

УДК 539.3; 535.4

## ВЛИЯНИЕ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА ВТЯГИВАНИЯ ДВУСТОРОННЕГО МИКРОПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЯ РЕЗОНАТОРА

Х. М. Седиги, К. Х. Ширази, М. Чанжизьян

Университет Шахида Чамрана, Ахваз, Иран

E-mails: hmsedighi@gmail.com, k.shirazi@scu.ac.ir, m.changizian@scu.ac.ir

Представлены результаты исследования влияния амплитуды колебаний на процесс втягивания двустороннего микропереключателя и вычисления его собственных частот с использованием нелинейной частотно-амплитудной характеристики системы. Уравнение колебаний микропереключателя, предварительно деформированного электрическим полем, содержит нелинейные члены до пятого порядка включительно. Исследование выполнено новым аналитическим методом, основанным на использовании гамильтониана. Показано, что для получения приемлемого решения достаточно использовать первый член разложения решения в ряд. Достоверность результатов, полученных асимптотическим методом, подтверждена путем сравнения их с результатами численного решения.

**Ключевые слова:** гамильтониан, частотно-амплитудная характеристика, колебания микробалки, двусторонний переключатель, неустойчивость процесса втягивания.

**Введение.** Свойства электромеханических микрорезонаторов существенно зависят от их параметров, поэтому необходимо исследовать влияние этих параметров на физические и механические свойства резонаторов, в частности на неустойчивость процесса втягивания и собственную частоту резонаторов.

Микроэлектромеханические системы (МЭМС) с приводами используются в струйных принтерах, переключателях, гироскопах, химических датчиках и т. п. В работах [1–14] проведены исследования неустойчивости процесса втягивания и динамики МЭМС. Однако влияние величины амплитуды нелинейных колебаний на неустойчивость процесса втягивания до сих пор не изучено. При анализе динамики микросистем, на которые воздействуют электростатические силы, необходимо учитывать нелинейную зависимость между входными и выходными сигналами. Влияние высокочастотного напряжения на неустойчивость процесса втягивания в микросистемах, инициируемых механическими и электростатическими силами, исследовано в работе [4]. Микроструктура моделировалась демпфирующей системой масса — пружина с одной степенью свободы. Статика микрозеркал при воздействии капиллярных сил изучалась в работе [6]. В частности, исследованы втягивание микрозеркал под действием капиллярных сил и влияние различных геометрических параметров на угол втягивания.

Влияние осевой нагрузки и профиля оптического датчика на неустановившийся режим МЭМС с двумя устойчивыми состояниями, приводимой в действие оптическими датчиками, исследовано в [7].

В работе [10] предложена нелинейная модель микробалки Тимошенко на основе градиентной теории упругости с использованием тензора деформации Кармана, с помощью принципа Гамильтона получены уравнения движения и краевые условия. В [11] представлена математическая модель электростатической балочной МЭМС, находящейся после вытягивания под воздействием стационарного электрода. Взаимодействие балки и подложки моделировалось нелинейным основанием, состоящим из пружин и демпферов. В работе [12] изучена динамика с обратной связью микробалки-инициатора в случайном режиме работы и построена диаграмма бифуркации на основе анализа амплитуды и частоты переменного напряжения. В [13] проанализированы различные подходы к вычислению потерь энергии колебаний в полубесконечных опорах микроэлектромеханических резонаторов, совершающих колебания в плоскости.

Распределенная электромеханическая модель, учитывающая поле рассеивания, конечные смещения и остаточные напряжения, предложена в [14]. Электростатическая сила вычислялась с учетом поля рассеивания, обусловленного конечными шириной и толщиной балки.

В настоящей работе вычисляется нелинейная зависимость частоты от амплитуды заземленного микропереключателя, колеблющегося под действием электростатического напряжения, приложенного с двух его сторон. В последнее время достигнут существенный прогресс в построении аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений, не содержащих малый параметр [15–17]. Существуют различные методы построения решения нелинейных дифференциальных уравнений при изучении нелинейных колебаний: метод энергетического баланса [18], вариационный итерационный метод в сочетании с методом энергетического баланса [19], метод декомпозиции Адомиана в сочетании с аппроксимацией Паде [8], метод Линдстедта — Пуанкаре [20], преобразование Лапласа [21], метод минимакса [22], метод гомотопического анализа [23], метод разложения по параметру [24, 25], метод гомотопического возмущения [26].

