

УДК 532.593+532.529+532.528+532.787+550.3

РАСКРЫТИЕ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН — К МЕХАНИЗМУ ЦИКЛИЧНОСТИ БОКОВОГО ИЗВЕРЖЕНИЯ ВУЛКАНА СВ. ЕЛЕНЫ В 1980 г.

В. К. Кедринский*, М. Н. Давыдов*,
А. А. Пильник**, А. А. Чернов*,**

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

** Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: kedr@hydro.nsc.ru, davydov@hydro.nsc.ru, pilnika@gmail.com, chernov@itp.nsc.ru

Рассматривается динамика состояния магматического расплава, заполняющего щелевой канал (трещину) в замкнутой гидродинамической структуре взрывного типа, включающей очаг вулкана, связанные с ним вертикальный канал (conduit), перекрытый пробкой, и систему внутренних трещин (dikes) в окрестности купола, а также открытый в атмосферу кратер. С использованием математической модели двухфазных сред Иорданского — Когарко — ван Вайнгаардена и кинетики, описывающей основные физические процессы, развивающиеся в тяжелой газонасыщенной магме за фронтом волны декомпрессии, построена двумерная модель щелевого извержения. Разработана численная схема, позволяющая анализировать влияние граничных условий на стенках канала и масштабных факторов на структуру течения расплава, роль вязкости в статических режимах, динамические постановки, учитывающие диффузионные процессы и возрастающую на несколько порядков вязкость. Обсуждаются результаты численного анализа начальной стадии развития кавитационного процесса.

Ключевые слова: магматический расплав, волна декомпрессии, многофазная математическая модель, кавитация, вязкость, пограничный слой, щелевое вулканическое извержение.

DOI: 10.15372/PMTF20160401

Введение. В последние десятилетия внимание исследователей привлекают проблемы моделирования вулканических извержений, среди которых особый интерес представляют извержения, имеющие взрывной, часто циклический характер. Необходимость мониторинга извержений и прогноза на его основе степени опасности таких вулканов обусловлена их разрушительным действием, сопровождающимся выбросами гигантских облаков пепла. Результаты анализа состава и структуры выбросов, данные о начальном состоянии магмы и условиях инициирования извержения позволяют формулировать физически обоснованные модели процессов, сопровождающих извержения. Так, поровая структура кристаллизовавшихся магматических “бомб” подтверждает наличие фазовых переходов в волне декомпрессии в первоначально однофазном магматическом расплаве, приводящее к развитию пузырьковой кавитации. Циклическость извержений — очевидный результат процесса разрушения потока расплава в канале вулкана, их структура (облака пепла) свидетельст-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-05-03336-а) и в рамках Проекта III.22.3.1 СО РАН.

© Кедринский В. К., Давыдов М. Н., Пильник А. А., Чернов А. А., 2016

вует о переходе интенсивно кавитирующей магмы в состояние газ — частицы, сопровождающемся кристаллизацией капель расплава в процессе его разрушения [1–4].

Использование современных методов диагностики динамики состояния магмы в зоне выброса может привести к существенному изменению представлений о механизмах, определяющих процесс извержения. В качестве примера рассмотрим вулкан Эребус (Erebus) — открытую вулканическую систему взрывного типа (согласно классификации А. Лакро — strombolian eruption) с озером лавы на дне кратера и циклическим характером извержений. Экспериментальные исследования динамики формирования десятков извержений этого вулкана в зоне выброса магмы, выполненные авторами [5] с использованием системы радаров и с учетом эффекта Доплера, показали, что газовые пузырьки (и, следовательно, кавитирующий поток) не осциллируют, тем не менее цикличность извержений вулкана Эребус и аналогичных ему систем имеет место. Таким образом, модель цикличности извержений Эребуса, основанная на предположении о пульсирующем характере кавитационной зоны в потоке магмы, оказалась несостоятельной.

При отсутствии прямых методов диагностики процессов, происходящих в канале вулкана, физические модели и формулировка на их основе экспериментальных постановок и математических моделей с учетом наиболее полной кинетики могут стать основой решения указанных проблем. Приведенный ниже перечень проблем: изучение состояния магмы в очаге вулкана, влияния ее состава и концентрации воды на характер извержения, роли взаимозависимых характеристик, таких как давление, испаряющийся состав и скорость выброса, анализ возможных механизмов извержений [6–9], построение моделей течения магмы в канале вулкана с возможной ее фрагментацией [10–14] — дает далеко не полное представление об их масштабе. Большое количество работ посвящено исследованию отдельных процессов, сопровождающих извержение и практически не зависящих от архитектуры вулканов. К числу этих процессов относятся кинетика нуклеации и рост пузырьков в магматических расплавах в результате их быстрой декомпрессии [15–21], диффузионный рост пузырьков [21–25], эволюция распределения пузырьков по размерам, формирование “коллективного” пузырька в потоке [26–28], тепломассообмен [29–31] и кристаллизация расплавов [32–34].

Несомненно, одним из основных направлений моделирования является определение механизмов фрагментации, обуславливающих переход магмы из кавитирующего состояния в состояние типа пены с последующим ее разрушением и переходом в состояние газ — частицы [2, 4, 35–38]. Другая модель, учитывающая переход в указанное состояние, предложена в работах [1, 8], в которых показано, что в структуре потока магмы пенного типа в результате коалесценции ячеек могут спонтанно формироваться “снаряды” с произвольными расположением и плотностью в потоке, содержащие системы свободных частиц (“плато”), освободившихся при коалесценции.

Математическая двухфазная модель начальной стадии взрывного извержения в одномерной и осесимметричной постановках сформулирована в [39] и развита в работах [40, 41]. В рамках этой модели на основе результатов анализа динамики состояния вязкого расплава и структуры течения предложена оригинальная модель цикличности взрывных извержений [41] и обнаружен эффект возможного склерозирования канала вулкана [40]. Согласно [41] одна из особенностей динамики состояния кавитирующей магмы состоит в отсутствии признаков его осциллирующего развития, что, по сути, подтверждает результаты указанных выше исследований извержений вулкана Эребус [5]. Заметим, что природная цикличность извержений подразумевает возникновение разрывов в потоке до извержения. Исследование этого явления требует прежде всего создания физико-математической модели процесса, один из принципиально новых подходов к построению такой модели предложен в [42].

