

УДК 533; 517.958

ПРОЕКТИВНАЯ ПОДМОДЕЛЬ ВИХРЯ ОВСЯННИКОВА

А. С. Павленко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: andrey@hydro.nsc.ru

Исследована подмодель вихря Овсянникова с проективной симметрией. Интегрирование факторсистемы подмодели сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Изучены свойства решений этого уравнения. Показано, что подмодель описывает движение газа с нестационарными источником и стоком. Рассмотрена задача о движении объема газа между поршнями сферической формы, найдено ее решение с инвариантной ударной волной.

Ключевые слова: вихрь Овсянникова, частично инвариантные решения уравнений газовой динамики, ударные волны.

Введение. Особым вихрем называется частично инвариантное решение уравнений газовой динамики (УГД) ранга два дефекта один, построенное по группе вращений $SO(3)$, допускаемой УГД [1]. Этот класс решений обобщает сферически-симметричные решения в том смысле, что касательная к сферам компонента вектора скорости отлична от нуля. Это решение С. И. Похожаев предложил назвать вихрем Овсянникова (ВО). Система уравнений ВО распадается на инвариантную подсистему, описывающую радиальное движение газа, и уравнения для неинвариантной функции, описывающей сферическую составляющую движения. Последняя подсистема интегрируется в неявном виде на решениях инвариантной подсистемы.

Для полного описания движения газа необходимо найти решения радиальной подсистемы. Используя симметрии, допускаемые радиальной подсистемой, можно находить ее инвариантные решения. В работе [2] рассмотрена подмодель газовой динамики, порожденная подалгеброй $\{so(3), \partial_t\}$, получившая название “стационарный вихрь Овсянникова”. Однородный вихрь Овсянникова (подмодель, порожденная подалгеброй $\{so(3), K\}$, где K — оператор растяжения) исследован в [2, 3]. В этих подмоделях инвариантные функции выражаются через вспомогательную функцию одной переменной и ее производные. В случае стационарного вихря Овсянникова эта функция является решением обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка, не разрешенного относительно производной. Для однородного вихря Овсянникова вспомогательная функция является решением неоднородного уравнения Шварца.

В данной работе исследуется проективная подмодель вихря Овсянникова. Искомые функции в этой подмодели также записываются в терминах вспомогательной функции, которая является решением ОДУ первого порядка, не разрешенного относительно производной. Через каждую точку области определения решений этого уравнения проходят четыре интегральные кривые, что позволяет строить решение, соответствующее движению газа с ударной волной [4].

1. Вихрь Овсянникова. Пусть r, θ, φ — сферические координаты, причем $0 \leq \theta \leq \pi$; \bar{U}, V, W — радиальная, широтная (по θ) и долготная (по φ) компоненты вектора скорости. Введем модуль \bar{H} касательной составляющей (V, W) вектора скорости и угол ω ее отклонения от меридиана: $V = \bar{H} \cos \omega, W = \bar{H} \sin \omega$.

Представление рассматриваемого частично инвариантного решения ранга два дефекта один с неинвариантной функцией ω имеет вид

$$\bar{U} = \bar{U}(t, r), \quad \bar{H} = \bar{H}(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad S = S(t, r), \quad \omega = \omega(t, r, \theta, \varphi). \quad (1.1)$$

Уравнения вихря Овсянникова распадаются на инвариантную подсистему, описывающую радиальное движение газа:

$$D_0 \bar{U} + \rho^{-1} p_r = r^{-1} \bar{H}^2, \quad D_0(r \bar{H}) = 0, \quad D_0 S = 0, \quad p = f(\rho, S); \quad (1.2)$$

$$k D_0 h = h^2 + 1, \quad k = r/\bar{H}, \quad h = k(\rho^{-1} D_0 \rho + r^{-2} (r^2 \bar{U})_r), \quad (1.3)$$

и переопределенную систему на неинвариантную функцию ω , которая после замены $h = \operatorname{tg} \tau$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \omega_\tau + \cos \omega \omega_\theta + (\sin \omega / \sin \theta) \omega_\varphi &= -\operatorname{ctg} \theta \sin \omega, \\ \sin \theta \sin \omega \omega_\theta - \cos \omega \omega_\varphi &= \cos \theta \cos \omega + \operatorname{tg} \tau \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.4)$$

после чего интегрируется в неявном виде [1]. В (1.2)–(1.4) оператор $D_0 = \partial_t + \bar{U} \partial_r$; k, h — вспомогательные функции переменных t, r ; $\tau = \tau(t, r)$ — модифицированное время.

Если в начальный момент $\tau = 0$ проекция частицы на единичную сферу S_1 задается координатами x_0, y_0, z_0 (которым соответствуют сферические координаты $r_0 = 1, \theta_0, \varphi_0$), то сферическая траектория частицы (проекция траектории на сферу S_1) описывается вектор-функцией

$$\mathbf{x}(\tau) = (l(\tau) \mathbf{x}_0 + \mathbf{m} \sin \tau) / \sin \theta_0, \quad (1.5)$$

где $l(\tau) = \cos \tau \sin \theta_0 + \sin \tau \cos \theta_0 \cos \omega_0$; $\mathbf{m} = (-y_0 \sin \omega_0, x_0 \sin \omega_0, -\cos \omega_0)$. Начальное распределение $\omega_0(\theta_0, \varphi_0) = \omega(0, \theta_0, \varphi_0)$ функции ω должно иметь специальный вид [1]. При выборе $\omega_0(\theta_0, \varphi_0) = \pi/2$ обеспечивается свойство полноты функции $\omega_0(\theta_0, \varphi_0)$: она определена и непрерывна на сфере без полюсов $0 < \theta_0 < \pi, 0 \leq \varphi_0 < 2\pi$. В этом случае формула (1.5) для сферических траекторий частиц упрощается:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0 \cos \tau + \mathbf{m} \sin \tau / \sin \theta_0, \quad \mathbf{m} = (-y_0, x_0, 0). \quad (1.6)$$

Такое движение является вращательно-симметричным (т. е. инвариантно относительно поворотов вокруг оси z). Траектории частиц являются плоскими кривыми. В начальный момент $\tau = 0$ частицы находятся на сфере без полюсов и в момент τ занимают сферический пояс $\tau < \theta < \pi - \tau$. Для окончательного описания движения газа необходимо проинтегрировать инвариантную подсистему (1.2), (1.3).

2. Проективная подмодель. Уравнения газовой динамики в случае политропного газа с уравнением состояния

$$p = S \rho^{5/3} \quad (2.1)$$

допускают 14-мерную алгебру Ли L_{14} . Характерным для L_{14} является проективный оператор

$$\mathcal{P} = t(t \partial_t + x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z - u \partial_u - v \partial_v - w \partial_w - 3\rho \partial_\rho - 5p \partial_p) + x \partial_u + y \partial_v + z \partial_w,$$

который не допускается уравнениями политропного газа в случае показателя адиабаты γ , отличного от $5/3$.

Будем называть *проективной подмоделью вихря Овсянникова* (проективным вихрем Овсянникова) частично инвариантное решение УГД ранга один дефекта один, построенное по алгебре симметрий $L = \{so(3), \partial_t + \mathcal{P}\}$ из оптимальной системы подалгебр [5], где $so(3)$ — трехмерная алгебра Ли группы вращений $SO(3)$. В координатах $r, \theta, \varphi, \bar{U}, \bar{H}, \omega$ алгебра L имеет набор инвариантов

$$\frac{r}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad \bar{U}\sqrt{t^2 + 1} - \frac{rt}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad \bar{H}\sqrt{t^2 + 1}, \quad \rho(t^2 + 1)^{3/2}, \quad p(t^2 + 1)^{5/2}.$$

Представление решения подмодели имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{U(\lambda) + \lambda t}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad \bar{H} = \frac{H(\lambda)}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad \rho = \frac{R(\lambda)}{(t^2 + 1)^{3/2}}, \quad p = \frac{P(\lambda)}{(t^2 + 1)^{5/2}}, \\ c^2 &= \frac{C^2(\lambda)}{t^2 + 1}, \quad C^2(\lambda) = \frac{5}{3}SR^{2/3}, \quad S = S(\lambda), \quad \omega = \omega(t, r, \theta, \varphi), \quad \lambda = \frac{r}{\sqrt{t^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь скорость звука $c^2 = \partial p / \partial \rho = 5p / (3\rho)$ и энтропия S определены уравнением состояния (2.1).