Для консервативных осцилляторов существует инвариантный гамильтониан, который можно использовать при построении приближенного решения [27]. Такой подход применен в работе [28] при анализе колебаний балки Эйлера — Бернулли при нелинейных краевых условиях.

В работе [1] предложена асимптотическая процедура анализа нелинейных колебаний микробалки под действием напряжения электрического поля, приложенного с одной из ее сторон, с использованием метода разложения по параметру с удержанием нелинейных членов до четвертого порядка включительно.

В данной работе исследуется нелинейное поведение микропереключателя, активируемого напряжением электрического поля, приложенным с двух его сторон. Показано, что применение гамильтониана при решении нелинейного уравнения пятого порядка позволяет эффективно исследовать неустойчивость процесса вытягивания. Изучено влияние амплитуды колебаний на неустойчивость процесса вытягивания и собственные колебания. Показано, что для получения с большой точностью решения задачи о колебаниях микробалки достаточно использовать только первый член разложения решения в ряд. Также исследовано влияние амплитуды колебаний и основных параметров задачи на устойчивость процесса вытягивания и собственные частоты колебаний микробалки.

**1. Уравнение движения.** Рассматривается тонкая микробалка с заземленными торцами, которая находится под действием электростатического напряжения, приложенного с двух ее сторон (рис. 1). Микробалка имела следующие характеристики:  $l$  — длина,  $h$  — толщина,  $b$  — ширина,  $\rho$  — плотность материала,  $I$  — момент инерции поперечного сечения,  $E$  — модуль упругости материала. Начальный размер зазора между пластиной и балкой равен  $d_{gap}$ . Балка деформируется под действием притягивающих электростати-

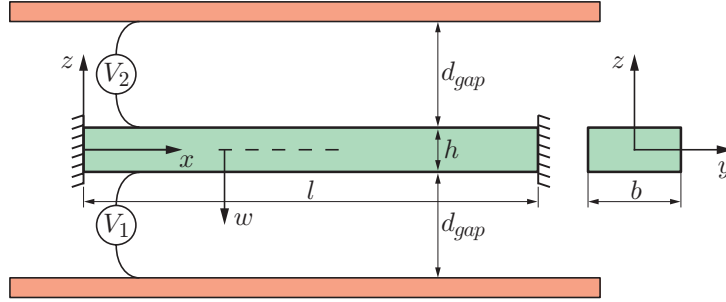


Рис. 1. Конфигурация заземленной микробалки-переключателя

ческих сил, возникающих вследствие наличия разности потенциалов  $V_1$  и  $V_2$ . Предполагается, что балка является балкой Эйлера — Бернулли. При моделировании используется геометрическая нелинейность типа нелинейности Кармана, учитывающая большие смещения и повороты, при этом деформации считаются малыми. С использованием стандартной модели конденсатора [14, 29] выражение для электростатических сил, действующих на единицу длины лицевых поверхностей пластины, можно представить в виде

$$F_{es} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon V_1^2}{(d_{gap} - w(x, t))^2} \left( 1 + \beta \frac{d_{gap} - w(x, t)}{b} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon V_2^2}{(d_{gap} + w(x, t))^2} \left( 1 + \beta \frac{d_{gap} + w(x, t)}{b} \right),$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость. С использованием разложений в ряд Тейлора выражения для электростатических сил уравнение движения микробалки-переключателя записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho b h w_{tt} + EI w_{xxxx} - \left( N_i + \frac{E b h}{2l} \int_0^l w_x^2 dx \right) w_{xx} - \\ - \frac{1}{2} b \varepsilon V_1^2 \left( \frac{1}{d_{gap}^2} + \frac{2w(x, t)}{d_{gap}^3} + \frac{3w(x, t)^2}{d_{gap}^4} + \frac{4w(x, t)^3}{d_{gap}^5} + \frac{5w(x, t)^4}{d_{gap}^6} + \frac{6w(x, t)^5}{d_{gap}^7} \right) - \\ - \frac{1}{2} b \varepsilon V_2^2 \left( -\frac{1}{d_{gap}^2} + \frac{2w(x, t)}{d_{gap}^3} - \frac{3w(x, t)^2}{d_{gap}^4} + \frac{4w(x, t)^3}{d_{gap}^5} - \frac{5w(x, t)^4}{d_{gap}^6} + \frac{6w(x, t)^5}{d_{gap}^7} \right) - \\ - \frac{1}{2} \varepsilon \beta V_1^2 \left( \frac{1}{d_{gap}} + \frac{w(x, t)}{d_{gap}^2} + \frac{w(x, t)^2}{d_{gap}^3} + \frac{w(x, t)^3}{d_{gap}^4} + \frac{w(x, t)^4}{d_{gap}^5} + \frac{w(x, t)^5}{d_{gap}^6} \right) - \\ - \frac{1}{2} \varepsilon \beta V_2^2 \left( -\frac{1}{d_{gap}} + \frac{w(x, t)}{d_{gap}^2} - \frac{w(x, t)^2}{d_{gap}^3} + \frac{w(x, t)^3}{d_{gap}^4} - \frac{w(x, t)^4}{d_{gap}^5} + \frac{w(x, t)^5}{d_{gap}^6} \right) = 0. \end{aligned}$$