Следует отметить и так называемые щелевые вулканы: камчатский плоский Толбачик, извержение которого подобно извержениям гавайских вулканов и сопровождается выбросом “магматических бомб”, вулканы Исландии, извержения которых имеют взрывной характер (наиболее известным из них является вулкан Эйяфьядлайокюдль, продолжительное взрывное извержение которого произошло в 2010 г.). Среди большого количества взрывных вулканов особый интерес представляет вулкан Св. Елены (St Helens), катастрофическое извержение которого произошло 18 мая 1980 г. Его особое предвзрывное состояние, динамически сформировавшееся в результате гигантского оползня (лавины), определялось не только разгерметизацией центрального канала, но и смещением к подножию горы гигантской массы грунта, что привело к существенному уменьшению давления на грунт вдоль траектории движения лавины на поверхности купола.

Анализ картины извержения позволяет предложить ранее не рассматривавшуюся физико-математическую модель вулкана Св. Елены. Согласно этой модели в упругом полупространстве между вулканическим очагом и поверхностью кратера вулкана существовала система трещин (dikes). Вызванное лавиной ослабление давления на грунт инициирует движение магмы в трещинах, их раскрытие (с выбросом облаков пепла в различные моменты времени) под действием расклинивающего давления магмы и последующее закрытие, которое в упругом полупространстве практически не оставляет следов на поверхности, сформированной лавиной. Таким образом, представляет интерес постановка задачи (аналог которой авторам данной работы не известен) о динамике состояния потока магмы в одной из трещин (dikes) в виде щели на основе предложенных ранее математических моделей [1, 21, 28, 35, 39–42].

Модель процесса. Рассматривается физическая модель предвзрывного состояния вулкана Св. Елены и его извержения 18 мая 1980 г. в виде замкнутой гидродинамической системы, включающей очаг вулкана, вертикальный канал (conduit), перекрытый пробкой, сеть закрытых трещин (dikes) в окрестности подножия купола, и кратер, открытый в атмосферу. Изначально трещины либо заполнены магматическим расплавом под высоким давлением, либо представляют собой сеть “законсервированных” трещин. Извержение вулкана в виде последовательности выбросов инициируется скользящей вниз по склону кратера гигантской лавиной, которая открывает центральный канал и снимает нагрузку на грунт купола. Система трещин получает возможность для развития (за счет расклинивающего действия потока магмы). Трещины, которые достигают поверхности купола в произвольные моменты времени, раскрываются с выбросом облаков пепла, создавая эффект периодичности извержений. Очевидно, механизм последних имеет косвенное отношение к этому понятию.

В данной постановке трещина имеет вид плоской вертикальной (ориентированной вдоль оси z) щели постоянной ширины L , граничащей снизу с очагом вулкана ($z = 0$), в котором поддерживается постоянное давление $p_{ch} = 170$ МПа. До высоты $H = 1$ км трещина заполнена магматическим расплавом, насыщенным газом, и на этом уровне ($z = 1$ км) герметично перекрыта пробкой, отделяющей канал от атмосферы с давлением p_0 . Распределение давления в расплаве по высоте в поле силы тяжести соответствует известной зависимости $p_i(z) = p_{ch} - \rho_l g z$, где ρ_l — плотность расплава. Зависимость равновесной концентрации растворенного в магме газа C_s от давления p подчиняется закону Генри $C_s(p) = K_H \sqrt{p}$ (K_H — постоянная Генри), распределение начальной концентрации газа определяется соотношением $C_i(z) = C_s(p_i(z))$.

В рамках математической модели механики многофазных сред исследуется динамика состояния расплава в волне декомпрессии, которая формируется при разгерметизации щели (в момент времени $t = 0$ поверхность $z = H$ мгновенно становится свободной с давлением на ней p_0) и распространяется вниз по каналу со скоростью звука. Растворенный

в расплаве газ за фронтом волны оказывается в пересыщенном состоянии: начинается процесс интенсивной нуклеации (появление ядер кавитации) и роста кавитационных зародышей. В представленной геометрии система уравнений, описывающая динамику состояния вязкой жидкости, содержащей пузырьки газа, в безразмерных переменных для средних давления, плотности и массовой скорости имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{p}\bar{v})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{p}\bar{u})}{\partial \bar{z}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\text{Eu}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re} \bar{\rho}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) \right], \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\text{Eu}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{\text{Fr}} + \frac{1}{\text{Re} \bar{\rho}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Состояние такой среды описывается уравнениями состояния жидкого компонента (уравнение Тэта), газовой фазы (с молярной массой M) и смеси:

$$p_l = p_0 + \frac{\rho_l c^2}{n} \left[\left(\frac{\rho_l}{\rho_{l0}} \right)^n - 1 \right], \quad R = \left(\frac{k_B T \rho_0 m_g}{M p_0 p_g} \right)^{1/3}, \quad \rho = \rho_l (1 - k), \quad k = k_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{1/3}. \quad (2)$$

Заметим, что система (1), (2) является известной газодинамической моделью пузырьковой среды Иорданского — Когарко — ван Вайнгаардена (ИКВ-моделью) [1]. Законы сохранения (1), описывающие динамику состояния магматического расплава, дополняются кинетикой. Последняя отвечает за процессы, сопровождающие извержение, и включает систему уравнений, определяющих динамику пузырьков $R(t)$ (уравнение Рэлея), среднее давление в среде p , динамическую вязкость расплава магмы $\mu(T, C)$, нуклеацию J , и уравнение диффузии $m_g(t)$:

$$\begin{aligned} R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 &= \frac{p_g - p}{\rho} + \frac{4\mu}{\rho} \frac{\dot{R}}{R}, \quad \mu(T, C) = \mu^* \exp\left(\frac{E_\mu(C)}{k_B T}\right), \\ \frac{dm_g}{dt} &= 4\pi R^2 D \rho_l \left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad J = J^* \exp\left\{-G \left[\left(\frac{p_{ch}}{\Delta p}\right)^2 - 1\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (1)–(3), записанной в безразмерном виде, появляются числа подобия Эйлера, Рейнольдса, Фруда, Гиббса:

$$\text{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2}, \quad \text{Re} = \frac{z_0 u_0}{\nu_0}, \quad \text{Fr} = \frac{u_0^2}{g z_0}, \quad G = \frac{16\pi}{3} \frac{\sigma^3}{p_{ch}^2 k_B T}, \quad (4)$$

