

ПЛАМЯ С РЕАЛЬНЫМ ТЕПЛОВЫМ РАСШИРЕНИЕМ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В. Б. Аккерман^{1,2}, В. В. Бычков¹

¹Institute of Physics, Umeå University, S-90187 Umeå, Sweden

²Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 113191 Москва
slava.akkerman@physics.umu.se

Исследована скорость распространения турбулентного пламени с реальным тепловым расширением во внешнем течении, зависящем от времени, для случая бесконечно тонкого фронта пламени и для пламени малой, но конечной толщины. Показано, что влияние пульсаций потока во времени обычно мало, и им можно пренебречь для разумных значений частоты пульсаций. В случае реального теплового расширения роль пульсаций во времени даже меньше, чем в исследованной ранее искусственной модели нулевого расширения. Из полученных результатов видно, что гипотеза Тейлора о «стационарной» турбулентности является хорошим приближением при исследовании турбулентного горения. Роль пульсаций становится значительной, только когда интегральный масштаб турбулентности близок к длине волны отсечки неустойчивости Даррье — Ландау. В этом частном случае пульсации во времени могут оказаться важными для объяснения экспериментов по турбулентному горению.

Ключевые слова: горение в предварительно перемешанном горючем, турбулентное пламя, неустойчивость Даррье — Ландау.

ВВЕДЕНИЕ

Скорость распространения турбулентного пламени в предварительно перемешанном горючем является одной из наиболее интересных и важных задач в науке о горении. Внешнее турбулентное течение искривляет форму фронта пламени; искривленное пламя имеет большую площадь поверхности, поглощает больше горючего в единицу времени и поэтому распространяется гораздо быстрее плоского пламени. К сожалению, из-за различных математических и вычислительных сложностей строгой теории турбулентного горения пока нет. Кроме того, знания о турбулентности в реальных лабораторных и промышленных приложениях довольно ограничены. Одним из стандартных упрощающих предположений, используемых при описании турбулентного потока, является гипотеза Тейлора о «стационарной» турбулентности [1–6]. Согласно этой гипотезе пульсации турбулентного потока во времени пренебрежимо малы по сравнению с пульсациями, возникающими из-за распространения пламени, и их можно не учитывать. В этом случае двумерное турбулентное течение может

быть описано в лабораторной системе отсчета с помощью следующей стационарной изотропной модели [5]:

$$u_z = \sum_{i=1}^N U_i \cos(k_i z + \varphi_{iz}) \cos(k_i x + \varphi_{ix}), \quad (1)$$

$$u_x = \sum_{i=1}^N U_i \sin(k_i z + \varphi_{iz}) \sin(k_i x + \varphi_{ix}), \quad (2)$$

где u_z , u_x — составляющие скорости, k_i — волновые числа турбулентных гармоник, U_i — их амплитуды, φ_{ix} , φ_{iz} — произвольные фазы. Амплитуды U_i зависят от k_i . В случае колмогоровского спектра турбулентности получаем $U_i \propto k_i^{-5/6}$. Модель (1), (2) является довольно общей, поскольку это не что иное, как фурье-разложение некоторого турбулентного течения. Согласно уравнениям (1), (2) среднеквадратичная скорость турбулентного течения имеет вид

$$U_{rms}^2 = \langle u_x^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{U_i^2}{4}. \quad (3)$$

Очевидно, что модель (1), (2) удовлетворяет уравнению непрерывности $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Число

Данная работа была поддержана Шведским исследовательским фондом (Swedish Research Foundation, VR) и фондом Кемпе (Kempe Foundation).

гармоник в турбулентном спектре (N) является собственным параметром модели. Строго говоря, нужно рассматривать все значения k между интегральным ($k_t = 2\pi/\lambda_t$) и колмогоровским ($k_v = 2\pi/\lambda_v$) волновыми числами. При этом число гармоник можно оценить как $N = \text{int}[k_v/k_t]$. Однако чаще всего имеют место соотношения $\lambda_t \gg \lambda_v$ и $N \rightarrow \infty$. В этом случае чем большее число гармоник N учитывается, тем лучше модель (1), (2) воспроизводит турбулентный спектр.

Хотя гипотеза Тейлора использовалась во многих работах [1–10], она не была ни доказана теоретически, ни проверена экспериментально. Более общая турбулентная модель [5] учитывает также пульсации турбулентного потока во времени:

$$u_z = \sum_{i=1}^N \sqrt{2} U_i \cos(k_i z + \varphi_{iz}) \cos(k_i x + \varphi_{ix}) \times \cos(\Omega_i t + \varphi_{it}), \quad (4)$$

$$u_x = \sum_{i=1}^N \sqrt{2} U_i \sin(k_i z + \varphi_{iz}) \sin(k_i x + \varphi_{ix}) \times \cos(\Omega_i t + \varphi_{it}), \quad (5)$$

где Ω_i — частоты пульсаций для различных турбулентных мод, φ_{it} — соответствующие произвольные фазы. Множитель $\sqrt{2}$ добавлен в уравнения (4), (5) для того, чтобы сохранить выражение (3) для среднеквадратичной турбулентной скорости.

В течение некоторого времени существовали разногласия насчет влияния пульсаций на скорость турбулентного пламени. На основании численных исследований [11, 12] было высказано предположение, что пульсации во времени могут уменьшить скорость пламени и даже вызвать насыщение зависимости скорости пламени от среднеквадратичной турбулентной скорости U_{rms} при больших значениях U_{rms} . Однако анализ [11, 12] был выполнен при упрощающем предположении о сдвиговом течении, которое не зависит от продольной координаты

$$u_z = \sum_{i=1}^N U_i \cos(k_i x + \varphi_{ix}) \cos(\Omega_i t + \varphi_{it}), \quad (6)$$

что существенно отличает этот анализ от гораздо более реалистичной модели (4), (5). В рамках модели (4), (5) турбулентное горение

изучалось в работе [13]. Было показано, что пульсации во времени не приводят ни к насыщению, ни к какому-либо другому качественному изменению зависимости скорости турбулентного пламени. Единственным эффектом пульсаций во времени, обнаруженным в работе [13], были некоторые количественные вариации скорости пламени, зависящие от частоты пульсаций.

До сих пор влияние пульсаций турбулентного потока во времени изучалось только в искусственном пределе нулевого скачка плотности на фронте пламени, когда коэффициент теплового расширения (определяемый как отношение плотностей горючей смеси и продуктов горения) равен единице: $\Theta \equiv \rho_f/\rho_b = 1$. В этом случае пламя не оказывает влияния на внешнее течение. Однако для реальных пламен коэффициент расширения довольно большой: $\Theta = 5 \div 10$, что приводит к сильному взаимодействию пламени и потока. Кроме того, скачок плотности на фронте пламени вызывает неустойчивость Даррье — Ландау (ДЛ), которая искривляет изначально плоский фронт даже в случае нулевой турбулентности. ДЛ-неустойчивость присуща практически всем пламенам. Она широко изучалась для случая ламинарного горения [14, 15]. В течение долгого времени оставался открытым вопрос, как включить ДЛ-неустойчивость в теорию турбулентного пламени [16, 17]. Недавно было показано, что в пределе слабой турбулентности увеличение скорости пламени является просто суммой увеличений за счет ДЛ-неустойчивости и внешней турбулентности:

$$\Delta U = \Delta U_{DL} + \Delta U_t. \quad (7)$$

Здесь $\Delta U \equiv U_w - U_f$, U_w — скорость искривленного пламени, U_f — скорость ламинарного горения, а ΔU_{DL} — вклад ДЛ-неустойчивости в случае нулевой турбулентности, ΔU_t — увеличение скорости за счет частного решения уравнений горения, обусловленного турбулентностью. Характерные свойства этого частного решения обсуждаются в данной работе. Модельные численные исследования [9] также привели к результату (7). Используя (7), можно изучать влияние пульсаций турбулентного потока во времени на скорость пламени для реальных значений коэффициента теплового расширения $\Theta = 5 \div 10$.

В настоящей работе исследуется турбулентное горение с реалистичным тепловым

расширением во внешнем течении, зависящем от времени. Показано, что пульсации во времени слабо влияют на скорость горения в пределе бесконечно тонкого фронта пламени. При учете конечной толщины пламени пульсации во времени также не приводят к каким-либо новым качественным эффектам. Влияние пульсаций становится значительным, только если интегральный масштаб турбулентности оказывается близок к длине волны отсечки ДЛ-неустойчивости.

