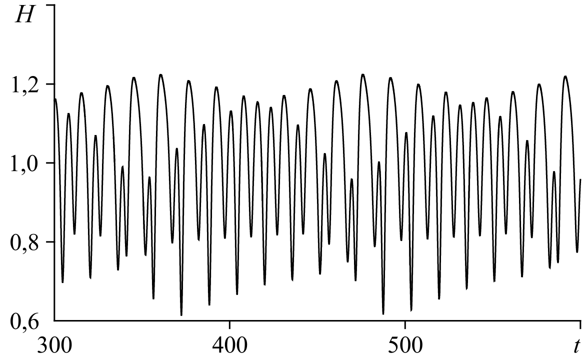


Рис. 5. Зависимость $H(t)$
для пульсирующего режима ($Fi^{1/3} = 1000$).

Значение $k = 0,25$ принадлежит диапазону,
в котором стационарно-бегущие волны не обнаружены.

режима был обнаружен в работе [21], где исследовались нелинейные волны в ривулете, стекающем по наклонному цилиндру (в этом случае был найден только один узкий интервал по k, в котором реализуется пульсирующий режим). Подобный пульсирующий режим наблюдался экспериментально в [24] в однородной пленке жидкости для возбужденных двумерных волн при частоте 4,5 Гц. В теоретической работе [25], посвященной стационарно-бегущим двумерным волнам в стекающей вертикальной пленке, также обнаружен эффект «перемежаемости» волновых режимов при некоторых наборах параметров.

Помимо стационарно-бегущих волн, показанных на рис. 3–5, в расчетах выявлены также волны другого типа, которые существуют только при малых значениях k. Волны второго семейства, показанные на рис. 6, представляют собой два мало отличающихся по амплитуде солитоноподобных пика (первый пик несколько выше второго). Между двугорбыми солитонами расположен протяженный участок остаточного слоя с постоянной толщиной пленки жидкости (см. рис. 6*a*). С увеличением k сокращается протяженность участка остаточного слоя, но расстояние между спаренными пиками изменяется очень незначительно (см. рис. 6*b*). Наконец, при $k = 0{,}051$ расстояние между спаренными пиками в пределах одного периода оказывается равным расстоянию между задним пиком и передним пиком следующего периода, при этом амплитуды пиков становятся одинаковыми (см. рис. 6*c*). Двугорбая волна при $k = 0{,}051$ вырождается в одногорбую волну с вдвое меньшим периодом (т.е. удвоенным значением волнового числа $k = 0{,}102$). Таким образом, в точке $k = 0{,}102$ семейство двугорбых волн ответвляется от основного (одногорбого) семейства посредством двукратного уменьшения пространственного периода. Вообще говоря, наличие различных волновых семейств является типичным свойством пленочных течений. Так, например, в [26] проведены подробные исследования ветвления волновых семейств и характеристик стационарно-бегущих волн в однородной пленке жидкости, принадлежащих различным семействам. На рис. 7 приведены зависимости скорости от волнового числа для волн обеих семейств (одногорбых и двугорбых волн) при малых значениях k для двух значений Fi. Стрелкой показан переход двугорбых