ν_0 , z_0 , u_0 , p_0 , ρ_0 , R_0 — характерные величины рассматриваемой задачи [39] (в данной задаче характерный линейный размер z_0 может быть выражен через ширину щели L); D — коэффициент диффузии; вязкость магматического расплава в достаточно широком диапазоне значений концентрации растворенного в нем газа описывается зависимостью аррениусовского типа, в которой энергия активации $E_\mu(C) = E_\mu^*(1 - k_\mu C)$ является функцией концентрации растворенного газа C ; E_μ^* — энергия активации “сухого” расплава; k_μ — эмпирический коэффициент; μ^* — предэкспоненциальный множитель; k_B — постоянная Больцмана; коэффициент $J^* = (2n_g^2 V_g D / d_g)(\sigma / (k_B T))^{1/2}$ определяется плотностью n_g молекул воды, растворенной в расплаве, их объемом V_g и расстоянием между ними d_g , коэффициентом диффузии D и поверхностным натяжением σ [25].

Граничные условия. На нижней границе столба давление принимается равным давлению в очаге вулкана, если не поставлено специальное условие, моделирующее прохождение волны. Верхняя граница ($z = H$) в момент разгерметизации канала ($t = 0$) становится

свободной поверхностью (с давлением, равным атмосферному p_0), на ней выполняются кинематическое и динамическое условия. Наиболее сложным является вопрос о постановке граничных условий на стенках канала. С физической точки зрения ограничиваться классическим условием прилипания в случае пузырьковой жидкости, очевидно, некорректно. При построении модели магматического расплава — среды, динамика состояния которой описывается уравнениями газовой динамики за фронтом волн декомпрессии с учетом перехода физического состояния среды от жидкого к газокапельному, логично допустить, по крайней мере, частичное проскальзывание. Этому допущению соответствует понятие “эффективной длины проскальзывания”, используемое в [43] для оценки гидравлического сопротивления в плоском канале с пузырьковым пограничным слоем. В данном случае кавитирующая среда занимает все поперечное пространство канала. Предположим, что массовая скорость такой среды на стенке u_w равна среднему значению скорости \tilde{u} по сечению канала с коэффициентом пропорциональности β , который может рассматриваться как некоторая “эффективная длина проскальзывания” и принимать значения 0, k или $k/(1-k)$ (k — объемная концентрация газовой фазы в потоке):

$$u_w|_{x=H/2} = u_w|_{x=-H/2} = \beta\tilde{u}. \quad (5)$$

Заметим, что с учетом наличия газовой фазы определяющими становятся следующие краевые условия:

1) условие прилипания

$$u_w|_{x=L/2} = u_w|_{x=-L/2} = \beta = 0 \quad (6)$$

при отсутствии газовой фазы ($k \rightarrow 0$) в потоке;

2) условие скольжения

$$u_w|_{x=L/2} = u_w|_{x=-L/2} = k\tilde{u} \quad (\beta = k); \quad (7)$$

3) условие проскальзывания, усиливающегося с ростом интенсивности кавитационных процессов:

$$u_w|_{x=L/2} = u_w|_{x=-L/2} = \frac{k}{1-k}\tilde{u} \quad \left(\beta = \frac{k}{1-k}\right). \quad (8)$$

В данной работе для различных вариантов модели (1)–(8) рассматривается несколько задач, в которых анализируется влияние граничных условий на стенке канала на распределение массовой скорости, а также возможные схемы расчета динамики формы свободной поверхности в верхнем слое потока магмы и масштабного фактора при фиксированных значениях вязкости расплава. На основе предложенной в работах [39, 44] модели диффузионной зоны, ограничивающей нуклеацию в окрестностях надкритических ядер, проводится теоретический анализ задачи о возникновении кавитационного процесса в расплаве с динамически меняющейся вязкостью как при заданном значении плотности ядер кавитации гетерогенной структуры потока, так и с учетом развития гомогенной нуклеации.

Влияние граничных условий. Динамика формы свободной поверхности потока расплава магмы определялась в рамках решения системы (1)–(3) конечно-разностным методом с пятиточечным шаблоном для аппроксимации массовой скорости на частично подвижной сетке. В начальный момент времени область, занятая средой, покрывалась равномерной сеткой с шагом h . После очередного шага по времени каждый узел смещался по вертикали в зависимости от значения скорости u в узле, таким образом моделировалось растяжение среды вследствие декомпрессии и подъема жидкости по каналу.

На рис. 1 показана характерная структура потока в зоне свободной поверхности шириной 150 м (правая половина плоского двухфазного двумерного потока в щели шириной 2 м)