1. РЕШЕНИЕ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ, ДЛЯ СЛАБО ИСКРИВЛЕННОГО, БЕСКОНЕЧНО ТОНКОГО ПЛАМЕНИ

Для того чтобы упростить последующие вычисления, удобно переписать модель (4), (5) в виде

$$u_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^N U_i [\cos(k_i z + \Omega_i t + \varphi_{it+}) + \cos(k_i z - \Omega_i t + \varphi_{it-})] \cos(k_i x + \varphi_{ix}), \quad (8)$$

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^N U_i [\sin(k_i z + \Omega_i t + \varphi_{it+}) + \sin(k_i z - \Omega_i t + \varphi_{it-})] \sin(k_i x + \varphi_{ix}). \quad (9)$$

К сожалению, до сих пор нет какой-либо информации о частоте пульсаций во времени. Анализ размерностей приводит к двум наиболее вероятным вариантам [11–13]:

$$\Omega_i \propto u_{rms}(k_i) k_i \quad (10)$$

или

$$\Omega_i \propto U_i k_i. \quad (11)$$

Здесь $u_{rms}(k)$ — среднеквадратичная скорость, обеспечиваемая турбулентными модами на масштабах меньше $2\pi/k$,

$$u_{rms}^2(k) = \int_k^{k_v} E_t(\eta) d\eta, \quad (12)$$

где $E_t(\eta)$ — спектральная плотность кинетической энергии турбулентности, промежуточная переменная η имеет размерность волнового числа. Для всего турбулентного спектра

среднеквадратичную скорость (3) можно также представить в интегральной форме:

$$U_{rms}^2 = u_{rms}^2(k_t) = \int_{k_t}^{k_v} E_t(k) dk. \quad (13)$$

В случае колмогоровского спектра величину E_t можно найти из уравнения (13):

$$E_t(k) = \frac{2 U_{rms}^2 k_t^{2/3} k^{-5/3}}{3 \cdot 1 - (k_t/k_v)^{2/3}} \approx \frac{2}{3} U_{rms}^2 k_t^{2/3} k^{-5/3}. \quad (14)$$

В пределе $k_v \gg k_t$ получаем $u_{rms}(k) = U_{rms}(k/k_t)^{-1/3}$. В этом случае выражения (10), (11) для частоты пульсаций можно представить в виде

$$\Omega_i = q U_{rms} k_i (k_i/k_t)^{\gamma-1} \propto k_i^\gamma, \quad (15)$$

где $\gamma = 2/3$ или $1/6$ при выборе (10) или (11) соответственно. Параметр q определяет относительную роль пульсаций во времени по сравнению с приближением стационарной турбулентности, его можно рассматривать в качестве безразмерной частоты пульсаций. В работах [11, 12] принималось $q \approx 0.1$. Однако до сих пор неизвестно, насколько велико может быть значение q на самом деле.

Линейный отклик бесконечно тонкого фронта пламени на слабое внешнее турбулентное течение описывается уравнением [16]

$$\frac{\Theta + 1}{2\Theta} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + U_f \hat{\Phi} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\Theta - 1}{2} U_f^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(U_f \hat{\Phi} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u_z, \quad (16)$$

где $z = F(x, t)$ — положение фронта пламени, $\hat{\Phi}$ — ДЛ-оператор, который обозначает произведение абсолютной величины волнового числа возмущений вдоль фронта пламени в фурье-пространстве:

$$\hat{\Phi} F = \frac{1}{2\pi} \int k F_k \exp(ikx) dk. \quad (17)$$

Отметим, что уравнение (16) справедливо для произвольной величины Θ . Его левая часть описывает развитие ДЛ-неустойчивости, а правая определяет отклик пламени на внешнее течение (очевидно, что в случае нулевой турбулентности уравнение (16) сводится к широко известному дисперсионному соотношению

для ДЛ-неустойчивости). Соответственно общее решение уравнения (16) является суперпозицией ламинарного ДЛ-решения и частного решения, обусловленного турбулентностью [10, 18]. В данном параграфе мы рассматриваем только частное «турбулентное» решение, поскольку нас интересует влияние пульсаций турбулентного потока во времени. Уравнение (16) записано для среднего положения слабо искривленного пламени

$$z = U_f t, \quad (18)$$

так что z -компонента поля скоростей (8) имеет вид

$$u_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^N U_i [\cos(U_f k_i t + \Omega_i t + \varphi_{it+}) + \cos(U_f k_i t - \Omega_i t + \varphi_{it-})] \cos(k_i x + \varphi_{ix}). \quad (19)$$

Учитывая (19), ищем решение уравнения (16) в аналогичном виде:

$$F(x, t) = \sum_{i=1}^N \{ F_{ic+} \cos(U_f k_i t + \Omega_i t + \varphi_{it+}) + F_{is+} \sin(U_f k_i t + \Omega_i t + \varphi_{it+}) + F_{ic-} \cos(U_f k_i t - \Omega_i t + \varphi_{it-}) + F_{is-} \sin(U_f k_i t - \Omega_i t + \varphi_{it-}) \} \times \cos(k_i x + \varphi_{ix}). \quad (20)$$

Подставляя (19), (20) в (16), получаем

$$F_{ic\pm} = \frac{1}{\sqrt{2} k_i} \frac{U_i}{U_f} \frac{\beta_{i\pm}^2 - \alpha_{i\pm}}{\alpha_{i\pm}^2 + \beta_{i\pm}^2}, \quad (21)$$

$$F_{is\pm} = \frac{1}{\sqrt{2} k_i} \frac{U_i}{U_f} \frac{(1 + \alpha_{i\pm}) \beta_{i\pm}}{\alpha_{i\pm}^2 + \beta_{i\pm}^2}, \quad (22)$$

где

$$\beta_{i\pm} = 1 \pm \Omega_i / U_f k_i, \quad (23)$$

$$\alpha_{i\pm} = \frac{\Theta + 1}{2\Theta} \left(1 \pm \frac{\Omega_i}{U_f k_i} \right)^2 + \frac{\Theta - 1}{2} = \frac{(\Theta + 1) \beta_{i\pm}^2 + \Theta(\Theta - 1)}{2\Theta}. \quad (24)$$

Увеличение скорости за счет частного решения, обусловленного турбулентностью, определяется увеличением поверхности пламени [19]:

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right\rangle. \quad (25)$$

Подставляя уравнение (20) с амплитудами (21), (22) в (25), находим

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^N \frac{U_i^2}{U_f^2} \left(\frac{1 + \beta_{i+}^2}{\alpha_{i+}^2 + \beta_{i+}^2} + \frac{1 + \beta_{i-}^2}{\alpha_{i-}^2 + \beta_{i-}^2} \right). \quad (26)$$

Учитывая (3) и закон Колмогорова $U_i \propto k_i^{-5/6}$, запишем (26) в виде

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{1}{4} \frac{U_{rms}^2}{U_f^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1 + \beta_{i+}^2}{\alpha_{i+}^2 + \beta_{i+}^2} + \frac{1 + \beta_{i-}^2}{\alpha_{i-}^2 + \beta_{i-}^2} \right) \times k_i^{-5/3} / \sum_{i=1}^N k_i^{-5/3}. \quad (27)$$

В случае малых частот ($\Omega_i \ll U_f k_i$) уравнение (26) сводится к следующему:

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{C(\Theta)}{8} \sum_{i=1}^N \frac{U_i^2}{U_f^2} \left(1 + 3\Gamma(\Theta) \frac{\Omega_i^2}{U_f^2 k_i^2} \right), \quad (28)$$

где

$$C(\Theta) = \frac{8\Theta^2}{(\Theta^2 + 1)^2 + 4\Theta^2}, \quad (29)$$

$$\Gamma(\Theta) = \frac{1}{3} \left[16 \left(\frac{\Theta^3 + 3\Theta^2 + \Theta + 1}{(\Theta^2 + 1)^2 + 4\Theta^2} \right)^2 - 2 \frac{3\Theta^3 + 11\Theta^2 + 7\Theta + 5}{(\Theta^2 + 1)^2 + 4\Theta^2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (30)$$

В искусственном пределе нулевого расширения ($\Theta = 1$) значения параметров (29), (30) становятся равными единице и уравнение (28) совпадает с результатом работы [13]

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \frac{U_i^2}{U_f^2} \left(1 + 3 \frac{\Omega_i^2}{U_f^2 k_i^2} \right). \quad (31)$$

В противоположном случае реального коэффициента расширения, но стационарной турбулентности ($q = 0$) формула (28) принимает вид