Будем полагать  $w(x, t) = q(t)\varphi(x)$ , где функция  $\varphi(x)$  — первая собственная мода для заземленной балки:

$$\varphi(x) = \text{ch}(\lambda x) - \cos(\lambda x) - \frac{\text{ch}(\lambda l) - \cos(\lambda l)}{\text{sh}(\lambda l) - \sin(\lambda l)} (\text{sh}(\lambda x) - \sin(\lambda x)),$$

$\lambda = 4,730\,040\,745$  — корень характеристического уравнения для первой собственной моды.

Вводя безразмерные переменные

$$\tau = \sqrt{\frac{EI}{\rho b h l^4}} t, \quad \bar{q} = \frac{q}{l}, \quad \alpha = \frac{b}{d_{gap}}, \quad \eta = \frac{l}{d_{gap}},$$

$$\gamma = \frac{h}{l}, \quad \lambda_1 = \frac{\varepsilon V_1^2}{Ebh\gamma^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\varepsilon V_2^2}{Ebh\gamma^2}, \quad f_i = \frac{N_i}{Ebh}$$

и используя метод Бубнова — Галеркина, уравнение для функции  $q(t)$  с точностью до нелинейных членов пятого порядка можно записать в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \beta_1 q(\tau) + \beta_2 (q(\tau))^2 + \beta_3 (q(\tau))^3 + \beta_4 (q(\tau))^4 + \beta_5 (q(\tau))^5 + \beta_0 = 0, \quad (1)$$

где

$$\beta_1 = 500,563\,96 - 12(\lambda_1 + \lambda_2)\eta^2(0,5\beta + \alpha) + 147,631f_i/\gamma^2,$$

$$\beta_2 = -12(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^3(0,664\,687\beta + 1,994\,047\,9\alpha),$$

$$\beta_3 = -12(\lambda_1 + \lambda_2)\eta^4(0,926\,677\,512\beta + 3,7\alpha) + 908,126/\gamma^2,$$

$$\beta_4 = -12(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^5(1,265\,948\,42\beta + 6,927\,767\alpha),$$

$$\beta_5 = 12(\lambda_1 + \lambda_2)\eta^6(7,94\beta + 26,24\alpha), \quad \beta_0 = -0,415\,430\,763(\lambda_1 - \lambda_2)\eta(\beta + \alpha).$$

**2. Описание подхода, в котором используется гамильтониан.** Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{q} + f(q) = 0, \quad q(0) = A, \quad \dot{q}(0) = 0. \quad (2)$$

Одним из основных подходов к решению задач для дифференциальных уравнений является использование вариационных принципов, поскольку большинство дифференциальных уравнений есть следствие минимизации энергии физической системы. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$N(\tau, q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0. \quad (3)$$

Вариационный принцип для уравнения (3) можно сформулировать, если существует функционал [30]

$$J = \int L(\tau, q, \dot{q}, \ddot{q}) d\tau \quad (4)$$

( $L$  — лагранжиан системы), экстремальными которого являются решения этого уравнения. Таким образом, необходимо изучить условия, при выполнении которых существует функция  $L(\tau, q, \dot{q}, \ddot{q})$ , такая что уравнение (3) является уравнением Эйлера функционала (4), т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = N(\tau, q, \dot{q}, \ddot{q}).$$

Для уравнения (2) в работе [27] предложен функционал

$$J(q) = \int_0^{T/4} \left( -\frac{\dot{q}^2}{2} + F(q) \right) dt,$$

где  $T$  — период нелинейного осциллятора;  $\dot{q}^2/2$  — кинетическая энергия системы;  $F(q)$  — потенциальная энергия системы, причем  $\partial F/\partial q = f$ . Поскольку рассматриваемая система является консервативной, ее полная энергия при движении сохраняется и гамильтониан системы не изменяется:  $H = T + U = H_0$  ( $T, U$  — кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно). Введем функцию [27]

$$\hat{H}(q) = \int_0^{T/4} \left( \frac{\dot{q}^2}{2} + F(q) \right) dt = \frac{T}{4} H_0.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial T} = \frac{H_0}{4}$$

и соотношение между частотой и амплитудой (частотно-амплитудное уравнение) следует из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial (1/\omega)} \right) = 0,$$

где  $A$  — начальная амплитуда колебаний;  $\omega$  — частота колебаний нелинейной системы.