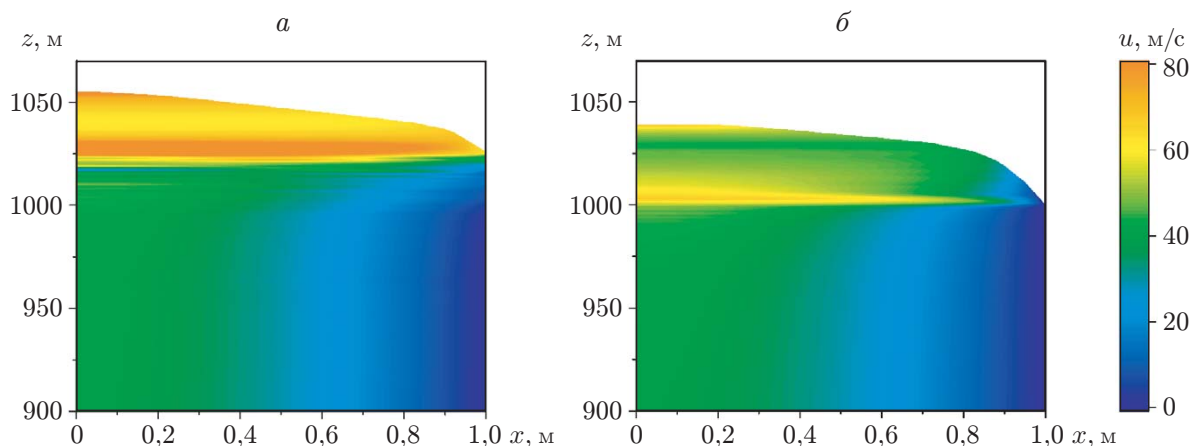


Рис. 1. Распределение вертикальной компоненты скорости в правой половине плоского двухфазного двумерного потока в щели шириной 2 м в момент времени $t = 0,85$ с при фиксированной вязкости расплава $\mu = 10^3$ Па·с и различных граничных условиях на боковых стенках ($x = 1$ м):
 а — граничное условие проскальзывания $\beta = k/(1 - k)$, б — граничное условие прилипания $\beta = 0$

для двух типов граничных условий на боковых стенках ($x = \pm 1$ м). Представлены распределения вертикальной компоненты скорости в момент времени $t = 0,85$ с при фиксированной вязкости расплава $\mu = 10^3$ Па·с для случаев $\beta = k/(1 - k)$ (проскальзывание) и $\beta = 0$ (прилипание).

Результаты численного анализа для случая щели шириной 2 м при постоянном значении вязкости расплава $\mu = 10^3$ Па·с показали, что оба распределения массовой скорости вблизи свободной поверхности потока, представленные на рис. 1, имеют сложную слоистую структуру, обусловленную, по-видимому, динамикой горизонтальной компоненты скорости, но параметры этих распределений различаются. В случае прилипания ($\beta = 0$) в верхнем слое зоны потока расплава шириной 150 м вертикальная компонента скорости изменяется в диапазоне значений $40 \div 60$ м/с. При проскальзывании ($\beta = k/(1 - k)$) максимальные значения массовой скорости существенно увеличиваются и находятся в диапазоне $60 \div 80$ м/с. В обоих случаях толщина пограничного слоя составляет приблизительно 0,2 м, а значение вертикальной компоненты скорости по мере удаления от стенки (на уровне $z = 950$ м) увеличивается и в центральной части потока ($x = -0,5 \div +0,5$ м) в канале шириной 2 м достигает 40 м/с. В верхней, ближайшей к свободной поверхности зоне пограничного слоя ($z \geq 1000$ м) распределения скоростей в случае прилипания и проскальзывания значительно различаются. На основе полученных результатов в дальнейшем в качестве условия на стенках щели используется условие проскальзывания (8).

Влияние вязкости среды и ширины канала. В рамках полной системы законов сохранения и кинетических уравнений (1)–(8) в плоской двумерной постановке исследовалось влияние вязкости и ширины канала на динамику структуры потока с учетом горизонтальной компоненты скорости. Ширина щели составляла 2, 20 и 200 м. При этом вязкость потока для щели шириной 2 м принималась равной 10^3 Па·с, щели шириной 20 м — 10^5 Па·с, щели шириной 200 м — 10^7 Па·с.

Расчеты показали, что при фиксированной вязкости горизонтальная компонента скорости оказывается много меньше вертикальной при практически нулевом градиенте дав-

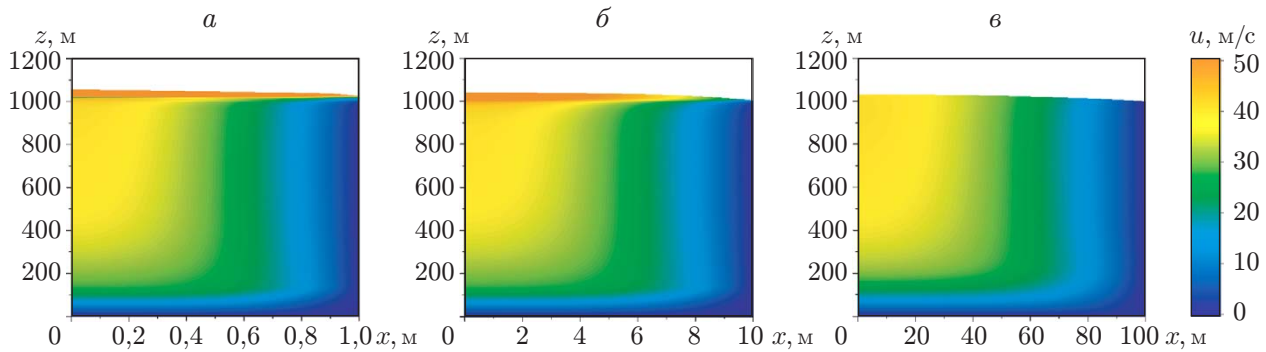


Рис. 2. Распределение вертикальной компоненты скорости в щели в момент времени $t = 0,7$ с:

a — $L = 2$ м, $\mu = 10^3$ Па·с, b — $L = 20$ м, $\mu = 10^5$ Па·с, v — $L = 200$ м, $\mu = 10^7$ Па·с

ления вдоль горизонтальной координаты. Течение в горизонтальном направлении наблюдается только вблизи свободной поверхности. При высокой вязкости расплава наблюдаются увеличение толщины пограничного слоя и замедление течения, а при увеличении вязкости и уменьшении ширины канала возможно его “запирание” [40]. На рис. 2 приведены результаты расчетов состояния потока магмы в момент времени $t = 0,7$ с. К этому моменту времени фронт волны декомпрессии достигает нижней границы столба.

Исследованные структуры течений с формирующимися пограничными слоями оказываются подобными (на рис. 2 показаны зоны в окрестности правых стенок каналов), что соответствует известному теоретическому выводу о пропорциональности толщины пограничного слоя корню квадратному из кинематической вязкости.