Уравнения рассматриваемой подмодели могут быть получены из уравнений вихря Овсянникова. Действительно, поскольку величины $\bar{U}, \bar{H}, S, \rho, \omega$ из (2.2) являются частным случаем (1.1), они удовлетворяют инвариантной подсистеме (1.2), (1.3) и дополнительной подсистеме (1.4). Так как величины $\bar{U}, \bar{H}, S, \rho$ из (2.2) не содержатся в уравнениях (1.4), то форма представления решения (2.2) не влияет на интегрирование дополнительной подсистемы. Инвариантная подсистема проективного вихря Овсянникова получается подстановкой (2.2) в уравнения (1.2), (1.3):

$$\frac{1}{2}(U^2)' + \frac{P'}{R} = \frac{H^2}{\lambda} - \lambda, \quad (\lambda H)' = 0, \quad S' = 0; \quad (2.3)$$

$$\frac{\lambda}{H}Uh' = h^2 + 1, \quad h = \frac{\lambda}{H} \left(U(\ln R)' + \frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2 U)' \right). \quad (2.4)$$

Из (2.3) следует $H = a_0/\lambda$ и изэнтропичность движения газа $S = S_0 = \text{const}$. Здесь не рассматриваются сферически-симметричные решения, поэтому выполняется неравенство $\bar{H} = a_0\lambda^{-1}(t^2 + 1)^{-1} > 0$ ($a_0 > 0$). Выразив функцию $U(\lambda)$ из первого уравнения в (2.4) и подставив ее во второе уравнение в (2.4), после интегрирования получим $R(\lambda) = R_0|h'|/\sqrt{h^2 + 1}$. Таким образом, все инвариантные функции выражаются через λ, h, h' :

$$U = a_0 \frac{h^2 + 1}{\lambda^2 h'}, \quad H = \frac{a_0}{\lambda}, \quad R = R_0 \frac{|h'|}{\sqrt{h^2 + 1}}, \quad S = S_0, \quad C^2 = C_0 \frac{h'^{2/3}}{(h^2 + 1)^{1/3}}, \quad (2.5)$$

где $C_0 = (5/3)S_0R_0^{2/3}$.

Используя уравнение состояния (2.1), записанное через инварианты: $P = S_0R^{5/3}$, вычислим интеграл

$$\int \frac{P'}{R} d\lambda = \frac{5}{2}S_0R^{2/3} + \text{const} = \frac{3}{2}C^2(\lambda) + \text{const}, \quad (2.6)$$

где последнее равенство верно в силу (2.2). Тогда первое уравнение в (2.3) с учетом (2.5), (2.6) дает *инвариантный интеграл Бернулли*

$$U^2 + 3C^2 = -B(\lambda), \quad B(\lambda) = (\lambda^4 - 2b_0\lambda^2 + a_0^2)/\lambda^2. \quad (2.7)$$

Ограничение на постоянную b_0 будет определено ниже. В результате подстановки в (2.7) выражений $U(\lambda)$, $C^2(\lambda)$ из (2.5) получим *ключевое уравнение* (КУ) на функцию $h(\lambda)$

$$F(h', h, \lambda) \equiv 3C_0 h'^{8/3} + B(\lambda) h'^2 (h^2 + 1)^{1/3} + (h^2 + 1)^{7/3} a_0^2 / \lambda^4 = 0. \quad (2.8)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной.

3. Свойства решений ключевого уравнения. Приведем ряд основных понятий теории неявных дифференциальных уравнений [6].

Криминантой уравнения $F(h', h, \lambda) = 0$ называется множество *особых точек* этого уравнения, т. е. точек поверхности $F = 0$, в которых $\partial F / \partial h' = 0$. *Дискриминантная кривая* (ДК) уравнения $F(h', h, \lambda) = 0$ есть проекция криминанты на плоскость (h, λ) параллельно оси h' и получается исключением h' из соотношений

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial h'} = 0.$$

Точка криминанты называется *неправильной особой точкой*, если касательная к поверхности $F = 0$ в этой точке совпадает с *контактной плоскостью* $dh = p d\lambda$, где p — значение производной $dh/d\lambda$ в рассматриваемой точке. Множество неправильных особых точек уравнения $F(h', h, \lambda) = 0$ удовлетворяет системе

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial h'} = 0, \quad F_\lambda + h' \frac{\partial F}{\partial h} = 0. \quad (3.1)$$

Все остальные точки ДК называются *правильными особыми точками*. Неправильные особые точки могут быть следующих типов: *сложенные седло, фокус или узел*. Они получаются из обычных седла, фокуса или узла при помощи операции складывания [6].

Свойство 1. Из КУ (2.8) следует $B(\lambda) < 0$. Тогда из (2.7) получим ограничения на переменную λ и параметры a_0 , b_0 :

$$0 < \tilde{\lambda}_1 < \lambda < \tilde{\lambda}_2 \quad \left(\tilde{\lambda}_{1,2} = \sqrt{b_0 \mp \sqrt{b_0^2 - a_0^2}} \right), \quad 0 < a_0 < b_0. \quad (3.2)$$

Отметим, что требование $B(\lambda) < 0$ не является достаточным для существования решений (2.8).

Свойство 2. 1. *Дискриминантная кривая* $\partial\Omega$ КУ (2.8) задается уравнением

$$h^2 = (\lambda B(\lambda) / \varkappa)^4 - 1 \quad (\varkappa = 4(C_0^3 a_0^2)^{1/4} > 0). \quad (3.3)$$

Она определена при $\lambda \in [\delta_1, \delta_2]$ (δ_1, δ_2 — корни многочлена $\lambda^2 B(\lambda) + \varkappa \lambda$), непрерывна и ограничена.

2. *Верхняя часть*

$$d_+(\lambda) = ((\lambda B(\lambda) / \varkappa)^4 - 1)^{1/2} > 0 \quad (3.4)$$

ДК (3.3) имеет единственный экстремум (максимум) в точке

$$\delta_0 = ((b_0 + \sqrt{b_0^2 + 3a_0^2}) / 3)^{1/2}, \quad (3.5)$$

причем $d_+(\lambda)$ монотонно возрастает на отрезке (δ_1, δ_0) и монотонно убывает на (δ_0, δ_2) . Нижняя часть $d_-(\lambda) = -((\lambda B(\lambda) / \varkappa)^4 - 1)^{1/2}$ ДК (3.3) симметрична $d_+(\lambda)$ относительно оси λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Дифференцирование (2.8) по h' дает

$$F_{h'} \equiv 2h'(4C_0 h'^{2/3} + B(\lambda)(h^2 + 1)^{1/3}) = 0.$$

Если $h' = 0$, то из (2.8) следует $a_0 = 0$, что противоречит $a_0 > 0$. Подстановка в (2.8) другого решения

$$h'^2 = -B^3(\lambda)(h^2 + 1)/(4^3 C_0^3)$$

приводит к уравнению (3.3).