**3. Использование гамильтониана при решении задачи.** Рассмотрим уравнение (1). Гамильтониан этого уравнения записывается в следующем виде:

$$\hat{H}(q) = \int_0^{T/4} \left( \frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{\beta_1}{2} q^2 + \frac{\beta_2}{3} q^3 + \frac{\beta_3}{4} q^4 + \frac{\beta_4}{5} q^5 + \frac{\beta_5}{6} q^6 + \beta_0 q \right) dt. \quad (5)$$

Сохраняя в аппроксимации  $q = \sum_{i=1}^n A_i \cos(i\omega\tau)$  функции  $q(t)$  только первый член, решение будем искать в виде

$$q = A \cos(\omega\tau). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем

$$\hat{H} = \omega^{-1} (0,3927A^2\beta_1 + 0,2222A^3\beta_2 + 0,1473A^4\beta_3 + 0,3927A^2\omega^2 + 0,1067A^5\beta_4 + 0,0818A^6\beta_5 + A\beta_0),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial (1/\omega)} \right) = & -0,4909\beta_5 A^5 - 0,5333\beta_4 A^4 - 0,5890\beta_3 A^3 - 0,6667\beta_2 A^2 + \\ & + 0,7854\omega^2 A - 0,7854\beta_1 A - \beta_0 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнения (7) находим

$$\omega(A) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\beta_1 A + 0,8488\beta_2 A^2 + \frac{3}{4} \beta_3 A^3 + 0,6791\beta_4 A^4 + \frac{5}{8} \beta_5 A^5 + 1,2732\beta_0}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получаем

$$q_0(t) = A \cos \left( \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\beta_1 A + 0,8488\beta_2 A^2 + \frac{3}{4} \beta_3 A^3 + 0,6791\beta_4 A^4 + \frac{5}{8} \beta_5 A^5 + 1,2732\beta_0} \tau \right).$$

**4. Результаты исследования и их обсуждение.** В расчетах использовались следующие значения параметров задачи:  $l = 210$  мкм,  $h = 1,5$  мкм,  $E = 169$  ГПа,  $b = 0,5$  мкм,  $\rho = 2329$  кг/м<sup>3</sup>,  $d_{gap} = 1,18$  мкм,  $\varepsilon = 8,854187817620 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\beta = 0,65$ .

На рис. 2 приведены зависимости безразмерной амплитуды от времени, полученные с использованием гамильтониана и аппроксимации первого порядка функции  $q(\tau)$  и с помощью численного метода Рунге — Кутты четвертого порядка. Из приведенных зависимостей следует, что аналитическое и численное решения хорошо согласуются.

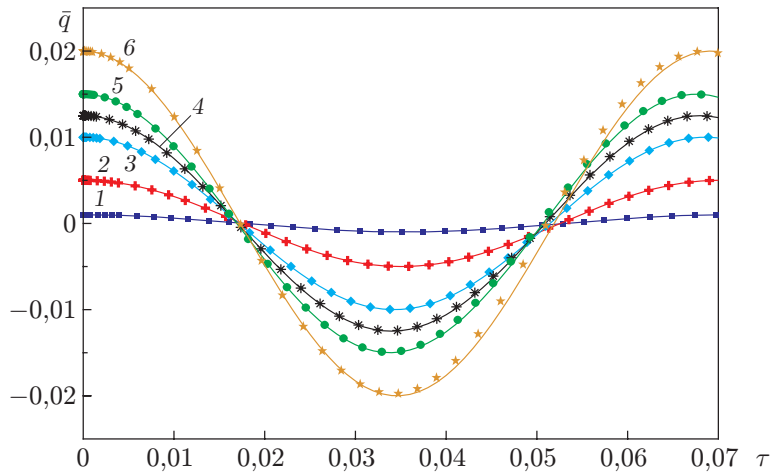


Рис. 2. Зависимость безразмерной амплитуды от безразмерного времени при различных начальных условиях:

точки — численное решение, линии — аналитическое решение; 1 —  $q(0) = 0,001$ , 2 —  $q(0) = 0,005$ , 3 —  $q(0) = 0,010$ , 4 —  $q(0) = 0,013$ , 5 —  $q(0) = 0,015$ , 6 —  $q(0) = 0,020$

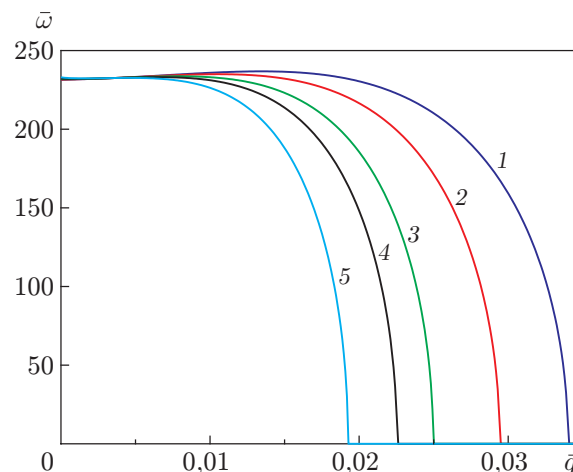


Рис. 3. Зависимость основной безразмерной частоты от амплитуды смещений микробалки при  $\lambda_1 = 10^{-4}$  и различных значениях  $\lambda_2$ :

1 —  $\lambda_2 = 0$  (воздействие напряжения на балку с одной стороны), 2 —  $\lambda_2 = 10^{-4}$ , 3 —  $\lambda_2 = 3 \cdot 10^{-4}$ , 4 —  $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ , 5 —  $\lambda_2 = 10^{-3}$

Анализ результатов, представленных на рис. 3–8, показывает, что с увеличением амплитуды собственная частота колебаний микробалки с заземленными торцами уменьшается.

На рис. 3 приведена зависимость нелинейной частоты колебаний заземленной на торцах микробалки от амплитуды смещения при  $\lambda_1 = 10^{-4}$  и различных значениях  $\lambda_2$ . Видно, что с увеличением отношения  $\lambda_2/\lambda_1$  неустойчивость процесса втягивания возникает при меньших значениях амплитуды.

На рис. 4 приведена зависимость нелинейной частоты колебаний микропереключателя от амплитуды смещения при различных значениях параметра  $\alpha$ . Видно, что этот параметр оказывает существенное влияние на неустойчивость и собственную частоту колебаний балки. Из приведенных на рис. 4 зависимостей следует, что с увеличением параметра  $\alpha$  основная частота уменьшается и неустойчивость появляется при меньших значениях амплитуды.

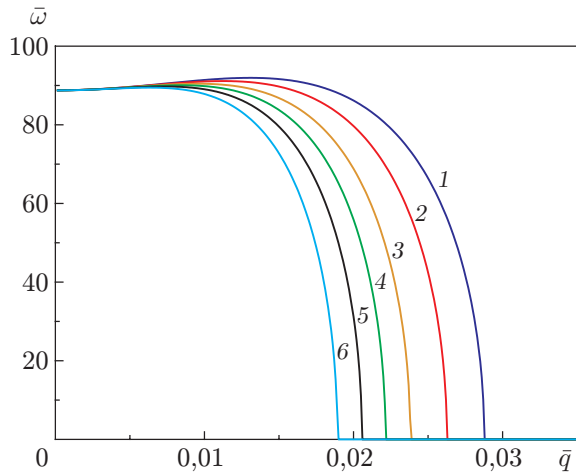


Рис. 4

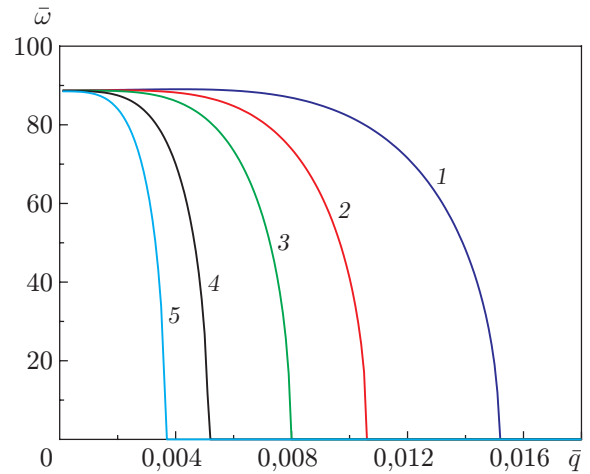


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость основной безразмерной частоты от амплитуды смещений микробалки при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-5}$  и различных значениях параметра  $\alpha$ :  
 1 —  $\alpha = 0,1$ , 2 —  $\alpha = 0,2$ , 3 —  $\alpha = 0,35$ , 4 —  $\alpha = 0,5$ , 5 —  $\alpha = 0,7$ , 6 —  $\alpha = 1$