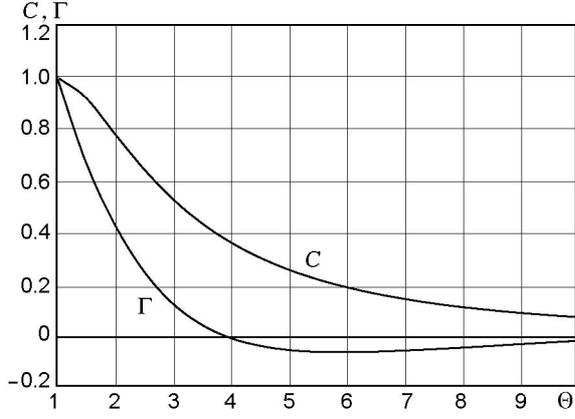


Рис. 1. Зависимость коэффициентов C и Γ от коэффициента теплового расширения в случае бесконечно тонкого фронта пламени

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{4\Theta^2}{(\Theta^2 + 1)^2 + 4\Theta^2} \frac{U_{rms}^2}{U_f^2}, \quad (32)$$

аналогичный [10]. Наконец, выбирая $\Theta = 1$, $q = 0$, приходим к известной формуле Клавена — Вильямса, записанной для двумерной геометрии:

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{1}{2} \frac{U_{rms}^2}{U_f^2}. \quad (33)$$

Результат (28) удобнее анализировать, заменив сумму интегралом:

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{C(\Theta)}{2} \frac{U_{rms}^2}{U_f^2} \left(\int_{k_t}^{k_v} k^{-5/3} dk \right)^{-1} \times \\ \times \int_{k_t}^{k_v} \left(1 + 3\Gamma(\Theta) q^2 \frac{U_{rms}^2}{U_f^2} \left(\frac{k}{k_t} \right)^{2\gamma-2} \right) k^{-5/3} dk, \quad (34)$$

который может быть вычислен как

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{C(\Theta)}{2} \frac{U_{rms}^2}{U_f^2} \left(1 + q^2 \frac{3\Gamma(\Theta)}{4-3\gamma} \frac{U_{rms}^2}{U_f^2} \right) \quad (35)$$

в пределе $k_t \ll k_v$. Из уравнения (35) видно, что влияние пульсаций во времени зависит от величины и знака параметра $\Gamma(\Theta)$ (мы имеем $\gamma < 4/3$ в любом случае).

Зависимости $C(\Theta)$, $\Gamma(\Theta)$, определяемые уравнениями (29), (30), изображены на рис. 1. Обе кривые начинаются от единицы при $\Theta = 1$.

Параметр C монотонно уменьшается с увеличением коэффициента теплового расширения, но остается положительным. Для коэффициентов расширения $\Theta = 5 \div 10$, типичных для лабораторных и промышленных пламен, имеем $C = 0.1 \div 0.25$. В то же время параметр Γ оказывается отрицательным в области реальных значений Θ . По этой причине скорость пламени в турбулентном течении с пульсациями во времени должна быть меньше, чем при стационарной турбулентности для реальных значений Θ (по крайней мере, в случае малых Ω), в то время как в пределе $\Theta = 1$ имеем противоположную ситуацию [13]. Малое по модулю значение параметра Γ ($-0.06 < \Gamma < -0.01$) при $\Theta = 5 \div 10$ делает влияние пульсаций гораздо слабее при $\Theta = 5 \div 10$, чем в случае $\Theta = 1$, когда $\Gamma = 1$ [13]. Рис. 2, 3 иллюстрируют относительное увеличение скорости $\Delta U/U_f$ в зависимости от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости U_{rms}/U_f при количестве гармоник в турбулентном спектре $N = 1000$ и различных параметрах пламени. На рис. 2 показаны результаты, полученные при фиксированном коэффициенте расширения $\Theta = 7$, показателе степени $\gamma = 2/3$ и различных частотах пульсаций, контролируемых параметром q ($q = 0, 1, 5$). Расчет проводился с использованием уравнения (27) и гораздо более простого, но менее строгого уравнения (35). Видно, что в первом случае скорость пламени меньше из-за пульсаций турбулентного течения во времени. Однако это уменьшение незначительно даже для довольно сильных пульсаций с $q = 5$, в то время как при $q = 1$ оно едва заметно. Выбирая область значений $q = 0.1 \div 1$ аналогично работам [11–13], можно предположить, что влияние пульсаций во времени пренебрежимо мало в случае слабой турбулентности ($U_{rms}/U_f < 1$). В отличие от уравнения (27) формула (35) является разложением по степеням q и, строго говоря, справедлива только при $q \ll 1$. Однако даже при таких умеренных значениях частоты пульсаций, как $q = 1$, уравнение (35) предсказывает скорость пламени с хорошей точностью (соответствующие сплошные и штриховые линии на рисунке почти совпадают). Напротив, формально экстраполируя уравнение (35) в область больших значений q , мы приходим к неправильным результатам. Например, при $q = 5$ уравнение (35) предсказывает сильное уменьшение скорости пламени, что качественно отличается от

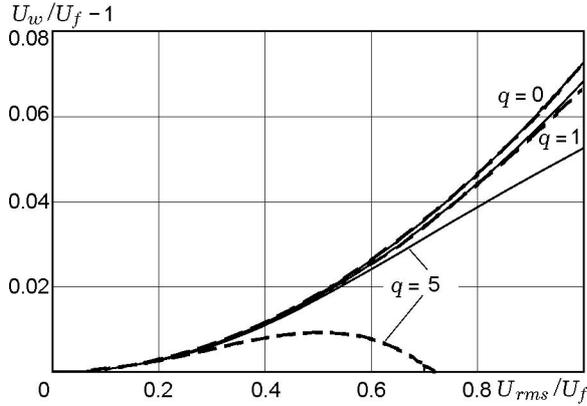


Рис. 2. Зависимость относительного увеличения скорости от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости в случае бесконечно тонкого фронта пламени при $\Theta = 7$, $\gamma = 2/3$, $N = 1000$ и различных амплитудах пульсаций: сплошные линии соответствуют уравнению (27), штриховые — уравнению (35)

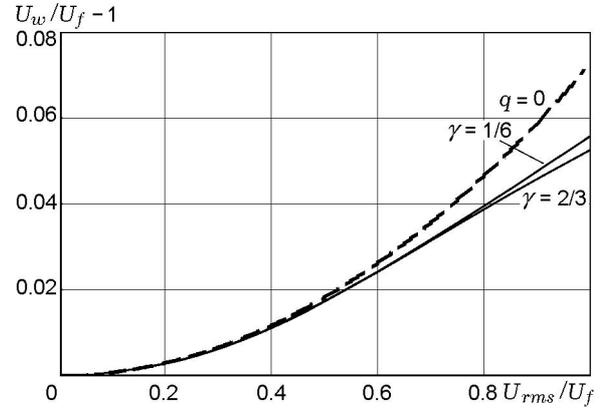


Рис. 3. Зависимость относительного увеличения скорости от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости в случае бесконечно тонкого фронта пламени при $q = 5$, $\Theta = 7$, $N = 1000$ и различных значениях γ (стационарный случай $q = 0$ представлен штриховой линией)

соответствующей непрерывной кривой, обнаруженной в результате строгих вычислений. В то же время уравнение (35) гораздо проще и понятнее, чем (27). Поэтому в дальнейшем будем использовать в основном уравнение (35), учитывая ограничение на безразмерную частоту пульсаций ($q \leq 1$). Увеличения скорости, рассчитанные по формуле (27), для показателей степени $\gamma = 1/6$ и $2/3$ при $q = 5$ приведены на рис. 3. В обоих случаях влияние пульсаций во времени оказывается слабым, хотя оно несколько сильнее при $\gamma = 2/3$, чем при $\gamma = 1/6$. Значительное качественное и количественное отличие данной теории и работы [13] показывает, что коэффициент расширения Θ является важным параметром в теории турбулентного горения.