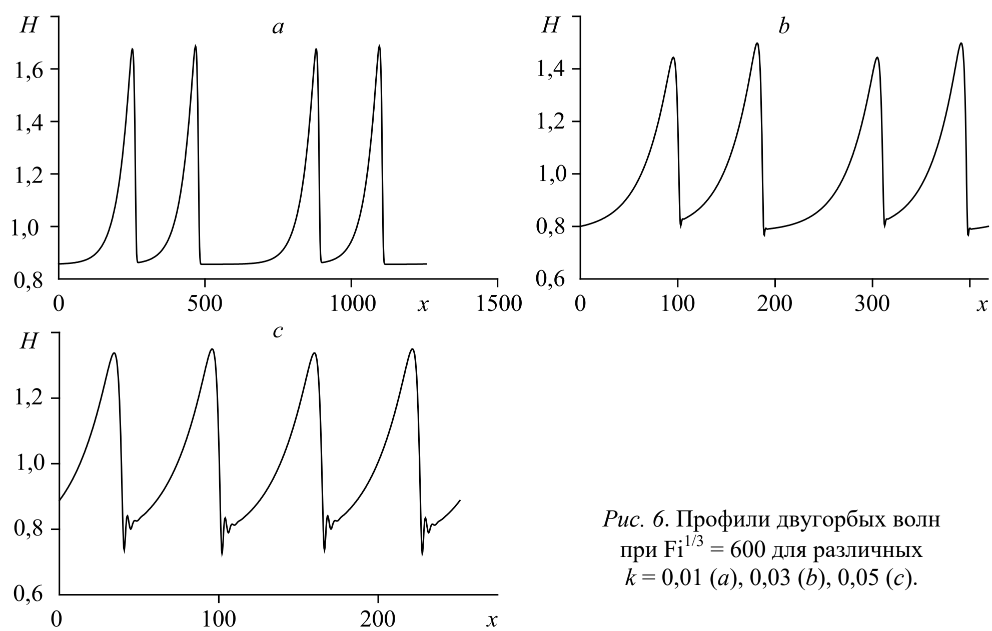


Рис. 6. Профили двугорбых волн при $\mathrm{Fi}^{1/3} = 600$ для различных $k = 0{,}01$ (*a*), 0,03 (*b*), 0,05 (*c*).

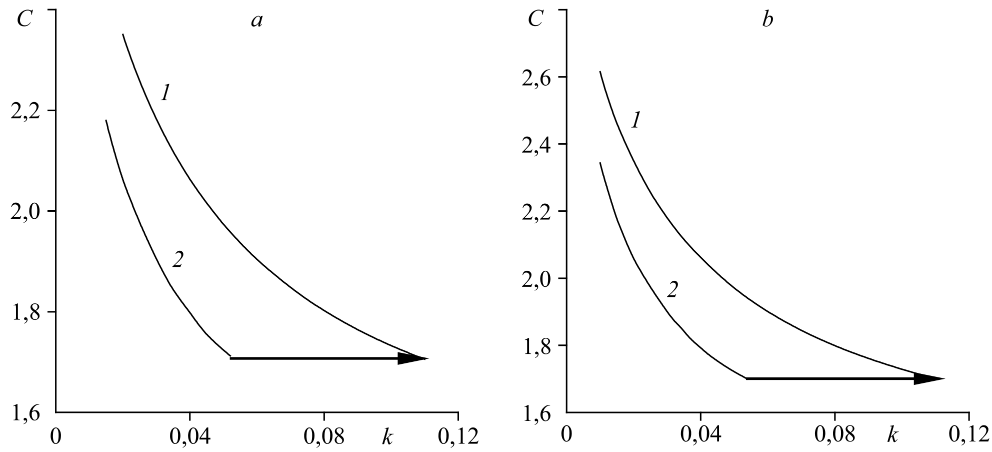


Рис. 7. Скорости нелинейных волн основного (*1*) и двугорбого (*2*) семейства в зависимости от волнового числа при $\mathrm{Fi}^{1/3} = 300$ (*a*) и 1000 (*b*).

Стрелкой показан переход двугорбых волн в одногорбые через двукратное уменьшение периода.

волн в одногорбые через двукратное уменьшение пространственного периода. На рисунке видно, что скорость двугорбых волн существенно меньше, чем одногорбых.

На рис. 8, 9 представлены расчетные поверхности волнового ривулета в сравнении с экспериментальными данными [19] для двух различных волновых режимов. В экспериментах волны на поверхности ривулета создавались периодическим возмущением расхода, рабочей жидкостью был водоглицериновый раствор ($\mathrm{Fi}^{1/3} = 1280$). Из рис. 8, 9 следует, что теоретическая модель хорошо предсказывает амплитуду стационарно-бегущих волн для различных параметров ривулетного течения (Re, k, b_{riv}). В случае Re = 10 (см. рис. 8*b*) волна близка к двумерной, поэтому ее форма хорошо описывается теорети-

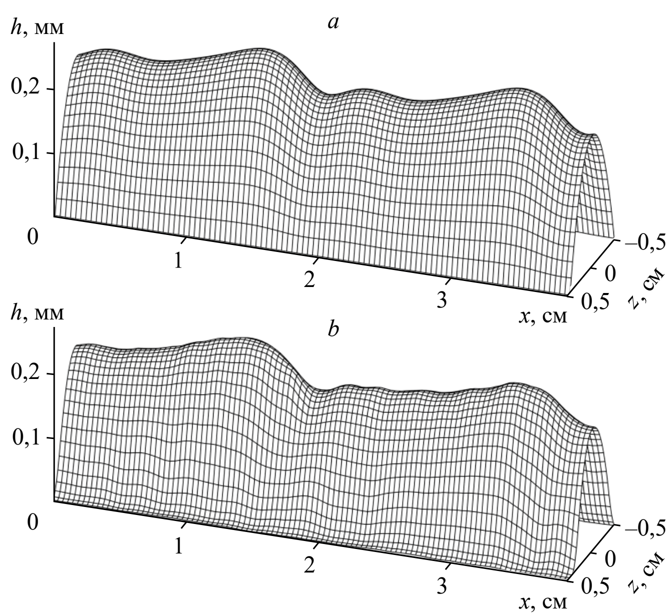
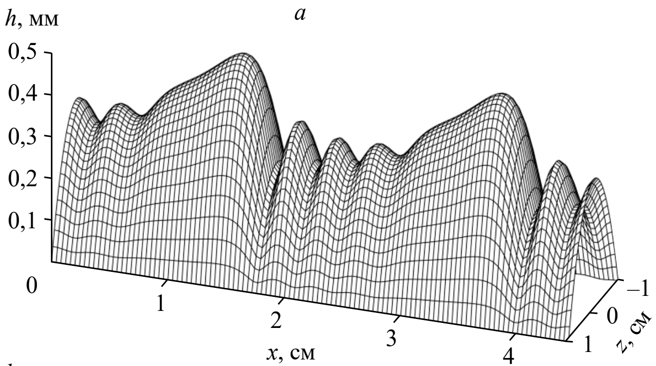