Рис. 5. Зависимость основной безразмерной частоты от амплитуды смещений микробалки при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-5}$  и различных значениях параметра  $\eta$ :  
 1 —  $\eta = 200$ , 2 —  $\eta = 250$ , 3 —  $\eta = 300$ , 4 —  $\eta = 400$ , 5 —  $\eta = 500$

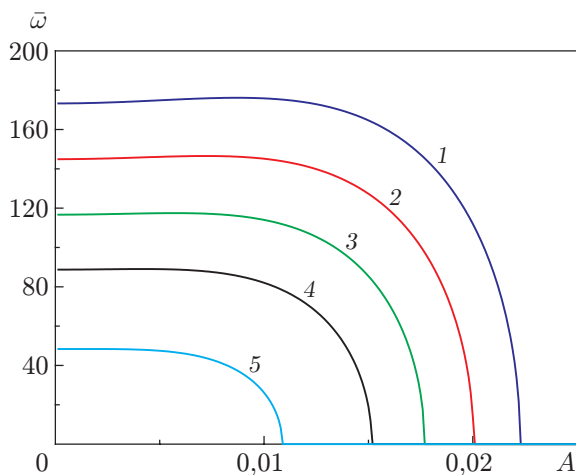


Рис. 6

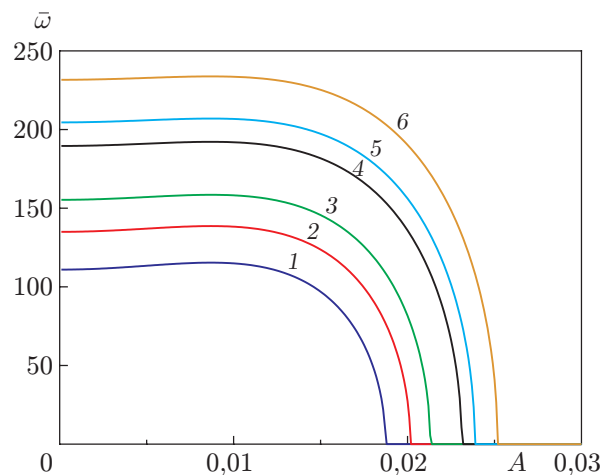


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость основной безразмерной частоты от амплитуды смещений микробалки при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-5}$  и различных значениях параметра  $\gamma$ :  
 1 —  $\gamma = 0,005$ , 2 —  $\gamma = 0,006$ , 3 —  $\gamma = 0,0075$ , 4 —  $\gamma = 0,01$ , 5 —  $\gamma = 0,02$

Рис. 7. Зависимость основной безразмерной частоты от амплитуды смещений микробалки при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-5}$  и различных значениях параметра  $f_i$ :  
 1 —  $f_i = 0,002$ , 2 —  $f_i = 0,003$ , 3 —  $f_i = 0,004$ , 4 —  $f_i = 0,006$ , 5 —  $f_i = 0,007$ , 6 —  $f_i = 0,009$

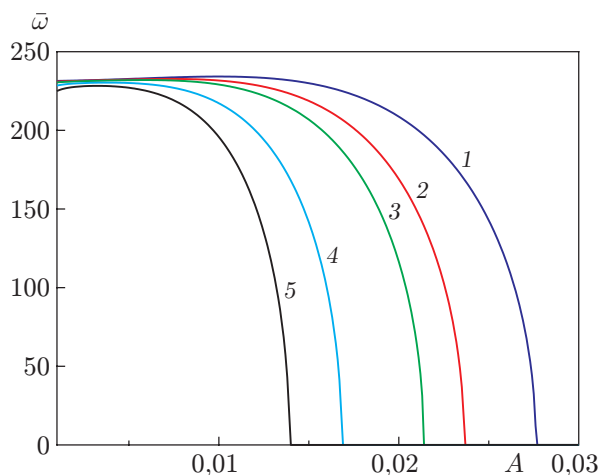


Рис. 8. Зависимость основной безразмерной частоты от амплитуды смещений микробалки при  $\lambda_2 = 10^{-4}$  и различных значениях параметра  $\lambda_1$ :  
 1 —  $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ , 2 —  $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-4}$ , 3 —  $\lambda_1 = 6 \cdot 10^{-4}$ , 4 —  $\lambda_1 = 8 \cdot 10^{-4}$ , 5 —  $\lambda_1 = 15 \cdot 10^{-4}$