Из (3.3) следует неравенство

$$(\lambda B(\lambda)/\varkappa)^4 - 1 = \varkappa^{-4}(\lambda^2 B^2(\lambda) + \varkappa^2)(\lambda B(\lambda) - \varkappa)(\lambda B(\lambda) + \varkappa) \geq 0. \quad (3.6)$$

Поскольку $\varkappa > 0$, $\lambda > 0$, $B(\lambda) < 0$, неравенство (3.6) эквивалентно неравенству

$$\lambda B(\lambda) + \varkappa = (\lambda^4 - 2b_0\lambda^2 + \varkappa\lambda + a_0^2)/\lambda \leq 0. \quad (3.7)$$

Так как $b_0 > 0$, $\varkappa > 0$ в силу (3.2), (3.3), то имеется всего две перемены знаков в ряду коэффициентов многочлена четвертого порядка. По теореме Декарта [7] этот многочлен или не имеет корней, или имеет два положительных корня δ_1, δ_2 . Множество положительных $\lambda > 0$ решений уравнения (3.7) образуют отрезок $[\delta_1, \delta_2]$. Поскольку ДК (3.3) непрерывна при $\lambda > 0$, на $[\delta_1, \delta_2]$ она ограничена. Отметим, что $d_+(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (\delta_1, \delta_2)$.

2. Дифференцируя (3.4), получим

$$d'_+(\lambda) = \frac{1}{2d_+(\lambda)} \frac{4\lambda B^3(\lambda)(3\lambda^4 - 2b_0\lambda^2 - a_0^2)}{\varkappa^4}.$$

Многочлен $3\lambda^4 - 2b_0\lambda^2 - a_0^2$ имеет ровно один положительный корень δ_0 (3.5), причем слева от δ_0 он принимает отрицательные значения, а справа — положительные. Так как $B(\lambda) < 0$ и $d_+(\lambda) > 0$ на (δ_1, δ_2) , то δ_0 является единственным экстремумом (максимумом) функции $d_+(\lambda)$. Таким образом, свойство 2 доказано.

Отметим, что выполняются неравенства

$$0 < \tilde{\lambda}_1 < \delta_1 < \delta_2 < \tilde{\lambda}_2, \quad (3.8)$$

где $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ — корни уравнения $B(\lambda) = 0$, а δ_1, δ_2 — корни уравнения $\lambda B(\lambda) + \varkappa = 0$. Неравенства (3.8) справедливы, поскольку кривая $h = \lambda B(\lambda) + \varkappa$ расположена над кривой $h = B(\lambda)$.

Свойство 3. Решения КУ (2.8) существуют только в области $\Omega = \{(h, \lambda): h^2 \leq (\lambda B(\lambda)/\varkappa)^4 - 1\}$, ограниченной ДК (3.3). Через каждую точку $(h_0, \lambda_0) \in \Omega$ проходят четыре интегральные кривые; две из них описывают монотонно возрастающие решения и две — монотонно убывающие. Ни для одной из интегральных кривых не существует вертикальных (параллельных оси h) асимптот.

Доказательство. Найдем число вещественных решений уравнения (2.8). После замены $q = h'^{2/3}$ уравнение (2.8) запишется с помощью многочлена $\bar{F}(q, h, \lambda)$ четвертого порядка по переменной q

$$\bar{F}(q, h, \lambda) \equiv 3C_0 q^4 + B(\lambda)(h^2 + 1)^{1/3} q^3 + (h^2 + 1)^{7/3} a_0^2 / \lambda^4 = 0. \quad (3.9)$$

Единственным экстремумом многочлена \bar{F} является точка минимума $q_{\min} = -B(\lambda) \times (h^2 + 1)^{1/3} / (4C_0)$. Поскольку в ряду коэффициентов многочлена \bar{F} всего две перемены знаков, по теореме Декарта [7] он или не имеет вещественных корней, или имеет два положительных вещественных корня. Так как при больших λ многочлен (3.9) принимает положительные значения, то он имеет два вещественных положительных корня $q_1(h, \lambda), q_2(h, \lambda)$ тогда и только тогда, когда в точке минимума q_{\min} выполняется $\bar{F}(q_{\min}, h, \lambda) \leq 0$, т. е.

$$\bar{F}(q_{\min}, h, \lambda) \equiv (h^2 + 1)^{4/3} \left(\frac{a_0^2}{\lambda^4} (h^2 + 1) - \frac{B^4(\lambda)}{4^4 C_0^3} \right) \leq 0,$$

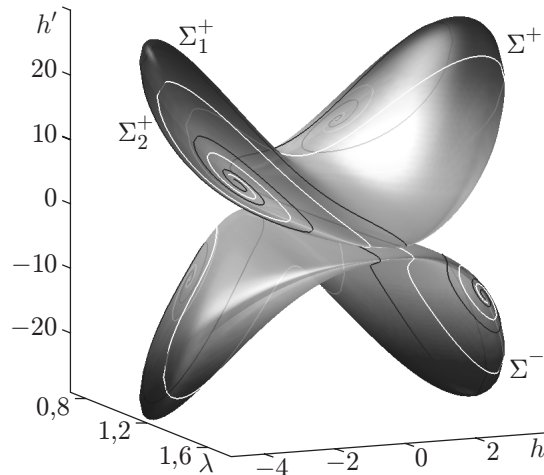


Рис. 1

что эквивалентно условию $(h, \lambda) \in \Omega$. Причем равенство $q_1(h, \lambda) = q_2(h, \lambda)$ равносильно условию $(h, \lambda) \in \partial\Omega$.

Уравнение (2.8), разрешенное относительно производной, распадается на четыре уравнения:

$$h'_1(\lambda) = q_1^{3/2}(h_1(\lambda), \lambda), \quad h'_2(\lambda) = q_2^{3/2}(h_2(\lambda), \lambda); \quad (3.10)$$

$$h'_3(\lambda) = -q_1^{3/2}(h_3(\lambda), \lambda), \quad h'_4(\lambda) = -q_2^{3/2}(h_4(\lambda), \lambda). \quad (3.11)$$

Поскольку $q_1(h, \lambda)$, $q_2(h, \lambda)$ конечны при $(h, \lambda) \in \Omega$ и являются корнями многочлена, они непрерывны по h , λ . Решая уравнения (3.10), (3.11) с начальными условиями $h_i(\lambda_0) = h_0$, получим два монотонно возрастающих $h = h_1(\lambda)$, $h = h_2(\lambda)$ и два монотонно убывающих $h = h_3(\lambda)$, $h = h_4(\lambda)$ решения КУ (2.8). Так как $q_1(h, \lambda)$, $q_2(h, \lambda)$ в рассматриваемой области не обращаются в бесконечность, то интегральные кривые $h_i(\lambda)$ не имеют вертикальных асимптот. Таким образом, свойство 3 доказано.

Так как $q_1(h, \lambda)$, $q_2(h, \lambda)$ непрерывны в Ω и $q_1(h, \lambda) = q_2(h, \lambda)$ только при $(h, \lambda) \in \Omega$, то в пространстве $\mathbb{R}^3(h', h, \lambda)$ первое и второе уравнения в (3.10) образуют соответственно нижнюю Σ_1^+ и верхнюю Σ_2^+ части поверхности Σ^+ , которая располагается в верхнем полупространстве $h' > 0$. Аналогично уравнения (3.11) образуют поверхность Σ^- , симметричную Σ^+ относительно плоскости $h = 0$. На рис. 1 в пространстве $\mathbb{R}^3(h', h, \lambda)$ показаны поверхности Σ^+ , Σ^- и на них — некоторые интегральные кривые уравнения (2.8) с параметрами $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

Каждой интегральной кривой $h = h_i(\lambda)$ из Ω соответствует интегральная кривая $h = h_i(\lambda)$, $h' = h'_i(\lambda)$ на поверхности Σ^+ или Σ^- . КУ (2.8) допускает отражение $h \rightarrow -h$, $h' \rightarrow -h'$, значит, каждая интегральная кривая поверхности Σ^- может быть получена из интегральной кривой поверхности Σ^+ отражением относительно оси λ . Поэтому достаточно исследовать свойства интегральных кривых только на одной поверхности, например Σ^+ .

В дальнейшем запись $\{h = h(\lambda)\} \subset \Sigma_i^+$ ($i = 1, 2$) будет означать, что интегральная кривая $\{h = h(\lambda)\} \subset \Omega$ является решением i -го уравнения (3.10); в этом случае кривая $h' = h'_i(\lambda)$, $h = h(\lambda)$ лежит на поверхности Σ_i^+ .