Рис. 8. Расчетная (*a*) и экспериментальная (*b*) поверхности волнового ривулета.

Длина волны 1,93 см ($k = 0{,}075$); водоглицериновый раствор, Re = 10; экспериментальные данные [19].



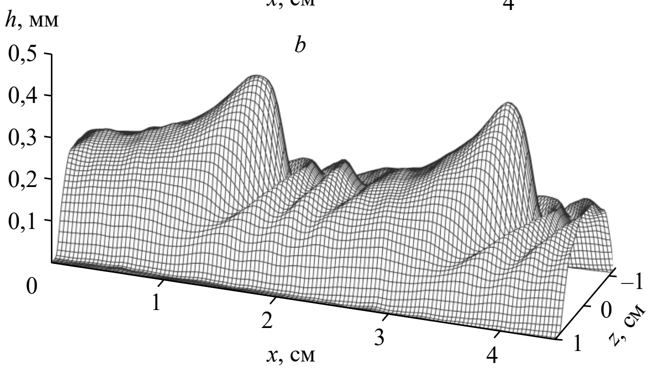


Рис. 9. Расчетная (*a*) и экспериментальная (*b*) поверхности волнового ривулета.

Длина волны 2,22 см (k = 0,1); водоглицериновый раствор, Re = 36; экспериментальные данные [19].

ческой моделью. В случае Re = 36 (см. рис. 9*b*) волна имеет более выраженную подковообразную форму. В этом случае теоретическая модель для двумерных волн недостаточно точно воспроизводит форму трехмерной волны, но все же правильно предсказывает амплитуду пика и такие качественные особенности, как наличие малоамплитудной капиллярной ряби впереди основного пика.

Выводы

На основе разработанной полуаналитической модели численным методом исследованы нелинейные волны в прямолинейном ривулете, стекающем по вертикальной пластине. В расчетах получены характеристики нелинейных квазидвумерных стационарно-бегущих волн при различных значениях волнового числа k. Показано, что при $k \to 0$ волны имеют вид высокоамплитудного солитона, а при значениях k, близких к единице, трансформируются в малоамплитудные синусоподобные волны. При малых значениях k найдено другое волновое семейство (семейство двугорбых волн), которое ответвляется от первого семейства посредством удвоения пространственного периода. В предельном случае $k \to 0$ волны второго семейства представляют собой двугорбый солитон. В некоторых узких интервалах волнового числа стационарно-бегущие волны обнаружить не удается (с помощью использованного в работе алгоритма). В указанных интервалах реализуется пульсирующий волновой режим. Эти эффекты нелинейных волн были выявлены ранее в случае ривулета на поверхности слабонаклоненного цилиндра, но для вертикального ривулета количественное отличие оказалось весьма существенным (по значениям волнового числа и скорости стационарно-бегущих волн). Так, для вертикального ривулета при каждом значении Fi найдено три узких интервала по k, в которых реализуется пульсирующий режим (в случае слабонаклонного цилиндра обнаружен только один такой интервал). По-видимому, наличие интервалов по k, в которых реализуется пульсирующий режим, а также существование семейства двугорбых волн (помимо семейства одногорбых волн) при $k \ll 1$, является специфическим свойством ручейкового течения.