При увеличении параметра  $\eta$  неустойчивость процесса втягивания возникает при меньших значениях безразмерной амплитуды. Кроме того, с увеличением параметра  $\eta$  уменьшаются значения безразмерной амплитуды, при которых собственная частота обращается в нуль (рис. 5).

На рис. 6 приведена зависимость  $\bar{\omega}-A$  при различных значениях параметра  $\gamma$ . Видно, что с увеличением параметра  $\gamma$  основная частота уменьшается.

На рис. 7 приведена зависимость  $\bar{\omega}-A$  при различных значениях параметра  $f_i$ . С увеличением параметра  $f_i$  основная частота увеличивается, с уменьшением параметра  $f_i$  неустойчивость возникает при меньших значениях амплитуды.

На рис. 8 приведена зависимость  $\bar{\omega}-A$  при различных значениях параметра  $\lambda_1$ . Видно, что с увеличением параметра  $\lambda_1$  основная частота уменьшается и неустойчивость возникает при меньших значениях амплитуды.

**Заключение.** В работе с использованием предложенного аналитического метода, основанного на применении гамильтониана, построены зависимости частоты от амплитуды колебаний защемленной микробалки, находящейся под действием поля напряжений, приложенного с двух ее сторон. В уравнении движения удержаны нелинейные члены до пятого порядка включительно. Исследовано влияние величины амплитуды и различных параметров задачи на частоту и неустойчивость процесса втягивания. Из результатов сравнения аналитического и численного решений следует, что для получения решения с приемлемой точностью достаточно в его асимптотическом разложении удерживать только первый член.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sedighi H. M., Shirazi K. H. Vibrations of micro-beams actuated by an electric field via parameter expansion method // Acta Astronaut. 2013. V. 85. P. 19–24. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.11.014.
2. Khan Y., Akbarzade M. Dynamic analysis of nonlinear oscillator equation arising in double-sided driven clamped microbeam-based electromechanical resonator // Z. Naturforsch. 2012. Bd 67a. S. 435–440. DOI: 10.5560/ZNA.2012-0043.