Наконец, следует упомянуть, что для определенных значений γ интегральный вариант уравнения (27)

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{1}{4U_f} \int_{k_t}^{k_v} \left(\frac{1 + \beta_+^2(k)}{\alpha_+^2(k) + \beta_+^2(k)} + \frac{1 + \beta_-^2(k)}{\alpha_-^2(k) + \beta_-^2(k)} \right) E_t(k) dk \quad (36)$$

может быть вычислен аналитически для любой частоты Ω , даже относительно большой. В

частности, в случае $\gamma = 2/3$ мы приходим к соотношению

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \left(\frac{\Theta}{\Theta^2 + \Theta - 1} \right)^{1/2} \frac{\Psi(k_v) - \Psi(k_t)}{2q^2}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(k) = & (P_1^2(\Theta) - 1) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{P_1(\Theta)} \operatorname{arctg} \frac{1}{1 - \delta(k)/P_1(\Theta)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \ln[P_1^2(\Theta) - (1 - \delta(k))^2] \right\} - (P_2^2(\Theta) - 1) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{P_2(\Theta)} \operatorname{arctg} \frac{1}{1 - \delta(k)/P_2(\Theta)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \ln[P_2^2(\Theta) - (1 - \delta(k))^2] \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1,2}(\Theta) = & \frac{1}{\Theta + 1} \times \\ & \times \left[\Theta(\Theta^2 + 2\Theta - 1 \pm \sqrt{\Theta(\Theta^2 + \Theta - 1)}) \right]^{1/2}, \quad (39) \end{aligned}$$

$$\delta(k) = q^2 u_{rms}^2(k) / U_f^2. \quad (40)$$

Однако результат (37)–(40) гораздо менее удобен для анализа, чем (28) или (35).

2. СКОРОСТЬ СИЛЬНО ИСКРИВЛЕННЫХ ПЛАМЕН

Полученное в предыдущем параграфе частное решение уравнений горения, учитывающее турбулентность, нельзя применять непосредственно для анализа реальных промышленных и лабораторных пламен. Прежде всего, в § 1 мы изучали двумерное течение, в то время как реальное турбулентное горение трехмерное. До сих пор остаются нерешенные вопросы, связанные с экстраполяцией двумерных расчетов на трехмерную геометрию. В отличие от двумерной модели (1), (2), пока нет аналогичной изотропной трехмерной модели, которая бы воспроизводила трехмерный (3D) вариант формулы Клавена — Вильямса [1]

$$\frac{\Delta U_{3D}}{U_f} = \frac{U_{rms}^2}{U_f^2} \quad (41)$$

в пределе $\Theta = 1$. Вопрос о трехмерной модели турбулентного течения обсуждался в [9, 10]. Аналогично работе [10] рассмотрим трехмерный аналог уравнения (28) в виде

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \mu \frac{C(\Theta)}{4} \sum_{i=1}^N \frac{U_i^2}{U_f^2} \left(1 + 3\Gamma(\Theta) \frac{\Omega_i^2}{U_f^2 k_i^2} \right), \quad (42)$$

где либо $\mu = 1$ в соответствии с формулой Клавена — Вильямса (41), либо $\mu = 1/2$ согласно единственной доступной изотропной трехмерной модели турбулентного течения [20]. Мы будем использовать значение $\mu = 1$. Следует отметить, что в трехмерной геометрии имеется дополнительное увеличение скорости пламени из-за быстрого горения вдоль оси вихря [21]. Однако мы не будем рассматривать этот эффект, он требует специального подхода и будет изучен в других работах.

Уравнения (28), (42) следуют из (16), (25) в предположении слабой турбулентности и слабой нелинейности. Однако большинство промышленных пламен сильно искривлены из-за собственных неустойчивостей и внешней турбулентности с большими значениями среднеквадратичной скорости пульсаций (вплоть до $U_{rms}/U_f = 10$), и их нельзя описать в рамках теории слаботурбулентного пламени. В этом случае скорость сильнотурбулентного пламени может быть найдена при использовании ренормализационного анализа [2, 18, 22]. Предполагая структуру фронта пламени инвариантной

относительно изменения масштаба, разложим весь спектр искривлений фронта ($k_t \leq k \leq k_v$) на узкие полосы ширины $dk \ll k_v - k_t$. Каждая полоса дает малый вклад ($dU \ll U_w - U_f$) в общую скорость пламени, который можно определить в рамках теории слаботурбулентного пламени. Скорость $U = U(k)$, обусловленная всеми полосами с волновыми числами больше чем k , играет роль эффективной «скорости пламени» для следующей полосы. В этом параграфе мы будем рассматривать только частоту пульсаций во времени в виде $\Omega \propto k^{2/3}$ и, исходя из результатов § 1, предполагаем, что роль пульсаций для каждой полосы пространственного спектра мала.

Анализ начнем со случая нулевого теплового расширения ($\Theta = 1$). В этом пределе задача уже была рассмотрена в [13] при использовании ренормализационного метода Яхотя [2]. Однако, как показано в [22], метод Яхотя не является инвариантным относительно изменения масштаба, поэтому мы выполним вычисления, аналогичные [13], используя метод Пошэ [22]. Дифференциальный аналог уравнения (42) при $\Theta = 1$ можно представить в виде

$$\frac{dU}{U} = -\mu \frac{E_t(k) dk}{U^2} \left(1 + 3q^2 \frac{u_{rms}^2(k)}{U^2} \right). \quad (43)$$

В нулевом приближении по малому параметру q уравнение (43) принимает вид

$$d(U^2) = -2\mu E_t(k) dk \quad (44)$$

с решением

$$U^2(k) = U_f^2 + 2\mu u_{rms}^2(k). \quad (45)$$

Подставляя формулу (45) в «пульсационную» часть уравнения (43), в первом приближении получаем

$$\frac{dU}{U} = \mu \frac{d(u_{rms}^2(k))}{U^2} \left(1 + 3q^2 \frac{u_{rms}^2(k)}{U_f^2 + 2\mu u_{rms}^2(k)} \right). \quad (46)$$

Интегрируя (46) по всему турбулентному спектру, находим

$$U_w^2 = U_f^2 + (2\mu + 3q^2)U_{rms}^2 - \frac{3q^2}{2\mu} U_f^2 \ln \frac{1 + 2\mu U_{rms}^2}{U_f^2}. \quad (47)$$

Соответствующее уравнение для скорости сильно искривленного пламени, полученное методом Яхоты, имеет вид [13]

$$\ln \frac{U_w}{U_f} = \mu \frac{U_{rms}^2}{U_w^2} \left(1 + \frac{3q^2}{2} \frac{U_{rms}^2}{U_w^2} \right). \quad (48)$$

Скорость сильно искривленного пламени (47) с нулевым тепловым расширением ($\Theta = 1$) показана на рис. 4, *a* в зависимости от среднеквадратичной турбулентной скорости U_{rms} для $\mu = 1$ и $q = 0, 0.5, 1$. Видно, что скорость сильно увеличивается за счет пульсаций во времени. Насыщение роста, предложенное в работах [11, 12], не наблюдается. Отметим, что метод [22] приводит к значительно большей скорости пламени, чем метод [2]. Это хорошо иллюстрирует рис. 4, *б*, на котором приведены зависимости, построенные с использованием уравнений (47), (48) для $q = 0$ и 1 в обоих случаях.

Как было указано выше, «академический» предел нулевого скачка плотности на фронте пламени ($\Theta = 1$) очень далек от реальности. Согласно работам [10, 18] ДЛ-неустойчивость, возникающая при $\Theta > 1$, часто доминирует над эффектами внешнего потока даже в случае сильной турбулентности. Когда фронт пламени слабо искривлен, эффекты неустойчивости и внешнего турбулентного течения можно рассматривать отдельно [18], что было сделано в § 1. Однако влияние турбулентности и неустойчивости нельзя разделять для сильно искривленных пламен. В этом случае дифференциальное уравнение для $U(k)$ имеет вид [18]

$$\frac{dU}{U} = -E_{DL}(k)dk - \mu C \frac{E_t(k)dk}{U^2} \times \left(1 + 3\Gamma q^2 \frac{u_{rms}^2(k)}{U^2} \right). \quad (49)$$

Первое слагаемое в правой части (49) вызвано ДЛ-неустойчивостью со спектральными плотностями $E_{DL}(k) = D/k$ при $k_{min} < k < k_c$ и $E_{DL}(k) = 0$ при $k \geq k_c$. Здесь D — фрактальный параметр, $\lambda_{max} = 2\pi/k_{min}$ — максимально возможная длина волны неустойчивости, определяемая геометрией течения (k_{min} — минимальное возможное волновое число), а k_c — волновое число отсечки неустойчивости. В некотором смысле оба волновых числа k_c и k_{min} можно интерпретировать как внутреннюю и внешнюю отсечку ДЛ-неустойчивости. Однако в дальнейшем мы будем использовать термин «отсечка» только в общепринятом смысле, применяя его исключительно к