Кинетика процесса. Как отмечалось выше, базовая ИКВ-модель (законы сохранения, уравнения состояния) замыкается системой кинетических уравнений, описывающих, в частности, процессы зарождения и роста газовых пузырьков [1, 39, 44]. В данной работе используется следующая физическая модель этих процессов. В начальном состоянии в замкнутой гидродинамической системе расплав содержит растворенный газ под давлением p_i , который в момент разгерметизации канала и возникновения волны декомпрессии оказывается в пересыщенном состоянии за ее фронтом. Если пренебречь временем нуклеации, в течение которого возникают надкритические зародыши кавитации с заданной плотностью в единице объема расплава, то развитие кавитационного процесса в волне декомпрессии можно исследовать при условии, что начальное давление газа в зародышах $p_{i,g}(0)$ равно начальному давлению в расплаве p_i до его декомпрессии.

По мере роста пузырька за фронтом волны декомпрессии давление в нем постепенно уменьшается, что приводит к десорбции газа из расплава, ведущей к увеличению массы газа в пузырьке. Уменьшение концентрации газа вблизи поверхности пузырька приводит к увеличению интенсивности его диффузии из расплава. Давление газа в пузырьке падает до значения, равного давлению окружающей среды, и дальнейший рост пузырька происходит исключительно в результате диффузии. Если пренебречь длительностью инерционной стадии роста пузырька, то при условии мгновенного достижения пересыщенного состояния можно найти автомодельное решение диффузионной задачи [21]. В этом случае выражения для концентрации газовых пузырьков и скорости их роста могут быть представлены в виде

$$\bar{C}(\chi) = \int_1^\chi \exp\left(-\left(\frac{\zeta^2}{2} + \frac{1}{\zeta}\right)\frac{\bar{D}_{eff}}{2}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2} / \int_1^\infty \exp\left(-\left(\frac{\zeta^2}{2} + \frac{1}{\zeta}\right)\frac{\bar{D}_{eff}}{2}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

$$\bar{R}(\tau) = \left(\int_0^\tau \bar{D}_{eff}(\tau') d\tau'\right)^{1/2}, \quad (9)$$

где \bar{D}_{eff} — коэффициент, определяемый из интегрального уравнения

$$\frac{\bar{D}_{eff}}{2} \int_1^\infty \exp\left(-\left(\frac{\zeta^2}{2} + \frac{1}{\zeta} - \frac{3}{2}\right)\frac{\bar{D}_{eff}}{2}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \varepsilon(\tau).$$

При малых и больших степенях пересыщения для коэффициента \bar{D}_{eff} существуют асимптотические приближения $\bar{D}_{eff} \approx 2\varepsilon$ при $\varepsilon \ll 1$ и $\bar{D}_{eff} \approx (12/\pi)\varepsilon^2$ при $\varepsilon \gg 1$.

В (9) введены следующие безразмерные переменные: $\tau = Dt/R_0^2$, $\chi = r/R$ — время и радиальная координата (с началом в центре пузырька) соответственно; $\bar{R} = R/R_0$ — радиус пузырька; $\bar{C} = (C - C_s)/(C_i - C_s)$ — концентрация газа вокруг пузырька; $\varepsilon = (\rho_l/\rho_g)(C_i - C_s)$ — безразмерный критерий, характеризующий степень метастабильности растворенного в расплаве газа (пересыщение) и определяющий движущую силу (разность концентраций фазы) фазового перехода; R_0 — характерный радиус пузырька в момент начала диффузионной стадии; C_i , C_s — равновесная концентрация газа при начальном и текущем давлении соответственно. Отметим, что при декомпрессии с конечной скоростью степень пересыщения ε является функцией времени.

Согласно классической кинетической теории фазовых превращений частота в общем случае гомогенно-гетерогенной нуклеации зародышей кавитации J определяется законом

$$J = B \exp\left(-\frac{W_{cr}}{k_B T}\right) + \sum_n B_n \exp\left(-\frac{W_{cr}\psi(\varphi_n)}{k_B T}\right), \quad (10)$$

где $W_{cr} = 16\pi\sigma^3/(3\Delta p^2)$ — работа, затраченная на образование критического зародыша в гомогенном процессе; $\Delta p = p_g - p$ — разность давлений газа в пузырьке p_g и окружающей среде p на границе пузырька, которая с помощью закона Генри может быть выражена через пересыщение, т. е. через разность текущей и равновесной концентраций газа при текущем давлении; $\psi(\varphi_n) = (1/4)(1 - \cos \varphi_n)^2(2 + \cos \varphi_n)$; φ_n — равновесный угол смачивания поверхности n -й гетерогенной частицы; B , B_n — кинетические коэффициенты для гомогенной и гетерогенной нуклеации соответственно.

В общем случае частота нуклеации (10) представляет собой сумму гомогенной (первый член) и гетерогенной (второй член) составляющих (суммирование в (10) проводится по всем гетерогенным частицам в единице объема расплава). Анализ данного выражения показывает, что при небольших пересыщениях нуклеация пузырьков происходит преимущественно на гетерогенных центрах (микрорекристаллитах, содержащихся в расплаве), причем скорость зарождения тем выше, чем меньше угол смачивания гетерогенной поверхности расплавом. В рассматриваемом случае больших пересыщений вклад гомогенной составляющей является преобладающим, что позволяет ограничиться в (10) слагаемым $B \exp(-W_{cr}/(k_B T))$.

Кинетику дегазации опишем в рамках модели, основанной на выделении в объеме расплава вокруг растущих (в результате гомогенной нуклеации) центров так называемой запрещенной зоны, в которой нуклеация новых пузырьков подавлена [1, 21, 39]. Основная идея заключается в следующем. С физической точки зрения очевидно, что в процессе роста

пузырьков и увеличения массы газа в них степень пересыщения растворенного газа в расплаве в окрестности пузырьков по мере приближения к их центрам должна уменьшаться: вокруг них формируется своеобразный диффузионный пограничный слой, в котором вероятность зарождения новых пузырьков существенно уменьшается вследствие наличия экспоненциальной зависимости частоты нуклеации от пересыщения. Этот вывод следует также из решений (9). Можно считать, что диффузионный пограничный слой — это область, в которой появление новых зародышей кавитации “запрещено”. Таким образом, кинетика фазового перехода, по сути, определяется как процесс нуклеации надкритических зародышей, окруженных диффузионными пограничными слоями — зонами расплава, которые обеспечивают массообмен кавитационный пузырек — расплав.