Свойство 4. 1. Для функций $q_1(h, \lambda)$, $q_2(h, \lambda)$ выполняется равенство $q_2(h, \lambda) = q_1(h, \lambda)$ при $(h, \lambda) \in \partial\Omega$ и справедливо неравенство $q_2(h, \lambda) > q_1(h, \lambda)$ при $(h, \lambda) \in \Omega \setminus \partial\Omega$.

2. Каждая правильная особая точка ДК $\partial\Omega$ является точкой ветвления (точкой остановки) — из нее выходят (в нее приходят) две интегральные кривые $\{h = h_1(\lambda)\} \subset$

Σ_1^+ , $\{h = h_2(\lambda)\} \subset \Sigma_2^+$ ключевого уравнения (2.8). В этих точках интегральные кривые $h = h_1(\lambda)$, $h = h_2(\lambda)$ имеют общую касательную.

3. В правильных особых точках ДК $\partial\Omega$ вторая производная $h''(\lambda)$ решения КУ (2.8) обращается в бесконечность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 4.1 и 4.2 непосредственно следуют из свойств интегральных кривых $h = h_i(\lambda)$ и функций $q_i(h, \lambda)$ (см. свойство 3). Свойство 4.2 также можно получить как следствие теоремы Чибрарио [6] о нормальной форме уравнения, не разрешенного относительно производной в окрестности правильной особой точки.

Для доказательства свойства 4.3 дифференцируем уравнения $F(h'(\lambda), h(\lambda), \lambda) = 0$ по переменной λ и получаем $h'' = -(h'F_h + F_\lambda)/F_{h'}$. Утверждение следует из определения правильной особой точки: $F_{h'} = 0$ и $h'F_h + F_\lambda \neq 0$.

Свойство 5. 1. На поверхности Σ^+ существуют ровно две неправильные особые точки.

2. Интегральные кривые “обматывают” поверхность Σ^+ по направлению от одной неправильной особой точки к другой — “разматываясь” вокруг одной точки, а затем “наматываясь” на другую. Неправильные особые точки есть сложенные фокусы (см. рис. 1, 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из первых двух уравнений в (3.1) находятся выражения функций h^2 , h' через λ : $h^2 = (\lambda B(\lambda)/\varkappa)^4 - 1$, $h' = (-4a_0^2 B^7(\lambda)/\varkappa^8)^{1/2}$. Подстановка их в третье уравнение в (3.1) дает

$$-\frac{4a_0^2 \lambda^{7/3} B^{25/3}}{k^{28/3}} [\text{sign}(h)((\lambda B(\lambda)/\varkappa)^4 - 1)^{1/2} a_0 \lambda (-B)^{1/2} + (3\lambda^4 - 2b_0 \lambda^2 - a_0^2)] = 0. \quad (3.12)$$

Множитель перед квадратной скобкой в (3.12) не обращается в нуль. Поэтому число решений (3.12), лежащих на отрезке $[\delta_1, \delta_2]$, есть число точек пересечения дискриминантной кривой (3.3) и кривой

$$h = \chi(\lambda) \equiv -\frac{3\lambda^4 - 2b_0 \lambda^2 - a_0^2}{a_0 \lambda \sqrt{-B(\lambda)}}.$$

Функция $\chi(\lambda)$ обращается в нуль только в точке δ_0 (3.5), в которой обе части $d_+(\lambda)$, $d_-(\lambda)$ дискриминантной кривой достигают экстремума. Поэтому если доказать, что функция $\chi(\lambda)$ монотонно убывает на $[\delta_1, \delta_2]$, то из свойства 2.2 будет следовать, что дискриминантная кривая (3.3) и функция $h = \chi(\lambda)$ имеют ровно две точки пересечения.

В силу неравенств (3.8) достаточно доказать монотонность $h = \chi(\lambda)$ на интервале $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$, т. е. $\chi'(\lambda)|_{(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)} < 0$. Справедливо равенство

$$\chi'(\lambda) = 2\psi(\lambda)/(a_0 \lambda^2 (-B(\lambda))^{3/2}),$$

где $\psi(\lambda) = 3\lambda^6 - 9b_0 \lambda^4 + 7a_0^2 \lambda^2 + 2b_0^2 \lambda^2 - 3a_0^2 b_0$. Уравнение $\psi'(\lambda) \equiv 2\lambda(9\lambda^4 - 18b_0 \lambda^2 + 7a_0^2 + 2b_0^2) = 0$ имеет всего два положительных корня $\mu_{1,2} = (b_0 \pm \sqrt{7(b_0^2 - a_0^2)}/3)^{1/2}$, причем μ_1 является точкой максимума, а μ_2 — точкой минимума и выполняются неравенства $\tilde{\lambda}_1 < \mu_1 < \mu_2 < \tilde{\lambda}_2$. Из ограничений (3.2) на константы a_0 , b_0 следуют неравенства

$$\psi(\tilde{\lambda}_1) = -4(b_0^2 - a_0^2)(b_0 - \sqrt{b_0^2 - a_0^2}) < 0, \quad \psi(\tilde{\lambda}_2) = -4(b_0^2 - a_0^2)(b_0 + \sqrt{b_0^2 - a_0^2}) < 0.$$

Поэтому $\psi(\lambda) < 0$ и $\chi'(\lambda) < 0$ при $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$.

2. Пусть точки ветвления $\alpha_k \in \partial\Omega$ и точки остановки $\beta_k \in \partial\Omega$ ($k = 1, 2, \dots$) выбраны таким образом, что из α_k выходят интегральные кривые $\{h = h_{1,k}(\lambda)\} \subset \Sigma_1^+$,

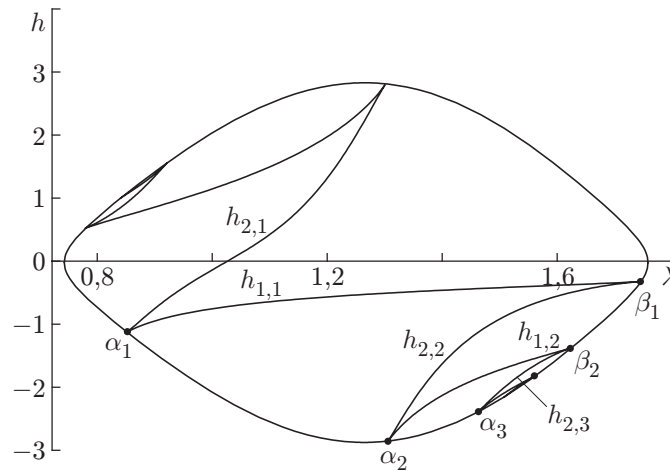


Рис. 2

$\{h = h_{2,k}(\lambda)\} \subset \Sigma_2^+$, а в β_k приходят интегральные кривые $\{h = h_{1,k}(\lambda)\} \subset \Sigma_1^+$, $\{h = h_{2,k+1}(\lambda)\} \subset \Sigma_2^+$ (рис. 2).

Из формул (3.10) и свойств 4.1, 4.2 следует, что интегральные кривые $h = h_{1,k}(\lambda)$, $h = h_{2,k}(\lambda)$ в точках α_k имеют общую касательную, и в некоторой окрестности точки α_k кривая $h = h_{1,k}(\lambda)$ располагается правее кривой $h = h_{2,k}(\lambda)$, т. е. $h'_{2,k}(\lambda) > h'_{1,k}(\lambda)$. Кроме точки α_k интегральные кривые $h = h_{1,k}(\lambda)$, $h = h_{2,k}(\lambda)$ не имеют точек пересечения. Действительно, поскольку $h_{1,k}(\lambda)$ и $h_{2,k}(\lambda)$ монотонно возрастают, в точке их пересечения λ_* (если такая существует) выполняется неравенство $h'_{2,k}(\lambda_*) < h'_{1,k}(\lambda_*)$, чего не может быть в силу свойства 4.1. Значит, кривая $h = h_{2,k}(\lambda)$ расположена левее кривой $h = h_{1,k}(\lambda)$. Аналогично показывается, что интегральная кривая $h = h_{2,k+1}(\lambda)$ расположена правее интегральной кривой $h = h_{1,k}(\lambda)$. Поэтому если дуга $l(\alpha_k, \beta_k)$ ДК соединяет точки α_k, β_k и содержит точку β_{k+1} , то $\alpha_{k+1} \in l(\alpha_k, \beta_k)$ и справедливо вложение $l(\alpha_1, \beta_1) \supset l(\alpha_2, \beta_2) \supset \dots \supset l(\alpha_*, \beta_*)$, где $\alpha_* = \lim \alpha_k$, $\beta_* = \lim \beta_k$ при $k \rightarrow \infty$.