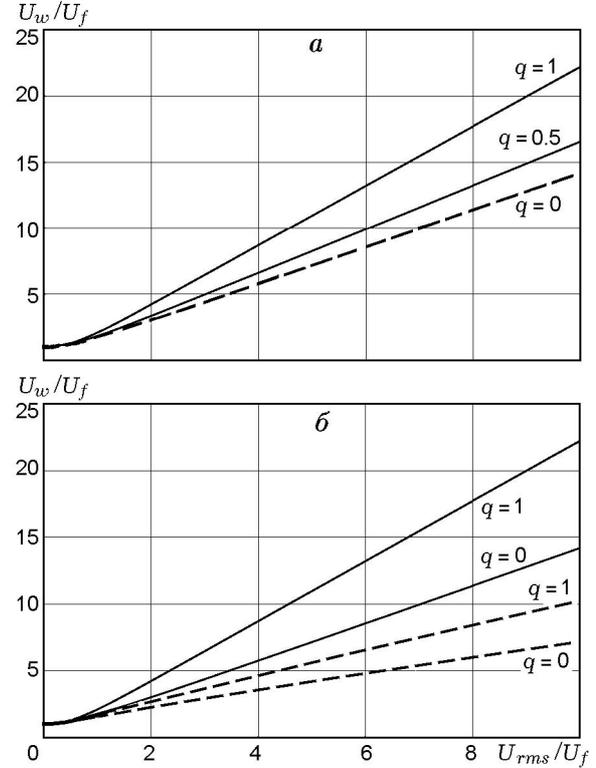


Рис. 4. Зависимость безразмерной скорости сильно искривленного пламени от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости в случае бесконечно тонкого фронта пламени при $\Theta = 1$, $\gamma = 2/3$, $N = 1000$:

a — результаты, полученные с помощью теории Пошэ [22], *б* — ренормализационные методы Яхоты [2] (штриховые линии) и Пошэ [22] (сплошные линии)

λ_c . Длина волны отсечки ДЛ-неустойчивости $\lambda_c = 2\pi/k_c$ зависит от собственных параметров пламени, в частности от толщины пламени и теплового расширения [14, 15]. Все возмущения фронта с длиной волны меньше длины волны отсечки ($\lambda \leq \lambda_c$) подавляются теплопроводностью, но фронт пламени оказывается неустойчивым по отношению к возмущениям с $\lambda > \lambda_c$ [14]. Коэффициент C в уравнении (49) описываем аналогично [18] с помощью функции Хевисайда, т. е. $C = 0$, если $k \geq k_c$, и C определяется уравнением (29), если $k < k_c$. Обычно в лабораторных и промышленных условиях горения $\lambda_{max} \gg \lambda_c$, что приводит к достаточно сильной ДЛ-неустойчивости. Интегральная турбулентная длина λ_t может быть либо сравнима с λ_{max} , либо меньше λ_{max} . Первый вариант ($\lambda_t \approx \lambda_{max}$) имеет место, когда турбулентность создается стенками трубы или

крупномасштабным гидродинамическим течением (например, движением поршня в моторе). Однако в экспериментах по горению часто используют турбулентность, создаваемую сеткой (см., например, [23]). В этом случае интегральный масштаб турбулентности может быть существенно меньше максимального масштаба течения λ_{\max} . Иногда масштаб турбулентности может оказаться столь же малым, как длина волны отсечки ДЛ-неустойчивости ($\lambda_t \approx \lambda_c$); в этом случае необходимо принимать во внимание конечную толщину фронта пламени. Параметр $D = D(\Theta)$ в уравнении (49) характеризует фрактальную структуру фронта пламени, возникающую благодаря ДЛ-неустойчивости [15, 24–26]. Согласно экспериментам [24–26] имеем $D \approx 1/3$ для типичных лабораторных пламен с $\Theta = 5 \div 8$.

Уравнение (49) можно решить тем же способом, который мы использовали при решении (43). При отсутствии пульсаций во времени ($q = 0$) уравнение (49) сводится к уравнению

$$\frac{dU}{U} = -E_{DL}(k)dk - \mu C \frac{E_t(k)dk}{U^2}, \quad (50)$$

которое имеет решение [18]

$$U^2(k) = U_f^2 \left(\frac{k}{k_c} \right)^{-2/3} + \frac{4}{3} \mu C u_{rms}^2(k) \ln \frac{k_c}{k}, \quad (51)$$

полученное при $D = 1/3$. Первое слагаемое показывает, как скорость пламени увеличивается за счет ДЛ-неустойчивости на масштабах порядка $2\pi/k$ при турбулентности $u_{rms}(k) = 0$. Следует подчеркнуть, что второе слагаемое в (51) (определяемое турбулентностью) также зависит от ДЛ-параметра k_c . Однако эта зависимость довольно слабая, поскольку логарифмическая функция $\ln(k_c/k)$ меняется медленно (особенно для малых волновых чисел ($k \ll k_c$), которые наиболее интересны в задаче). В первом приближении по малому параметру q уравнение (49) имеет вид

$$\frac{dU}{U} = -E_{DL}(k)dk + \mu C \frac{d(u_{rms}^2(k))}{U^2} \left(1 + 3\Gamma q^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{u_{rms}^2(k)}{U_f^2 (k_c/k)^{2/3} + (4/3)\mu C u_{rms}^2(k) \ln(k_c/k)} \right). \quad (52)$$

Аппроксимируя медленную логарифмическую функцию $\ln(k_c/k)$ константой, мы можем проинтегрировать уравнение (52) аналитически:

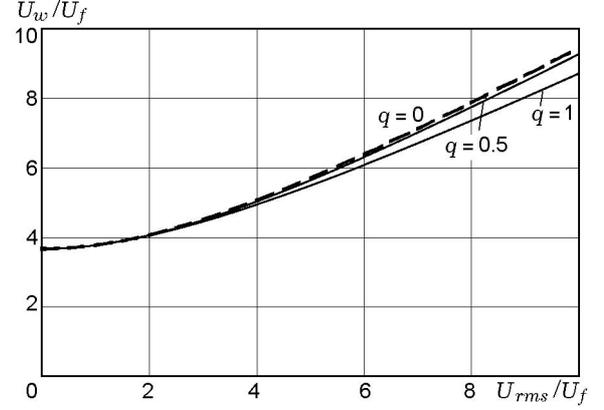


Рис. 5. Зависимость безразмерной скорости сильно искривленного пламени от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости в случае бесконечно тонкого фронта пламени при $\Theta = 7$, $\gamma = 2/3$, $N = 1000$, $\lambda_t = \lambda_{\max} = 50\lambda_c$ и различных амплитудах пульсаций

$$U_w^2 = U_f^2 \left(\frac{k_c}{k_t} \right)^{2/3} + \frac{4}{3} \mu C U_{rms}^2 \ln \frac{k_c}{k_t} \left(1 + \right. \\ \left. + \frac{3\Gamma q^2 U_{rms}^2}{U_f^2 (k_c/k_t)^{2/3} + (4/3)\mu C U_{rms}^2 \ln(k_c/k_t)} \right). \quad (53)$$

На рис. 5 показана скорость сильно искривленного пламени (53) в зависимости от среднеквадратичной турбулентной скорости при $\Theta = 7$ и $\lambda_{\max} = \lambda_t = 50\lambda_c$. В этом случае зависимость турбулентного течения от времени уменьшает скорость пламени, поскольку коэффициент Γ отрицателен. В отличие от рис. 4, *a, б*, на рис. 5 безразмерная скорость пламени U_w/U_f существенно превышает единицу в точке $U_{rms}/U_f = 0$ из-за ДЛ-неустойчивости. Сравнимая скорость ламинарного пламени (при $U_{rms} = 0$) и увеличение скорости пламени за счет внешней турбулентности в области $0 < U_{rms}/U_f < 10$, можно видеть, что ДЛ-неустойчивость принципиально важна даже для сильнотурбулентного пламени. Кроме того, влияние пульсаций турбулентного потока во времени на динамику горения гораздо слабее для реальных значений коэффициента теплового расширения $\Theta = 5 \div 10$ (см. рис. 5), чем в искусственном пределе $\Theta = 1$ (см. рис. 4). Такой эффект обусловлен, прежде всего, малыми по модулю значениями параметров C , Γ для случая реального теплового расширения: при $\Theta = 7$ имеем $C = 0.145$, $\Gamma = -0.052$, в то время как при $\Theta = 1$ получаем $C = 1$, $\Gamma = 1$.