Список литературы

1. **Towell G.D., Rothfeld L.B.** Hydrodynamics of rivulet flow // AIChE J. 1966. Vol. 12. P. 972–980.
2. **Tanasijczuk A.J., Perazzo C.A., Gratton J.** Navier–Stokes solutions for steady parallel-sided pendent rivulets // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2010. Vol. 29. P. 465–471.
3. **Singh R.K., Galvin J.E., Sun X.** Three-dimensional simulation of rivulet and film flows over an inclined plate: effects of solvent properties and contact angle // Chem. Engng Sci. 2016. Vol. 42. P. 244–257.
4. **Wilson S.K., Duffy B.R.** A rivulet of perfectly wetting fluid draining steadily down a slowly varying substrate // IMA J. Appl. Math. 2005. Vol. 70. P. 293−322.
5. **Kuibin P.A.** An asymptotic description of the rivulet flow along an inclined cylinder // Russ. J. Engng Thermophys. 1996. Vol. 6. P. 33–45.
6. **Jensen O.E.** The thin liquid lining of a weakly curved cylindrical tube // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 331. P. 373–403.
7. **Paterson C., Wilson S.K., Duffy B.R.** Pinning, de-pinning and re-pinning of a slowly varying rivulet // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2013. Vol. 41. P. 94–108.
8. **Al Mukahal F.H.H., Duffy B.R., Wilson S.K.** Rivulet flow of generalized Newtonian fluids // Phys. Rev. Fluids. 2018. Vol. 3. P. 083302-1–083302-24.
9. **Myers T.G., Liang H.X., Wetton B.** The stability and flow of a rivulet driven by interfacial shear and gravity // Int. J. Non-Linear Mech. 2004. Vol. 39. P. 1239–1249.
10. **Weiland R.H., Davis S.H.** Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 2. Long waves on flat rivulets // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 107. P. 261−280.
11. **Benilov E.S.** On the stability of shallow rivulets // J. Fluid Mech. 2009. Vol. 636. P. 455–474.
12. **Bonart H., Marek A., Repke J.-U.** Experimental characterization of stable liquid rivulets on inclined surfaces: Influence of surface tension, viscosity and inclination angle on the interfacial area // Chem. Engng Res. and Design. 2017. Vol. 125. P. 226–232.
13. **Bostwick J.B., Steen P.H.** Static rivulet instabilities: varicose and sinuous modes // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 837. P. 819−838.
14. **Rietz M., Kneer R., Scheid B., Rohlfs W.** Spanwise structuring and rivulet formation in suspended falling liquid films // Phys. Rev. Fluids. 2021. Vol. 6. P. 084805-1–084805-33.
15. **Geshev P.I., Kuibin P.A.** Waves on rivulet flow along inclined cylinder, Numerical methods in Laminar and Turbulent Flow // Proc. of the 9th Intern. Conf., Atlanta, 1995. Vol. IX, pt. 2. P. 996–1006.
16. **Alekseenko S.V., Markovich D.M., Shtork S.I.** Wave flow of rivulets on the outer surface of an inclined cylinder // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8. P. 3288–3299.
17. **Alekseenko S.V., Antipin V.A., Bobylev A.V., Markovich D.M.** Application of PIV to velocity measurements in a liquid film flowing down an inclined cylinder // Exp. Fluids. 2007. Vol. 43. P. 197–207.
18. **Alekseenko S.V., Bobylev A.V., Markovich D.M.** Rivulet flow on the outer surface of an inclined cylinder // J. Engng Thermophys. 2008. Vol. 17, No. 4. P. 259–272.
19. **Алексеенко С.В., Бобылев А.В., Гузанов В.В., Маркович Д.М., Харламов С.М.** Регулярные волны на вертикально стекающих ривулетах при разных углах смачивания // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 3. С. 371–384.
20. **Alekseenko S.V., Aktershev S.P., Bobylev A.V., Kharlamov S.M., Markovich D.M.** Nonlinear forced waves in a vertical rivulet flow // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 770. P. 350–373.
21. **Aktershev S.P., Alekseenko S.V., Bobylev A.V.** Waves in a rivulet falling down an inclined cylinder // AIChE J. 2021. Vol. 67. P. e17002-1–e17002-20.
22. **Демехин Е.А., Шкадов В.Я.** О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 21–27.
23. **Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.** Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 256 с.
24. **Liu J., Gollub J.P.** Solitary wave dynamics of film flows // Phys. Fluids. A. 1994. Vol. 6. P. 1702–1712.

25. **Vozhakov I.S., Arkhipov D.G., Tsvelodub O.Yu.** Nonstationary periodic wave regimes on a falling liquid film // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. Vol. 1105. P. 012069-1–012069-6.
26. **Tsvelodub O.Yu., Trifonov Yu.Ya.** On steady-state traveling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. Vol. 39. P. 336–351.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2023 г.,
после доработки — 23 мая 2023 г.,
принята к публикации 16 июня 2023 г.