Допустим, что $\alpha_* \neq \beta_*$. Тогда из замкнутости Ω , гладкости функций $h_{1,k}(\lambda)$, $h_{2,k}(\lambda)$ и взаимного расположения их графиков следует сходимость: $h_{1,k}(\lambda), h_{2,k}(\lambda) \rightarrow g(\lambda)$ и $h'_{1,k}(\lambda), h'_{2,k}(\lambda) \rightarrow g'(\lambda)$ при $k \rightarrow \infty$, где $h = g(\lambda)$ — гладкая кривая в Ω , соединяющая точки α_* и β_* . Последний предел согласно (3.10) эквивалентен пределу $q_1^{3/2}(h_{1,k}(\lambda), \lambda)$, $q_2^{3/2}(h_{2,k}(\lambda), \lambda) \rightarrow g'(\lambda)$ при $k \rightarrow \infty$, и поэтому в силу непрерывности $q_i(h, \lambda)$ верно равенство $g'(\lambda) = q_1^{3/2}(g(\lambda), \lambda) = q_2^{3/2}(g(\lambda), \lambda)$. Из этих равенств и свойства 4.1 следует: а) кривая $(g'(\lambda), g(\lambda), \lambda)$ лежит на кривой КУ; б) в точках кривой $(g'(\lambda), g(\lambda), \lambda)$ касательная к поверхности Σ^+ совпадает с контактной плоскостью. Следовательно, кривая $h = g(\lambda)$ состоит из неправильных особых точек. В силу свойства 5.1 это означает, что $\alpha_* = \beta_*$.

В пространстве переменных (h', h, λ) интегральные кривые $(h'_{1,k}(\lambda), h_{1,k}(\lambda), \lambda) \subset \Sigma_1^+$ и $(h'_{2,k}(\lambda), h_{2,k}(\lambda), \lambda) \subset \Sigma_2^+$ образуют одну кривую, которая обматывает поверхность Σ^+ и, приближаясь к точке α_* , совершает вокруг нее бесконечное число оборотов. Такое поведение интегральных кривых вблизи неправильной особой точки свойственно только сложенному фокусу. Аналогично устанавливается, что другая неправильная особая точка поверхности Σ^+ тоже сложенный фокус. Таким образом, свойство 5 доказано.

4. Движение газа. Пусть интегральная кривая $h = h(\lambda)$ пересекает ДК $\partial\Omega$ в точках $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$ ($\lambda_1 < \lambda_2$). Согласно представлению $\lambda = r/\sqrt{t^2 + 1}$ образами точек λ_1 и λ_2 в пространстве событий $\mathbb{R}^4(r, \theta, \varphi, t)$ являются гиперboloиды $\Gamma_1: r_1 = \lambda_1\sqrt{t^2 + 1}$,

Γ_2 : $r_2 = \lambda_2 \sqrt{t^2 + 1}$, проекции которых в пространство $\mathbb{R}^3(r, \theta, \varphi)$ есть сферы с переменными радиусами

$$S_1(t): r = \lambda_1 \sqrt{t^2 + 1}, \quad S_2(t): r = \lambda_2 \sqrt{t^2 + 1}.$$

Ниже будет показано, что сферы $S_1(t)$, $S_2(t)$ есть звуковые характеристики.

Утверждение 1. *Величины (2.2), (2.5) на решении $h = h(\lambda)$ с функцией $\omega(\tau, \theta, \varphi)$, определяемой начальным распределением $\omega(0, \theta, \varphi) \equiv \pi/2$, задают движение объема газа между источником $S_1(t)$ и стоком $S_2(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ газ занимает объем $\Pi = \{(r_0, \theta_0, \varphi_0): |\tau(r_0)| < \theta_0 < \pi - |\tau(r_0)|, \lambda_1 \leq r_0 \leq \lambda_2\}$ и его состояние определено так:*

$$\bar{U}|_{t=0} = a_0 \frac{h^2 + 1}{r_0^2 h'}, \quad \bar{H}|_{t=0} = \frac{a_0}{r_0}, \quad \rho|_{t=0} = R_0 \frac{|h'|}{\sqrt{h^2 + 1}}, \quad (4.1)$$

$$S|_{t=0} = S_0, \quad \omega|_{t=0} = \omega(\tau(r_0), \theta_0, \varphi_0),$$

где $h = h(r_0)$; $h' = h'(r_0)$; $\tau(\lambda) = \arctg h(\lambda)$; $(r_0, \theta_0, \varphi_0) \in \Pi$.

Частицы, стартующие в начальный момент $t = 0$ со сферического пояса $|\tau(r_0)| < \theta < \pi - |\tau(r_0)|$ сферы радиуса r_0 двигаются по траекториям

$$\mathbf{x}(t) = r(t)(\mathbf{x}_0 \cos \tau(\lambda(t)) + \mathbf{m} \sin \tau(\lambda(t)) / \sin \theta_0), \quad (4.2)$$

где $r_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ — начальное положение частицы в декартовых координатах; $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $\mathbf{m} = (-y_0, x_0, 0)$, и в момент времени t занимают сферический пояс

$$|\tau(\lambda(t))| < \theta < \pi - |\tau(\lambda(t))|, \quad r(t) = \lambda(t) \sqrt{t^2 + 1}. \quad (4.3)$$

Здесь $r(t)$ — радиус сферы, а $\lambda = \lambda(t)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{a_0}{t^2 + 1} \frac{h^2(\lambda) + 1}{\lambda^2 h'(\lambda)}, \quad \lambda(0) = r_0. \quad (4.4)$$

Источник и сток расположены на сферических поясах S_{f1} , S_{f2} (определяемых неравенствами (4.3) с $\lambda(t) = \lambda_1, \lambda_2$) сфер $S_1(t)$, $S_2(t)$. Их расход $Q(t) = 4\pi R_0 a_0 / (t^2 + 1)$. На источнике и стоке ускорение частиц бесконечно, а величины (2.2) конечны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начальные данные (4.1) находятся из (2.2), (2.5) при $t = 0$.

Формула (4.2) получается из сферической составляющей (1.6) движения с учетом радиальной составляющей $r(t)$. Уравнение (4.4) получается подстановкой $r(t) = \lambda(t) \sqrt{t^2 + 1}$ в уравнения радиального движения газа $dr/dt = \bar{U}(r, t)$, $r(0) = r_0$.