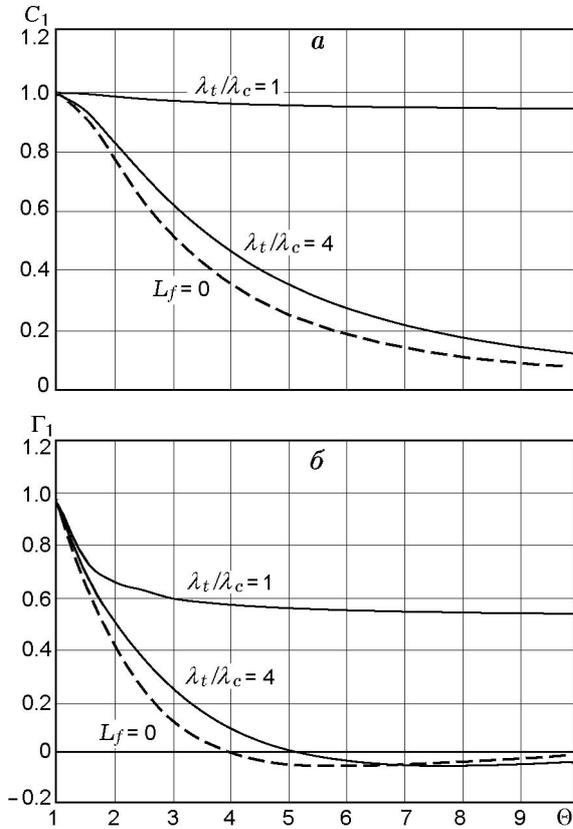


Рис. 6. Зависимость коэффициентов C_1 (а) и Γ_1 (б) от коэффициента теплового расширения в случае бесконечно тонкого фронта пламени (штриховые линии) и в случае фронта пламени конечной толщины (сплошные линии)

3. СКОРОСТЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЛАМЕНИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В предыдущих двух параграфах рассматривался бесконечно тонкий фронт пламени. Такой подход часто является разумным, если принимать во внимание огромное различие между типичной толщиной пламени $L_f = 10^{-4} \div 10^{-3}$ см и характерным гидродинамическим масштабом горения $\lambda_{\max} = 10 \div 10^2$ см в двигателях автомобилей, газотурбинных двигателях и лабораторных экспериментах. Однако внутренние параметры зоны горения могут оказаться важными для динамики пламени, когда масштаб турбулентности λ_t мал по сравнению с λ_{\max} (такая ситуация имеет место, например, в экспериментах [23]). По этой причине мы будем рассматривать фронт пламени малой, но конечной толщины. Аналогично § 1 мы ограничимся случаем слабо искривленного пламе-

ни. Линейный отклик фронта пламени конечной толщины на слабую внешнюю турбулентность описывается уравнением [16]

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta + 1}{2\Theta} (1 + A_1 L_f \hat{\Phi}) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (1 + A_2 L_f \hat{\Phi}) \times \\ & \times U_f \hat{\Phi} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\Theta - 1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_c}{2\pi} \hat{\Phi}\right) U_f^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \\ & = \left(U_f \hat{\Phi} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[u_z - \text{Mk} L_f \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0}\right] + \\ & + A_3 L_f U_f \hat{\Phi} \left(\hat{\Phi} u_z - \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0}\right), \quad (54) \end{aligned}$$

где Mk — число Маркштейна, характеризующее зависимость скорости пламени от кривизны и растяжения, а числовые коэффициенты A_1, A_2, A_3 зависят от тепловых и химических свойств горючей смеси. Уравнение (54) справедливо для любого коэффициента теплового расширения. Очевидно, что в пределе нулевой толщины пламени ($L_f = 0$) это уравнение сводится к уравнению (16). Для простоты в данной работе мы рассматриваем случай постоянного коэффициента теплопроводности при значениях числа Льюиса $\text{Le} = 1$ и числа Прандтля $\text{Pr} = 0$, что приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = \text{Mk} = \frac{\Theta \ln \Theta}{\Theta - 1}, \quad (55) \\ \lambda_c = 2\pi L_f \left(1 + \frac{\Theta + 1}{(\Theta - 1)^2} \Theta \ln \Theta\right). \end{aligned}$$

Следует отметить, что в случае $\text{Le} = 1$ и постоянных коэффициентов переноса значение числа Прандтля не влияет на коэффициенты уравнения (55), и с этой точки зрения безразлично, выберем ли мы $\text{Pr} = 0$ или более реальное значение $\text{Pr} = 1$ [14, 16]. Ненулевое значение числа Прандтля несколько изменяет модель для турбулентного течения (4), (5), которая в этом случае должна удовлетворять уравнению Навье — Стокса, а не уравнению Эйлера. Однако даже в этом случае влияние числа Прандтля на скорость пламени очень мало для стационарной турбулентности [10]. С другой стороны, ненулевые значения числа Прандтля делают и без того громоздкие вычисления данного параграфа еще более громоздкими. Поэтому остановимся на случае $\text{Pr} = 0$.

Подставляя уравнение (19) в (54), находим частное решение, обусловленное турбулентностью, в виде (20) со следующими обозначениями:

$$F_{is\pm} = \frac{U_i}{\sqrt{2}U_f k_i} \frac{\alpha_{i\pm}\chi_{i\pm} + \beta_{i\pm}\psi_{i\pm}}{\alpha_{i\pm}^2 + \beta_{i\pm}^2}, \quad (56)$$

$$F_{ic\pm} = \frac{U_i}{\sqrt{2}U_f k_i} \frac{\beta_{i\pm}\chi_{i\pm} - \alpha_{i\pm}\psi_{i\pm}}{\alpha_{i\pm}^2 + \beta_{i\pm}^2}, \quad (57)$$

где

$$\alpha_{i\pm} = \frac{\Theta + 1}{2\Theta} \left(1 \pm \frac{\Omega_i}{U_f k_i}\right)^2 + \frac{\Theta - 1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_c}{2\pi} k_i\right), \quad (58)$$

$$\beta_{i\pm} = \left(1 + \frac{\Theta \ln \Theta}{\Theta - 1} L_f k_i\right) \left(1 \pm \frac{\Omega_i}{U_f k_i}\right), \quad (59)$$

$$\chi_{i\pm} = 1 + \frac{\Theta \ln \Theta}{\Theta - 1} L_f k_i \pm \frac{\Omega_i}{U_f k_i}, \quad (60)$$

$$\psi_{i\pm} = 1 - \frac{\Theta \ln \Theta}{\Theta - 1} \left(1 \pm \frac{\Omega_i}{U_f k_i}\right) L_f k_i. \quad (61)$$

Хотя в соответствии с [18] мы рассматриваем эффект слабой турбулентности отдельно от ДЛ-неустойчивости, неявного влияния неустойчивости нельзя избежать даже для частного «турбулентного» решения из-за длины волны отсечки λ_c . Для вычисления скорости пламени подставим (20) с амплитудами (56), (57) в уравнение (25):

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^N \frac{U_i^2}{U_f^2} \left[\frac{\chi_{i+}^2 + \psi_{i+}^2}{\alpha_{i+}^2 + \beta_{i+}^2} + \frac{\chi_{i-}^2 + \psi_{i-}^2}{\alpha_{i-}^2 + \beta_{i-}^2} \right]. \quad (62)$$

В пределе малых частот ($\Omega_i \ll U_f k_i$) уравнение (62) сводится к

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \sum_{i=1}^N \frac{C_i U_i^2}{8 U_f^2} \left(1 + 3\Gamma_i \frac{\Omega_i^2}{U_f^2 k_i^2}\right), \quad (63)$$