В соответствии с изложенной моделью внешний радиус диффузионного слоя r_D определяется зависимостью

$$r_D = \left(R^3 + 3 \int_R^{\infty} [1 - \bar{J}(r)] r^2 dr \right)^{1/3},$$

где R — радиус зародыша; $\bar{J}(r)$ — частота нуклеации, отнесенная к ее значению на бесконечности.

Суммарный объем диффузионных слоев, образовавшихся из ансамбля пузырьков к моменту времени t , в единице объема расплава определяется интегральным уравнением

$$\varphi_D(t) = \int_0^t J(t') [1 - \varphi_D(t')] V_D(t, t') dt',$$

где $V_D = (4\pi/3)(r_D^3 - R^3)$ — объем диффузионного слоя вокруг пузырька, зародившегося в момент времени t' . Зависимость объемной концентрации газовой фазы в расплаве от времени описывается соотношением

$$k(t) = \int_0^t J(t') [1 - \varphi_D(t')] V(t, t') dt', \quad \varkappa = \frac{k(t)}{1 + k(t)}. \quad (11)$$

Здесь $V = (4\pi/3)R^3$ — объем пузырька, зародившегося в момент времени t' .

Число пузырьков N , образующихся за время t в единице объема, определяется выражением

$$N(t) = \frac{1}{1 + k(t)} \int_0^t J(t') [1 - \varphi_D(t')] dt'. \quad (12)$$

Отметим, что в соотношениях (11), (12) учитывается изменение объема среды с увеличением объемной концентрации газовой фазы. В момент времени, когда диффузионные слои перекрывают весь объем расплава, нуклеация новых пузырьков прекращается.

Полученные выше решения, существенно упрощающие численную схему, были использованы для расчета в полной плоской постановке двумерного течения магматического расплава с учетом его дегазации в волне декомпрессии, приводящей к значительному увеличению его вязкости. Все необходимые физико-химические характеристики магматического расплава взяты из работ [39, 44]. На рис. 3 для канала шириной 20 м представлены распределения горизонтальной компоненты массовой скорости и вязкости магмы.

Из результатов расчетов следует, что на ранней стадии развития структуры потока магмы вблизи свободной поверхности формируется интенсивно кавитирующий слой,

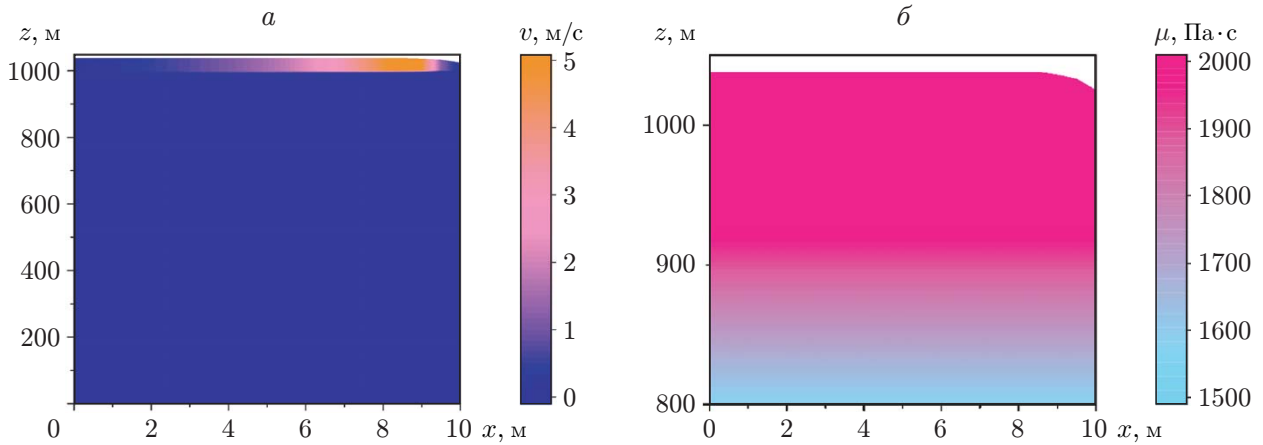


Рис. 3. Распределения горизонтальной компоненты скорости (*а*) и вязкости среды (*б*) в канале шириной 20 м в момент времени $t = 0,5$ с

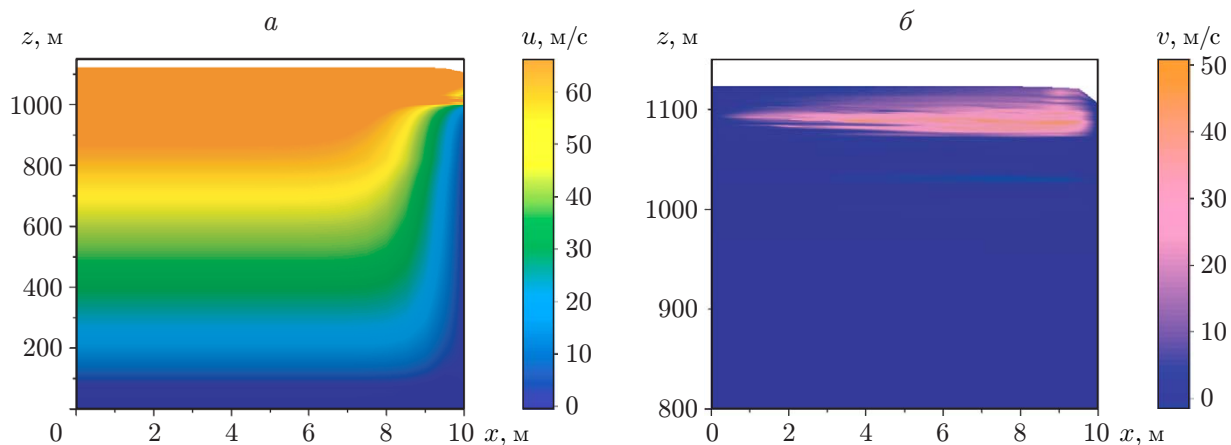


Рис. 4. Распределения вертикальной (*а*) и горизонтальной (*б*) компонент скорости в канале шириной 20 м в момент времени $t = 1,5$ с

объемная концентрация газовой фазы в котором за небольшой промежуток времени достигает значения $k \approx 0,4$ и приближается к некоторому критическому значению, при котором расчет должен быть остановлен. Этот результат, а также незначительное увеличение вязкости среды (до $2 \cdot 10^3$ Па·с), малые значения скорости приращения массы газа и его плотности в кавитационных пузырьках при интенсивном развитии пузырьковой кавитации свидетельствуют о том, что использование приведенных выше аналитических решений при описании кинетики процесса на данном этапе нецелесообразно.