Из (4.2) следует формула $z'(t) = z_0 r(t) \cos \tau(\lambda(t))$, которой и определяется размер сферического пояса (4.3). В частности, в момент времени t_s , при котором $\tau(\lambda(t_s)) = 0$, частицы занимают всю сферу радиуса $r(t_s)$ без полюсов. Область Π определяется в момент $t = 0$ сферическими поясами (4.3), где $\lambda(0) = r_0 \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Для интегральной кривой $\{h = h(\lambda)\} \subset \Omega$ выполняется неравенство $h'(\lambda)|_{[\lambda_1^*, \lambda_2^*]} > 0$, значит, $\bar{U}|_{\Pi} > 0$ и на сферах $S_1(t)$ и $S_2(t)$ расположены источник и сток. Расход газа

через поверхность $S_i(t)$ ($i = 1, 2$) вычисляется по формуле $Q_i(t) = \int_{S_{fi}} \rho u_i dS$. При вы-

числении расхода учитывается, что нормальная составляющая скорости движения газа через поверхность S_i относительно скорости движения этой поверхности есть $u_i = \bar{U}(\lambda_i, t) - d(\lambda_i \sqrt{t^2 + 1})/dt = U(\lambda_i)/\sqrt{t^2 + 1}$, а площадь сферического пояса $S_{fi} = 2\pi h_{si} r_i$, где $h_{si} = 2r_i \cos \tau(\lambda_i) = 2r_i/\sqrt{h^2(\lambda_i) + 1}$; $r_i = \lambda_i \sqrt{t^2 + 1}$. Величины ρ и U определены формулами (2.2), (2.5).

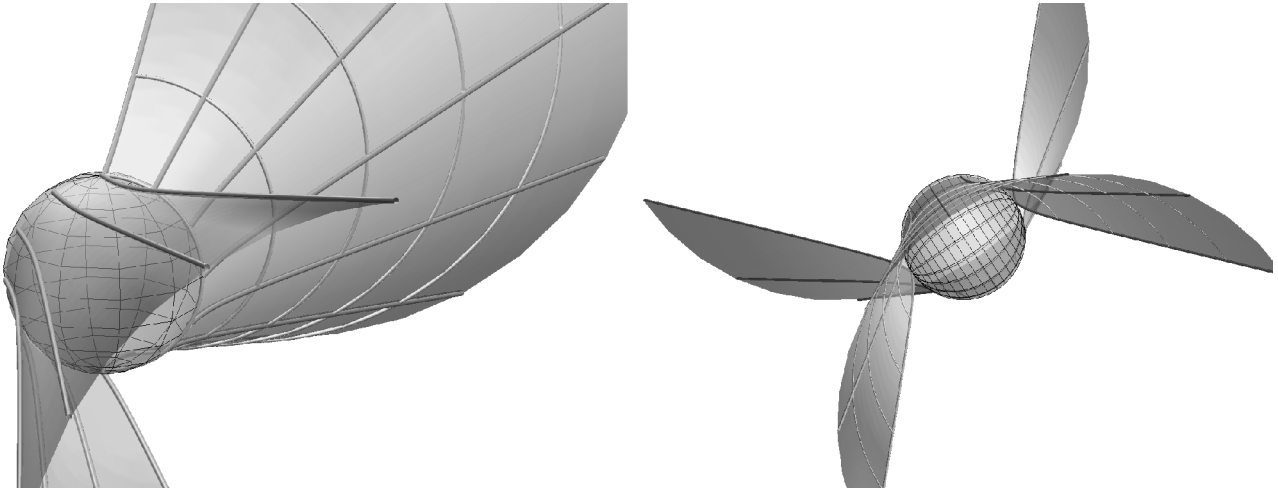


Рис. 3

Функции $h(\lambda)$, $h'(\lambda)$ ограничены, значит, величины (2.2) конечны. Дифференцируя по t компоненты скоростей \bar{U} , \bar{H} из (2.2) для нахождения ускорения и используя свойство 4.3, получим бесконечное ускорение частиц на сферах $S_i(t)$. Таким образом, утверждение 1 доказано.

На рис. 3 показаны траектории частиц, стартующих с меридианов сферы, поверхности, сотканные из траекторий, и образы меридианов. Видно, что траектории не являются прямыми линиями.

Введем интеграл

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{a_0} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda^2 d \operatorname{arctg} h(\lambda).$$

Утверждение 2. Пусть в проективном ВО объем газа Γ движется между двумя сферическими поршнями $P_1(t)$, $P_2(t)$, радиус которых меняется по закону

$$P_1(t): r = \mu_1(t) \sqrt{t^2 + 1}, \quad P_2(t): r = \mu_2(t) \sqrt{t^2 + 1},$$

где $\mu_i = \mu_i(t)$ — решение задачи Коши (4.4) с начальными данными $\mu_i(0) = r_i$, причем $\lambda_1 < r_1 < r_2 < \lambda_2$. Возможны следующие варианты движения объема газа:

1. При $I(r_2, \lambda_2) < \pi/2$ поршень P_2 за конечное время t_* достигнет характеристики S_2 , после чего решение разрушается.

2. При $I(r_2, \lambda_2) \geq \pi/2$ объем газа Γ будет двигаться неограниченное время. Расстояние между поршнями P_1 , P_2 и высота сферического пояса каждого поршня P_i со временем будут стремиться к бесконечности, а угол, образующий сферический пояс поршня P_i , — к конечной величине $\pi - 2|\tau(\mu_i^*)| > 0$, где $\mu_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_i(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Условие $I(r_2, \lambda_2) < \pi/2$ получается интегрированием уравнения (4.4) с функцией $\mu_2(t)$ вместо $\lambda(t)$:

$$\frac{1}{a_0} \int_{r_2}^{\lambda_2} \mu_2^2 d \operatorname{arctg} h(\mu_2) = \int_0^{t_*} d \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} t_* < \frac{\pi}{2}.$$

2. Пусть поршень P_2 не достигает за конечное время характеристики S_2 . Тогда из того, что функция $\mu_2(t)$ монотонно возрастает и ограничена ($\lambda_1 \leq \mu_2(t) \leq \lambda_2$), следует

существование

$$\mu_2^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_i(t) \leq \lambda_2 \quad (i = 1, 2)$$

и справедлива оценка

$$\frac{1}{a_0} \int_{r_2}^{\lambda_2} \lambda^2 d \arctg h(\lambda) \geq \frac{1}{a_0} \int_{r_2}^{\mu_2^*} \lambda^2 d \arctg h(\lambda) = \int_0^{\infty} d \arctg t = \frac{\pi}{2}.$$

Условие $I(r_2, \lambda_2) \geq \pi/2$ получено.

Если $\mu_2^* > \mu_1^*$, то расстояние между поршнями P_1, P_2 возрастает: $(\mu_2(t) - \mu_1(t))\sqrt{t^2 + 1} \sim (\mu_2^* - \mu_1^*)\sqrt{t^2 + 1} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Покажем, что из $r_2 > r_1$ следует $\mu_2^* > \mu_1^*$. Интегрирование на отрезке $[r_i, \mu_i^*]$ уравнения (4.4) с функцией $\mu_i(t)$ вместо $\lambda(t)$ дает два равенства $I(r_i, \mu_i^*) = \pi/2, i = 1, 2$. Поскольку подынтегральное выражение I положительно, невозможно вложение интервалов интегрирования $[r_2, \mu_2^*] \subset [r_1, \mu_1^*]$ и, значит, $r_2 > r_1 \Rightarrow \mu_2^* > \mu_1^*$.

Угол, образующий сферический пояс поршня P_i при $t \rightarrow \infty$, определяется формулой (4.3) с μ_i^* вместо $\lambda(t)$, причем выполняется неравенство $\tau(\mu_i^*) = \arctg \mu_i^* < \pi/2$. Высота этого сферического пояса $\mu_i(t)\sqrt{t^2 + 1} \cos \tau(\mu_i(t)) \rightarrow +\infty$. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3(r, \theta, \varphi)$ сферическую поверхность $D(\lambda_0, t), \lambda_0 \in [\lambda_1, \lambda_2]$, радиус которой меняется по закону $r = \lambda_0\sqrt{t^2 + 1}$. Тогда нормальная к $D(\lambda_0, t)$ составляющая скорости движения газа на поверхности $D(\lambda_0, t)$ относительно скорости $D_r = \lambda_0 t / \sqrt{t^2 + 1}$ движения этой поверхности есть $v = \bar{U}(\lambda_0, t) - D_r(\lambda_0, t) = U(\lambda_0) / \sqrt{t^2 + 1}$. Пусть в точках $(h'_i(\lambda_0), h_0, \lambda_0) \in \Sigma_i^+ (i = 1, 2)$ функции $U(\lambda), C(\lambda)$ из (2.5) принимают значения $U_i(\lambda_0), C_i(\lambda_0)$ и определены величины $v_i = U_i(\lambda_0) / \sqrt{t^2 + 1}, c_i = C_i(\lambda_0) / \sqrt{t^2 + 1}$.