где

$$C_i = \left[8\Theta^2(1 + L_f^2 k_i^2 \Theta^2 \ln^2 \Theta / (\Theta - 1)^2)\right] \times \\ \times \left\{ [\Theta + 1 + \Theta(\Theta - 1)(1 - \lambda_c k_i / 2\pi)]^2 + \right. \\ \left. + 4\Theta^2[1 + L_f k_i \Theta \ln \Theta / (\Theta - 1)]^2 \right\}^{-1}, \quad (64)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{6} + \frac{8}{3} \left\{ [(\Theta + 1)^2 + \Theta(\Theta^2 - 1)(1 - \lambda_c k_i / 2\pi) + \right.$$

$$\left. + 2\Theta^2[1 + L_f k_i \Theta \ln \Theta / (\Theta - 1)]^2 \right\} / \left\{ [\Theta + 1 + \right. \\ \left. + \Theta(\Theta - 1)(1 - \lambda_c k_i / 2\pi)]^2 + \right. \\ \left. + 4\Theta^2[1 + L_f k_i \Theta \ln \Theta / (\Theta - 1)]^2 \right\}^2 - \\ - \frac{2}{3} \left[5(\Theta + 1)^2 + 3\Theta(\Theta^2 - 1)(1 - \lambda_c k_i / 2\pi) + \right. \\ \left. + 6\Theta^2[1 + L_f k_i \Theta \ln \Theta / (\Theta - 1)]^2 \right\} / \left\{ [\Theta + 1 + \right. \\ \left. + \Theta(\Theta - 1)(1 - \lambda_c k_i / 2\pi)]^2 + \right. \\ \left. + 4\Theta^2[1 + L_f k_i \Theta \ln \Theta / (\Theta - 1)]^2 \right\}. \quad (65)$$

В отличие от случая бесконечно тонкого пламени каждая гармоника в уравнении (63) содержит свои параметры C_i , Γ_i , зависящие от волнового числа (от номера гармоники i), длины волны ДЛ-неустойчивости λ_c и интегрального масштаба турбулентности λ_t . Однако легко убедиться, что параметры i , λ_c и λ_t входят в уравнения (64), (65) в комбинации $i\lambda_c/\lambda_t$. Поэтому, для того чтобы изучить весь турбулентный спектр, достаточно рассмотреть только первую гармонику, поскольку

$$C_n(\Theta, \lambda_t/\lambda_c = g) = C_1(\Theta, \lambda_t/\lambda_c = g/n), \quad (66)$$

$$\Gamma_n(\Theta, \lambda_t/\lambda_c = g) = \Gamma_1(\Theta, \lambda_t/\lambda_c = g/n). \quad (67)$$

В пределе нулевой толщины пламени ($L_f = 0$) уравнения (63)–(65) воспроизводят уравнения (28)–(30). Если турбулентное течение подчиняется закону Колмогорова $U_i \propto k_i^{-5/6}$, то уравнение (63) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta U}{U_f} = \frac{1}{2} \frac{U_{rms}^2}{U_f^2} \sum_{i=1}^N C_i \left(1 + 3\Gamma_i \frac{\Omega_i^2}{k_i^2 U_f^2}\right) \times \\ \times k_i^{-5/3} / \sum_{i=1}^N k_i^{-5/3}. \quad (68)$$

На рис. 6,а множитель C_1 (сплошные линии), определяемый уравнением (64), представлен в зависимости от коэффициента расширения Θ для интегральных масштабов турбулентности $\lambda_t/\lambda_c = 1$ и 4. Здесь приведена также зависимость (штриховая линия), соответствующая уравнению (29), полученному при $L_f = 0$. Видно, что $C_1 \approx 1$ для всех Θ , если интегральный масштаб турбулентности близок к

длине волны отсечки ДЛ-неустойчивости. Для больших значений λ_t/λ_c множитель C_1 быстро уменьшается с увеличением коэффициента теплового расширения. Кривая, соответствующая $\lambda_t/\lambda_c = 4$, проходит довольно близко к линии $L_f = 0$. На рис. 6, б показан множитель Γ_1 , определенный согласно уравнению (65). Сплошные линии соответствуют $\lambda_t/\lambda_c = 1$ и 4, штриховая линия воспроизводит уравнение (30). Видно, что величина Γ_1 может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от интегрального масштаба турбулентности λ_t/λ_c , что приводит к положительному либо отрицательному влиянию пульсаций во времени на скорость фронта пламени. Если масштаб турбулентности близок к λ_c , то коэффициент Γ_1 довольно большой ($\Gamma_1 \approx 0.55$) в области реальных коэффициентов расширения $\Theta = 5 \div 10$. Таким образом, можно ожидать значительного влияния пульсаций турбулентного потока во времени на скорость горения. С другой стороны, для больших масштабов турбулентности ($\lambda_t/\lambda_c = 4$) отрицательные и малые значения коэффициента Γ_1 ($\Gamma_1(\Theta) \approx -0.05$) должны приводить к слабому влиянию пульсаций (по крайней мере, для первой турбулентной моды). Строго говоря, влияние пульсаций во времени зависит от конкуренции между положительными и отрицательными значениями Γ_i , соответствующими различным турбулентным модам.

Рис. 7–9 иллюстрируют увеличение скорости пламени $\Delta U/U_f$, определяемое уравнением (68), в зависимости от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости при числе мод в турбулентном спектре $N = 1000$ и различных параметрах пламени. На рис. 7, а приведены результаты расчета при $\Theta = 7$, $\lambda_t/\lambda_c = 1$, $\gamma = 2/3$ и различных частотах пульсаций, определяемых параметром $q = 0, 0.5, 1$. Здесь, в отличие от рис. 2, 3, скорость пламени увеличивается из-за пульсаций турбулентного потока во времени, и это увеличение оказывается значительным при $q = 1$. Рис. 7, б построен для тех же параметров, что и рис. 7, а, за исключением масштаба турбулентности — $\lambda_t/\lambda_c = 4$. В этом случае скорость пламени также несколько увеличивается из-за пульсаций во времени, но теперь это увеличение очень слабое. Результаты, представленные на рис. 7, а, б, были предсказаны выше при обсуждении коэффициентов $\Gamma_i(\Theta, \lambda_t/\lambda_c)$ на рис. 6, б. На рис. 8 показаны увеличения скорости для частоты пуль-

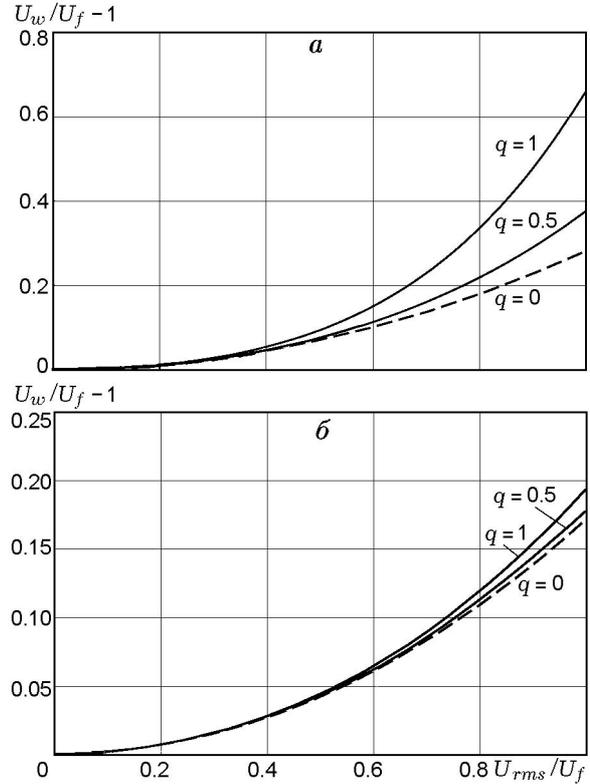


Рис. 7. Зависимость относительного увеличения скорости от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости в случае фронта пламени конечной толщины при $\Theta = 7$, $\gamma = 2/3$, $N = 1000$ и $\lambda_t/\lambda_c = 1$ (а), $\lambda_t/\lambda_c = 4$ (б)

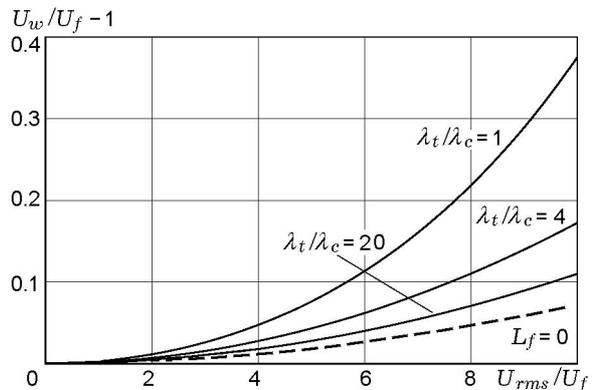


Рис. 8. Зависимость относительного увеличения скорости от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости при $\Theta = 7$, $q = 0.5$, $\gamma = 2/3$, $N = 1000$ и различных значениях интегрального масштаба турбулентности

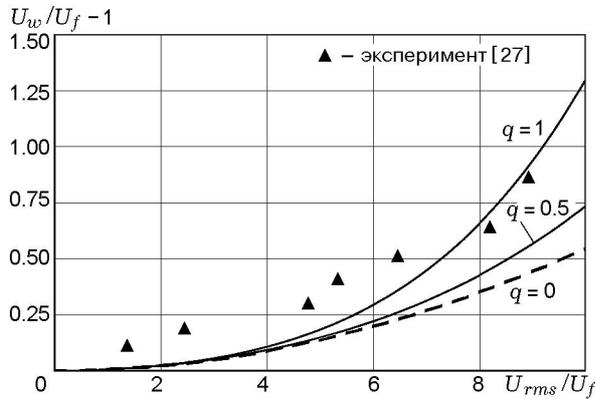


Рис. 9. Зависимость относительного увеличения скорости фронта пламени конечной толщины от безразмерной среднеквадратичной турбулентной скорости при $\lambda_t/\lambda_c = 1$, $\Theta = 7.66$, $\gamma = 2/3$, $N = 1000$ и различных амплитудах пульсаций

саций $q = 0.5$ при масштабах турбулентности $\lambda_t/\lambda_c = 1, 4, 20$ и $L_f = 0$. Кривые на рис. 8 заметно отличаются, но это отличие обусловлено вариациями множителя C_1 , а не пульсациями во времени.