Особый интерес представляют результаты численного анализа основных характеристик потока магмы в щелевом канале, выполненного с использованием полной системы (1)–(8) для интервала времени $t \leq 1,5$ с. В частности, оказалось, что к моменту времени $t = 1,5$ с объемная концентрация газовой фазы в окрестности свободной поверхности увеличивается до значений $k = 0,6 \div 0,7$, а вязкость — до значения $\mu = 10^5$ Па·с. На рис. 4 приведены распределения горизонтальной и вертикальной компонент скорости в канале шириной 20 м в момент времени $t = 1,5$ с. Нетрудно показать, что к этому моменту времени волна декомпрессии, отраженная от границы с очагом вулкана (давление в очаге равно 170 МПа), достигает свободной поверхности и глубина зон, в которых значения

вертикальных компонент скорости максимальны ($u \approx 60$ м/с), увеличивается до 400 м. На рис. 4,б представлено распределение горизонтальной составляющей массовой скорости, из которого следует, что при практически равных составляющих массовой скорости наблюдается значительное смещение части потока к стенке.

Заключение. Построена оригинальная двумерная физико-математическая модель щелевого вулканического извержения взрывного типа, позволяющая в рамках механики многофазных сред описывать динамику состояния магматического расплава. При постановке учитываются взрывной характер декомпрессии магмы, состояние компонентов ее расплава, процессы нуклеации и роста кавитационных зародышей, диффузионные эффекты. Предложены и исследованы условия динамического проскальзывания кавитирующей среды на стенках щели, проведен анализ влияния масштабного фактора на динамику состояния расплава при фиксированных значениях его вязкости.

Проведенные численные расчеты начальной стадии извержения показали, что характер и структура течения существенно зависят от параметров процесса, в частности от вязкости магматического расплава, которая меняется в процессе его дегазации в волне декомпрессии.

Установлено, что к моменту времени, когда волна декомпрессии, отраженная от границы с очагом вулкана, достигает свободной поверхности, глубина зоны, в которой вертикальная компонента скорости максимальна, увеличивается до 400 м. При этом при практически равных составляющих массовой скорости наблюдается существенное смещение части потока к стенке.

Показано, что при различных комбинациях постоянных значений вязкости расплава и ширины канала структуры течений с пограничными слоями оказываются подобными. Данный результат согласуется с известным выводом о пропорциональности толщины пограничного слоя корню квадратному из кинематической вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kedrin V. K.** Hydrodynamic aspects of explosive eruptions of volcanoes: simulation problems // *Shock Waves*. 2009. V. 18, N 6. P. 451–464.
2. **Dobran F.** Nonequilibrium flow in volcanic conduits and application to the eruptions of Mt. St. Helens on May 18, 1980, and Vesuvius in AD 79 // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 1992. V. 49, N 34. P. 285–311.
3. **Gonnermann H. M., Manga M.** The fluid mechanics inside a volcano // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2007. V. 39. P. 321–356.
4. **Woods A. W.** The dynamics of explosive volcanic eruptions // *Rev. Geophys.* 1995. V. 33, N 4. P. 495–530.
5. **Gerst A., Horst M., Kyle P. R., Voege M.** The first second of a strombolian eruption: velocity observations at Erebus volcano, Antarctica // *EOS Trans. Amer. Geophys. Union*. 2006. V. 87, N 52. Fall Meet. Suppl. Abstr. V31G-04.
6. **Huppert H. E., Wood A. W.** The role of volatiles in magma chamber dynamics // *Nature*. 2002. V. 420, N 5. P. 493–495.
7. **Papale P., Neri A., Macedonio G.** The role of magma composition and water content in explosive eruptions. 1. Conduit ascent dynamics // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 1998. V. 87, N 1–4. P. 75–93.
8. **Кедринский В. К., Макаров А. И., Стебновский С. В. и др.** Взрывное извержение вулканов: некоторые подходы к моделированию // *Физика горения и взрыва*. 2005. Т. 41, № 6. С. 193–201.