Утверждение 3. 1. В точках $(h'_i(\lambda_0), h_0, \lambda_0) \in \Sigma_i^+ \setminus K$, где K — кривизанта Σ^+ , выполняются неравенства $v_1^2 > c_1^2, v_2^2 < c_2^2$. Интегральные кривые $\{h = h_1(\lambda)\} \subset \Sigma_1^+ \setminus K$ и $\{h = h_2(\lambda)\} \subset \Sigma_2^+ \setminus K$ задают “сверхзвуковой” и “дозвуковой” режимы движения газа.

Слова “сверхзвуковой” и “дозвуковой” взяты в кавычки, поскольку скорость звука c_i сравнивается с нормальной составляющей v_i скорости движения газа относительно поверхности D .

2. В точках $(h'(\lambda_0), h_0, \lambda_0) \in K$ выполняется $v_1^2 = v_2^2 = c^2$. Сфера $r = \lambda_0\sqrt{t^2 + 1}$ есть звуковая характеристика УГД на решении (2.2), (2.5), в котором $h = h(\lambda)$ — интегральная кривая уравнения (2.8) с начальным условием $h(\lambda_0) = h_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть (h_0, λ_0) — некоторая точка из $\Omega \setminus \partial\Omega$. Покажем, что в точках $(h'_i(\lambda_0), h_0, \lambda_0) \in \Sigma_i^+ \setminus K$ выполняются неравенства $v_1^2 > c_1^2, v_2^2 < c_2^2$, что эквивалентно $U_1^2 > C_1^2, U_2^2 < C_2^2$. Используя представление решения (2.5), последние два неравенства можно записать как

$$h'_1(\lambda_0) < q_*^{3/2}, \quad q_*^{3/2} < h'_2(\lambda_0), \tag{4.5}$$

где $q_*^{3/2} = (a_0^2 / (\lambda_0^4 C_0))^{3/8} (h_0^2 + 1)^{7/8}$. Так как $h'_i = q_i^{3/2}$, то из (4.5) следует

$$q_1(h_0, \lambda_0) < q_* < q_2(h_0, \lambda_0). \tag{4.6}$$

Так как $q_1(h_0, \lambda_0), q_2(h_0, \lambda_0)$ — корни многочлена $\bar{F}(q, h, \lambda)$, то по свойству 3 неравенства (4.6) равносильны неравенству $\bar{F}(q_*, h_0, \lambda_0) < 0$. Отсюда следует неравенство

$$h_0^2 < \lambda_0^4 B^4(\lambda_0) / (4^4 C_0^3 a_0^2) - 1,$$

которое выполняется при $(h_0, \lambda_0) \in \Omega \setminus \partial\Omega$.

2. При $(h_0, \lambda_0) \in \partial\Omega$ равенства $v_1^2 = v_2^2 = c^2$ равносильны равенствам $q_1(h_0, \lambda_0) = q_* = q_2(h_0, \lambda_0)$ или $\bar{F}(q_*, h_0, \lambda_0) = 0$. Последнее равенство проверяется вычислением. Таким образом, утверждение 3 доказано.

Численные расчеты движения газа для различных значений параметров a_0, b_0, C_0 показывают, что в “сверхзвуковом” режиме, определяемом интегральными кривыми из Σ_1^+ , выполняется неравенство $I(\lambda_1, \lambda_2) < \pi/2$, и, значит, при любых начальных положениях поршней P_1, P_2 частицы, заключенные между ними, за конечное время достигают характеристики S_2 . Поверхность S_2 является поверхностью непродолжаемости данного решения. Далее будет показано, что с помощью ударной волны можно перевести “сверхзвуковой” режим в “дозвуковой”.

В “дозвуковом” режиме движения газа, определяемом интегральными кривыми из Σ_2^+ , возможно как $I(\lambda_1, \lambda_2) < \pi/2$, так и $I(\lambda_1, \lambda_2) > \pi/2$. В последнем случае при специальном выборе начальных радиусов r_1, r_2 поршней P_1, P_2 объем газа, заключенный между ними, будет двигаться неограниченное время.

5. Ударная волна. Для сопряжения решений в проективном ВО через ударную волну используется подход, предложенный в [4]. Рассматривается инвариантная ударная волна $D(\lambda_0, t)$ с фронтом $\lambda = \lambda_0$. В физическом пространстве $\mathbb{R}^3(r, \theta, \varphi)$ фронт ударной волны является сферой, радиус которой зависит от времени: $r = \lambda_0 \sqrt{t^2 + 1}$. Фронт распространяется в радиальном направлении со скоростью $D_r(\lambda_0, t) = \lambda_0 t / \sqrt{t^2 + 1}$.

Необходимо подобрать такие интегральные кривые $\{h = h_i(\lambda)\} \subset \Sigma_i^+$ ($i = 1, 2$) уравнения (2.8) с параметрами a_{0i}, b_{0i}, C_{0i} , чтобы величины (2.2), (2.5) с функциями $h_1(\lambda)$ и $h_2(\lambda)$ определяли движение газа соответственно перед и за фронтом ударной волны. Газодинамические величины (2.2), (2.5) на переднем фронте ударной волны будем отмечать индексом 1, а на заднем фронте — индексом 2. Скорость течения газа относительно фронта в радиальном направлении $v_i = \bar{U}_i(\lambda_0, t) - D_r = U_i(\lambda_0) / (t^2 + 1)$.

Теорема Цемплена для нормальной составляющей скорости движения газа относительно ударной волны выполняется в силу утверждения 3. На фронте ударной волны должны выполняться соотношения Ренкина — Гюгонно [8], которые в терминах инвариантных величин (2.5) записываются следующим образом:

$$R_2 U_2 = R_1 U_1; \quad (5.1)$$

$$P_2 + R_2 U_2^2 = P_1 + R_1 U_1^2; \quad (5.2)$$

$$5P_2/R_2 + U_2^2 = 5P_1/R_1 + U_1^2. \quad (5.3)$$

Также должны сохраняться касательные к фронту компоненты вектора скорости:

$$H_2 = H_1, \quad \omega_2 = \omega_1. \quad (5.4)$$

Из первого уравнения в (5.4) на фронте $\lambda = \lambda_0$ с учетом (2.5) следует соотношение

$$a_{02} = a_{01} = a_0. \quad (5.5)$$

Второе уравнение в (5.4) на фронте $\lambda = \lambda_0$ принимает вид $\omega_2(\tau_2(\lambda_0), \theta, \varphi) = \omega_1(\tau_1(\lambda_0), \theta, \varphi)$, где $\tau_i = \arctg h_i(\lambda_0)$. Поскольку функции $\omega_i(\tau, \theta, \varphi)$ ($i = 1, 2$) — решения (1.4) с общими начальными данными $\omega_i(0, \theta, \varphi) \equiv \pi/2$, выполняется $\omega_2(\tau, \theta, \varphi) = \omega_1(\tau, \theta, \varphi)$. Ограничимся рассмотрением интегральных кривых $h = h_1(\lambda), h = h_2(\lambda)$, для которых $h_1(\lambda_0) = h_2(\lambda_0) = h_0$. Тогда $\tau_1(\lambda_0) = \tau_2(\lambda_0) = \arctg h_0$ и второе уравнение в (5.4) не дает дополнительных ограничений на параметры.