3. **Mobki H., Rezazadeh G., Sadeghi M., et al.** A comprehensive study of stability in an electro-statically actuated micro-beam // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 48. P. 78–85. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2012.08.002.
4. **Lakrad F., Belhaq M.** Suppression of pull-in in a microstructure actuated by mechanical shocks and electrostatic forces // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2011. V. 46, N 2. P. 407–414.
5. **Kacem N., Baguet S., Hentz S., Dufour R.** Pull-in retarding in nonlinear nanoelectromechanical resonators under superharmonic excitation // *J. Comput. Nonlinear Dynam.* 2012. V. 7. 021011. DOI: 10.1115/1.4005435.
6. **Moenfard H., Darvishian A., Zohoor H., Ahmadian M. T.** Characterization of the static behavior of micromirrors under the effect of capillary force, an analytical approach // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2012. V. 226, N 9. P. 2361–2372. DOI: 10.1177/0954406211433112.
7. **Kumar V., Rhoads J. F.** Modeling and analysis of an optically-actuated, bistable MEMS device // *J. Comput. Nonlinear Dynam.* 2012. V. 7, N 2. 021007. DOI: 10.1115/1.4005080.
8. **Noghrehabadi A., Ghalambaz M., Ghanbarzadeh A.** A new approach to the electrostatic pull-in instability of nanocantilever actuators using the ADM–Padé technique // *Comput. Math. Appl.* 2012. V. 64. P. 2806–2815. DOI: 10.1016/j.camwa.2012.04.013.
9. **Bazovkin A. V., Kovenya V. M., Kornilov V. I., et al.** Effect of micro-blowing of a gas from the surface of a flat plate on its drag // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53, N 4. P. 490–499. DOI: 10.1134/S0021894412040037.
10. **Ramezani S.** A micro scale geometrically non-linear Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2012. V. 47, N 8. P. 863–873. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2012.05.003.
11. **Vyasarayani C. P., Abdel-Rahman E. M., McPhee J., Birkett S.** Modeling MEMS resonators past pull-in // *J. Comput. Nonlinear Dynam.* 2011. V. 6, N 3. 031008. DOI: 10.1115/1.4002835.
12. **Towfighian S., Heppler G. R., Abdel-Rahman E. M.** Analysis of a chaotic electrostatic micro-oscillator // *J. Comput. Nonlinear Dynam.* 2011. V. 6, N 1. 011001.
13. **Chouvion B., Mc William S., Popov A. A., Fox C. H. J.** Review and comparison of different support loss models for micro-electro-mechanical systems resonators undergoing in-plane vibration // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2012. V. 226, N 1. P. 283–295.
14. **Batra R. C., Porfiri M., Spinello D.** Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field // *J. Sound Vibrat.* 2008. V. 309. P. 600–612.
15. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Zare J.** An analytic solution of transversal oscillation of quintic nonlinear beam with homotopy analysis method // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2012. V. 47. P. 777–784.
16. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** A new approach to analytical solution of cantilever beam vibration with nonlinear boundary condition // *Trans. ASME. J. Comput. Nonlinear Dynam.* 2012. V. 7, N 3. 034502. DOI: 10.1115/1.4005924.
17. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Zare J.** Novel equivalent function for deadzone nonlinearity: applied to analytical solution of beam vibration using He’s parameter expanding method // *Latin Amer. J. Solids Structures.* 2012. V. 9. P. 443–451.
18. **Yildirim A., Askari H., Saadatnia Z., et al.** Analysis of nonlinear oscillations of a punctual charge in the electric field of a charged ring via a Hamiltonian approach and the energy balance method // *Comput. Math. Appl.* 2011. V. 62, N 1. P. 486–490.
19. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Noghrehabadi A.** Application of recent powerful analytical approaches on the non-linear vibration of cantilever beams // *Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2012. V. 13, N 7/8. P. 487–494. DOI: 10.1515/ijnsns-2012-0030.

20. **Yildirim A.** Determination of periodic solutions for nonlinear oscillators with fractional powers by He's modified Lindstedt — Poincaré method // *Meccanica*. 2010. V. 45, N 1. P. 1–6. DOI: 10.1007/s11012-009-9212-4.
21. **Rafeipour H., Lotfavar A., Mansoori M. H.** New analytical approach to nonlinear behavior study of asymmetrically LCBs on nonlinear elastic foundation under steady axial and thermal loading // *Latin Amer. J. Solids Structures*. 2012. V. 9. P. 531–545.
22. **Ji-Huan H.** Max-min approach to nonlinear oscillators // *Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2008. V. 9. P. 207–210.
23. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** Using homotopy analysis method to determine profile for disk cam by means of optimization of dissipated energy // *Intern. Rev. Mech. Engng.* 2011. V. 5. P. 941–946.
24. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Noghrehabadi A. R., Yildirim A.** Asymptotic investigation of buckled beam nonlinear vibration // *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Engng.* 2012. V. 36, N M2. P. 107–116.
25. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Reza A., Zare J.** Accurate modeling of preload discontinuity in the analytical approach of the nonlinear free vibration of beams // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2012. V. 226, N 10. P. 2474–2484. DOI: 10.1177/0954406211435196.
26. **Shadloo M. S., Kimiaefar A.** Application of homotopy perturbation method to find an analytical solution for magneto hydrodynamic flows of viscoelastic fluids in converging/diverging channels // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2011. V. 225. P. 347–353.
27. **He J. H.** Hamiltonian approach to nonlinear oscillators // *Phys. Lett. A*. 2010. V. 374, N 23. P. 2312–2314.
28. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** Asymptotic approach for nonlinear vibrating beams with saturation type boundary condition // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2013. V. 227, N 11. P. 2479–2486. DOI: 10.1177/0954406213475561.
29. **Moghimi Zand M., Ahmadian M. T.** Application of homotopy analysis method in studying dynamic pull-in instability of microsystems // *Mech. Res. Comm.* 2009. V. 36. P. 851–858.
30. **Herisanu N., Marinca V.** An optimal approach to study the nonlinear behaviour of a rotating electrical machine // *J. Appl. Math.* 2012. V. 2012. Article ID 465023. DOI: 10.1155/2012/465023.

*Поступила в редакцию 2/XI 2012 г.,  
в окончательном варианте — 14/III 2013 г.*

---