9. **Wilson L.** Relationships between pressure, volatile content and ejecta velocity in three types of volcanic explosion // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 1980. V. 8, N 2–4. P. 297–313.
10. **Бармин А. А., Мельник О. Э.** Гидродинамика вулканических извержений // *Успехи механики.* 2002. Т. 1, № 1. С. 32–60.
11. **Barmin A., Melnik O., Sparks R. S. J.** Periodic behavior in lava dome eruptions // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2002. V. 199, N 1/2. P. 173–184.
12. **Melnik O. E., Sparks R. S. J.** Non-linear dynamics of lava dome extrusion // *Nature.* 1999. V. 402, N 4. P. 37–41.
13. **Melnik O. E.** Dynamics of two-phase conduit flow of high-viscosity gas-saturated magma: Large variations of sustained explosive eruption intensity // *Bull. Volcanol.* 2000. V. 62, N 3. P. 153–170.
14. **Melnik O. E., Sparks R. S. J.** Controls on conduit magma flow dynamics during lava dome building eruptions // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110. B02209.
15. **Mangan M., Sisson T.** Delayed, disequilibrium degassing in rhyolite magma: decompression experiments and implications for explosive volcanism // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2000. V. 183, N 3/4. P. 441–455.
16. **Лежнин С. И., Прибатурин Н. А., Сорокин А. Л.** Влияние вязкости на образование пузырьков при декомпрессии водонасыщенной магмы // *ПМТФ.* 2005. Т. 46, № 1. С. 21–28.
17. **Massol H., Koyaguchi T.** The effect of magma flow on nucleation of gas bubbles in a volcanic conduit // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 2005. V. 143, N 1–3. P. 69–88.
18. **Mourtada-Bonnefoi C. C., Laporte D.** Kinetics of bubble nucleation in a rhyolitic melt: an experimental study of the effect of ascent rate // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2004. V. 218, N 3/4. P. 521–537.
19. **Toramaru A.** Vesiculation process and bubble size distributions in ascending magmas with constant velocities // *J. Geophys. Res.* 1989. V. 94, N B12. P. 17523–17542.
20. **Toramaru A.** Numerical study of nucleation and growth of bubbles in viscous magmas // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100, N B2. P. 1913–1931.
21. **Chernov A. A., Kedrinsky V. K., Pil'nik A. A.** Kinetics of gas bubble nucleation and growth in magmatic melt at its rapid decompression // *Phys. Fluids.* 2014. V. 26, N 11. 116602.
22. **Lensky N. G., Lyakhovsky V., Navon O.** Expansion dynamics of volatile-supersaturated liquids and bulk viscosity of bubbly magmas // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 460. P. 39–56.
23. **Lensky N. G., Navon O., Lyakhovsky V.** Bubble growth during decompression of magma: experimental and theoretical investigation // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 2004. V. 129, N 1–3. P. 7–22.
24. **Lyakhovsky V., Hurwitz S., Navon O.** Bubble growth in rhyolitic melts: Experimental and numerical investigation // *Bull. Volcanol.* 1996. V. 58, N 1. P. 19–32.
25. **Navon O., Chekhir A., Lyakhovsky V.** Bubble growth in highly viscous melts: theory, experiments, and autoexplosivity of dome lavas // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1998. V. 160, N 3/4. P. 763–776.
26. **Blower J. D., Keating J. P., Mader H. M., et al.** The evolution of bubble size distributions in volcanic eruptions // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 2003. V. 120, N 1/2. P. 1–23.
27. **Liu Y., Zhang Y. X.** Bubble growth in rhyolitic melt // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2000. V. 181, N 1/2. P. 251–264.
28. **Кедринский В. К.** Динамика “коллективного” пузырька в потоке расплава магмы за фронтом волны декомпрессии // *ПМТФ.* 2011. Т. 52, № 3. С. 41–50.
29. **Proussevitch A. A., Sahagian D. L., Anderson A. T.** Dynamics of diffusive bubble growth in magmas: Isothermal case // *J. Geophys. Res.* 1993. V. 98, N B12. P. 22283–22307.

30. **Proussevitch A. A., Sahagian D. L.** Dynamics of coupled diffusive and decompressive bubble growth in magmatic systems // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101, N B8. P. 17447–17456.
31. **Proussevitch A. A., Sahagian D. L.** Dynamics and energetics of bubble growth in magmas: Analytical formulation and numerical modeling // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103, N B8. P. 18223–18251.
32. **Чернов А. А.** Об одной модели затвердевания магмы в процессе эксплозивного вулканического извержения // *ПМТФ.* 2003. Т. 44, № 5. С. 80–90.
33. **Hort M.** Abrupt change in magma liquidus temperature because of volatile loss or magma mixing: effects on nucleation, crystal growth and thermal history of the magma // *J. Petrology.* 1998. V. 39, N 5. P. 1063–1076.
34. **Toramaru A.** Model of nucleation and growth of crystals in cooling magmas // *Contrib. Mineral. Petrol.* 1991. V. 108, N 1/2. P. 106–117.
35. **Kedrinskiy V. K.** Explosive eruptions of volcanoes: simulation, shock tube methods and multi-phase mathematical models (Plenary lecture) // *Proc. of the 26th Intern. symp. on shock waves, Goettingen, 17–21 July 2007.* Berlin: Springer, 2009. P. 19–26.
36. **Adilbirov M., Dingwell D. B.** Magma fragmentation by rapid decompression // *Nature.* 1996. V. 380. P. 146–148.
37. **Gardner J. E., Thomas R. M. E., Jaupart C., et al.** Fragmentation of magma during plinian volcanic eruptions // *Bull. Volcanol.* 1996. V. 58, N 2/3. P. 144–162.
38. **Proussevitch A. A., Sahagian D. L., Kutolin V. A.** Stability of foams in silicate melts // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 1993. V. 59, N 1/2. P. 161–178.
39. **Давыдов М. Н., Кедринский В. К., Чернов А. А., Такаяма К.** Начальная стадия взрывного извержения вулкана: динамика состояния магмы в волнах разгрузки // *Докл. АН.* 2006. Т. 407, № 3. С. 190–193.
40. **Кедринский В. К., Давыдов М. Н.** Динамика структуры погранслоя в канале вулкана при взрывном характере извержения // *Докл. АН.* 2010. Т. 431, № 5. С. 625–629.
41. **Кедринский В. К.** Роль плотности зародышей как “скрытого” параметра в формировании аномальных зон в тяжелой кавитирующей магме // *ПМТФ.* 2014. Т. 55, № 2. С. 101–107.
42. **Вшивков В. А., Кедринский В. К., Дудникова Г. И., Шокин Ю. И.** О численной модели формирования разрыва в пузырьковой жидкости при импульсном нагружении // *Докл. АН.* 2015. Т. 464, № 1. С. 31–34.
43. **Гатапова Е. Я., Ажаев В. С., Кабов О. А.** О снижении гидравлического сопротивления при двухфазном течении // *Письма в ЖЭТФ.* 2015. Т. 101, № 3. С. 176–180.
44. **Чернов А. А., Кедринский В. К., Давыдов М. Н.** Спонтанное зарождение пузырьков в газонасыщенном расплаве при его мгновенной декомпрессии // *ПМТФ.* 2004. Т. 45, № 2. С. 162–168.

Поступила в редакцию 21/XII 2015 г.