Для политропного газа с уравнением состояния (2.1) справедлива формула $c^2 = (5/3)p/\rho$, из которой с учетом (2.2) следует $C^2 = (5/3)P/R$. Поэтому уравнение (5.3) равносильно $U_2^2 + 3C_2^2 = U_1^2 + 3C_1^2$, отсюда с помощью интеграла Бернулли (2.7) и равенства (5.5) получим

$$b_{02} = b_{01} = b_0. \quad (5.6)$$

Из уравнений (5.1) и (2.5) следует $R_{02}\sqrt{h_0^2 + 1} = R_{01}\sqrt{h_0^2 + 1}$ и, значит, $R_{02} = R_{01}$.

Равенство (5.2) в силу (2.7), (5.1) принимает вид $(U_2 - U_1)(4U_1U_2 + B(\lambda_0)) = 0$. Для ударных волн $U_2 \neq U_1$, поэтому в силу (2.5) получим

$$h'_1(\lambda_0)h'_2(\lambda_0) = \delta, \quad \delta = -4a_0^2(h_0^2 + 1)^2/(\lambda_0^4 B(\lambda_0)). \quad (5.7)$$

Утверждение 4. Пусть в проективном вихре Овсянникова движение газа перед фронтом $\lambda = \lambda_0$ ударной волны задается величинами (2.5) с константами C_{01} , R_{01} , $S_{01} = (3/5)C_{01}R_{01}^{-2/3}$ и интегральной кривой $\{h = h_1(\lambda)\} \subset \Sigma_1^+$ ($\lambda \leq \lambda_0$, $h_1(\lambda_0) = h_0$) уравнения

$$3C_{0i}h_i^{8/3} + k_0h_i^2 + d = 0, \quad k_0 = B(\lambda_0)(h_0^2 + 1)^{1/3}, \quad d = (h_0^2 + 1)^{7/3}a_0^2/\lambda_0^4 \quad (5.8)$$

для $i = 1$ с параметрами a_0 , b_0 . Если интегральная кривая $\{h = h_2(\lambda)\} \subset \Sigma_2^+$ ($\lambda \geq \lambda_0$, $h_2(\lambda_0) = h_0$) уравнения (5.8) при $i = 2$ с константой $C_{02} = -(1/3)(bp_2^2 + d)/p_2^{8/3}$, где $p_2 = \delta/h'_1(\lambda_0)$ и δ определено вторым равенством (5.7), содержит точку (p_2, h_0, λ_0) и выполнены неравенства $p_2 > h'_1(\lambda_0)$, $C_{02} > C_{01}$, то движение газа за ударной волной определено величинами (2.5) с константами C_{02} , $R_{02} = R_{01}$, $S_{02} = (3/5)C_{02}R_{01}^{-2/3}$ и интегральной кривой $h = h_2(\lambda)$ (см. рис. 4, 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (5.7) для интегральной кривой $h = h_2(\lambda)$ должно выполняться $h'_2(\lambda_0) = \delta/h'_1(\lambda_0)$. Подставляя $p_2 = \delta/h'_1(\lambda_0)$ в (5.8) при $i = 2$ вместо h'_2 , найдем выражение для C_{02} . Для выполнения теоремы Цемплена необходимо, чтобы движение газа за фронтом ударной волны определялось интегральной кривой $h = h_2(\lambda)$ с начальным условием $h_2(\lambda_0) = h_0$, лежащей на поверхности Σ_2^+ уравнения (5.8) при $i = 2$. Точка (p_2, h_0, λ_0) может находиться на поверхности Σ_1^+ или Σ_2^+ уравнения (5.8) при $i = 2$. Для выполнения равенства (5.7) необходима проверка $h'_2(\lambda_0) = p_2$, что равносильно $(p_2, h_0, \lambda_0) \in \{h = h_2(\lambda)\}$.

Неравенства $h'_2(\lambda_0) > h'_1(\lambda_0)$, $C_{02} > C_{01}$ в силу (2.5) гарантируют возрастание плотности и энтропии при прохождении ударной волны. Таким образом, выполнены все необходимые условия на фронте ударной волны. Утверждение 4 доказано.

На рис. 4 показаны интегральные кривые $h = h_1(\lambda)$ и $h = h_2(\lambda)$, определяющие движения газа перед и за фронтом ударной волны. На рис. 5 показаны траектории частиц, стартующих со сферического пояса. В некоторый момент времени через эти частицы газа проходит ударная волна, что приводит к изменению траекторий. За счет выбора параметра $h_0 = 0$ поверхность ударной волны является сферой без полюсов.

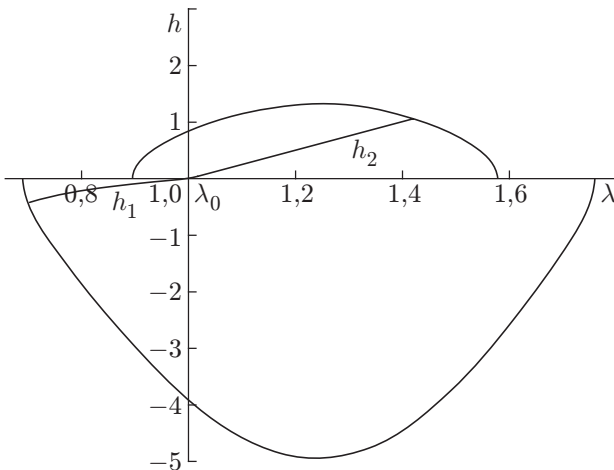


Рис. 4

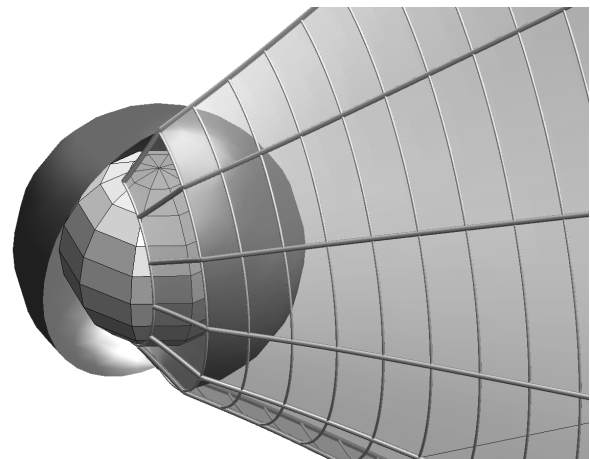


Рис. 5

Рассмотрим “сверхзвуковое” движение частиц в объеме газа между двумя поршнями P_1 и P_2 (см. утверждение 2), определяемое интегральной кривой $\{h = h_1(\lambda)\} \subset \Sigma_1^+$ с начальным условием $h_1(r_2) = h_0 = 0$, и ударную волну $D(r_2, t)$ с фронтом $\lambda = r_2$. Так как $\tau(r_2) = \operatorname{arctg} h_0 = 0$, то из (4.3) следует, что фронт ударной волны есть сфера без полюсов радиуса $r = r_2\sqrt{t^2 + 1}$. Поскольку $v_1 > 0$, в момент времени $t = 0$ ударная волна начинает движение от поршня P_2 к поршню P_1 . При этом частицы газа и фронт ударной волны удаляются от центра. За ударной волной устанавливается “дозвуковой” режим.

Ранее отмечалось, что “сверхзвуковое” движение газа в проективном вихре Овсянникова существует конечное время t^* . Если $\mu_1(t^*) \geq \lambda_2$, то ударная волна достигнет поршня P_1 раньше, чем “сверхзвуковое” инвариантное решение перестанет существовать.

Автор выражает благодарность А. П. Чупахину за постановку задачи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
2. **Чупахин А. П.** Инвариантные подмодели особого вихря // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 3. С. 390–405.
3. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Однородный особый вихрь // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 75–89.
4. **Чупахин А. П.** Самосопряжение решений через ударную волну: предельный скачок уплотнения // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 26–40.
5. **Черевко А. А.** Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$. Новосибирск, 1996. (Препр. / Ин-т гидродинамики СО РАН; № 4-96).
6. **Арнольд В. И.** Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижев. респ. тип., 2002.
7. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
8. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

*Поступила в редакцию 27/IX 2004 г.,
в окончательном варианте — 19/XI 2004 г.*