Наконец, сравним результаты данной теории с экспериментальными данными. Для этого нужно перейти от двумерной геометрии, используемой в этом параграфе, к трехмерной, умножив результат (68) на 2 в соответствии с [1]. На рис. 9 представлены результаты проведенных нами расчетов и экспериментов [27], выполненных для смеси пропана с воздухом при коэффициенте избытка воздуха $\phi = 0.9$ и атмосферном давлении. Эти эксперименты особенно интересны, поскольку в них ДЛ-неустойчивость подавляется теплопроводностью, что соответствует потоку с λ_t , близким к λ_c . Как было получено выше, случай $\lambda_t/\lambda_c = 1$ наиболее интересен при изучении влияния пульсаций турбулентного потока во времени. Используя теорию [16] и экспериментальные данные [28], можно вычислить длину волны отсечки ДЛ-неустойчивости в этом случае как $\lambda_c = 0.31$ см при $\Theta = 7.66$. Такая оценка для λ_c не согласуется с работой [27], авторы которой утверждают, что в их экспериментах ДЛ-неустойчивость стабилизируется при атмосферном давлении. В экспериментах [27] использовалось бунзеновское пламя с выходным диаметром трубы 2 см. Выбирая этот диаметр трубы в качестве внешней отсечки ДЛ-неустойчивости (λ_{max}), мы видим,

что он существенно больше полученной выше оценки для внутренней длины волны отсечки (λ_c), т. е. эксперименты должны приводить к заметной неустойчивости. Кроме того, в работе [27] не приводится информация об интегральном масштабе турбулентности (λ_t), и приходится выбирать его сравнимым с λ_{max} . Однако до сих пор существует значительная неопределенность при вычислениях λ_c , связанная с разногласиями при измерении числа Маркштейна для различных газовых смесей (см., например, [10]). По этой причине мы все-таки будем полагаться на утверждение авторов [27], что ДЛ-неустойчивость была стабилизирована в их экспериментах, так что λ_t было порядка λ_c . На рис. 9 приведены результаты экспериментов [27] и нашей теории для фиксированного коэффициента теплового расширения $\Theta = 7.66$, масштаба турбулентности, равного длине волны отсечки ДЛ-неустойчивости ($\lambda_t/\lambda_c = 1$), показателя степени $\gamma = 2/3$ и значений безразмерной частоты пульсаций $q = 0, 0.5, 1$. Наблюдается только качественное согласие между результатами эксперимента и кривой, соответствующей гипотезе Тейлора ($q = 0$). Напротив, кривая, построенная для $q = 1$, проходит достаточно близко к экспериментальным точкам. Таким образом, пульсации во времени могут быть одной из причин того, что теоретическая кривая, построенная в рамках гипотезы Тейлора, отклоняется от экспериментальных точек [27]. Однако возможны и другие объяснения [10]. Например, неопределенность в вычислениях длины волны отсечки для пропанового пламени может оказаться критичной при сравнении результатов эксперимента и теории. Кроме того, настоящая теория построена для пламен, свободно распространяющихся в трубах, в то время как эксперименты [27] были выполнены для наклонного бунзеновского пламени, что требует специальной интерпретации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изучалось влияние пульсаций турбулентного потока во времени на динамику горения. До сих пор турбулентное пламя в потоке, зависящем от времени, исследовалось только в искусственном пределе нулевого коэффициента теплового расширения при горении [11–13]. Главной целью данной работы была проверка, насколько критична гипотеза Тейлора для турбулентных пламен с реальными значениями коэффициента теплового

расширения. Был изучен случай слаботурбулентного пламени нулевой толщины, полученные результаты обобщены на случай сильно искривленного пламени, и, наконец, исследовано пламя малой, но конечной толщины. Показано, что пульсации турбулентного потока во времени слабо влияют на скорость пламени в случае реального коэффициента теплового расширения ($\Theta = 5 \div 10$), типичного для лабораторного и промышленного горения; это влияние гораздо слабее, чем в искусственном пределе $\Theta = 1$ [13]. Результаты настоящей работы свидетельствуют, что гипотеза Тейлора является разумным приближением при описании турбулентного горения. Еще одно замечание в пользу гипотезы Тейлора состоит в том, что отдельно взятая турбулентная гармоника в модели с пульсациями (4), (5) не удовлетворяет уравнению Эйлера, в отличие от стационарной модели (1), (2). Тем не менее, этот факт не может рассматриваться в качестве строгого доказательства гипотезы Тейлора, поскольку в общем случае нарушение баланса в уравнении Эйлера для одной гармоники может быть компенсировано другими модами турбулентного спектра и такая связь может помочь при определении безразмерной величины частоты пульсаций q .

Обнаружено, что роль пульсаций во времени становится значительной лишь в случае, когда масштаб турбулентности λ_t близок к длине волны отсечки ДЛ-неустойчивости λ_c . С этой точки зрения пульсации во времени могут быть важны при объяснении экспериментальных результатов [27]. В то же время следует быть осторожными при количественном сравнении настоящей теории и экспериментов [27], поскольку эксперименты [27] выполнялись в геометрии бунзеновского пламени и значение λ_c для течения в этих экспериментах не вполне определено.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Clavin P., Williams F. A.** Theory of premixed-flame propagation in large-scale turbulence // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 90, N 3. P. 589–604.
2. **Yakhot V.** Propagation velocity of premixed turbulent flames // *Combust. Sci. Technol.* 1988. V. 60. P. 191–214.
3. **Aldredge R. C.** Premixed flame propagation in a high-intensity, large-scale vortical flow // *Combust. Flame.* 1996. V. 106, N 1–2. P. 29–40.
4. **Helenbrook B. T., Law C. K.** The role of Landau-Darrieus instability in large-scale flows // *Combust. Flame.* 1999. V. 117, N 1–2. P. 155–169.
5. **Denet B.** Frankel equation for turbulent flames in the presence of a hydrodynamic instability // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 55, N 6. P. 6911–6916.
6. **Kagan L., Sivashinsky G.** Flame propagation and extinction in large-scale vortical flows // *Combust. Flame.* 2000. V. 120, N 1–2. P. 222–232.
7. **Dold J. W., Kerr O. S., Nikolova I. P.** Flame propagation through periodic vortices // *Combust. Flame.* 1995. V. 100, N 3. P. 359–366.
8. **Zaytsev M. L., Bychkov V. V.** Effect of the Darrieus — Landau instability on turbulent flame velocity // *Phys. Rev. E.* 2002. V. 66, N 2. Art. N 026310.
9. **Akkerman V. B., Bychkov V. V.** Turbulent flame and the Darrieus — Landau instability in a three-dimensional flow // *Combust. Theory Modelling.* 2003. V. 7, N 4. P. 767–794.
10. **Akkerman V. B., Bychkov V. V.** Velocity of weakly turbulent flames of finite thickness // *Combust. Theory Modelling.* 2005. V. 9.
11. **Denet B.** Possible role of temporal correlations in the bending of turbulent flame velocity // *Combust. Theory Modelling.* 1999. V. 3, N 3. P. 585–589.
12. **Ashurst W. T.** Flow-frequency effect upon Huygens front propagation // *Combust. Theory Modelling.* 2000. V. 4, N 2. P. 99–105.
13. **Bychkov V. V., Denet B.** Effect of temporal pulsations of a turbulent flow on the flame velocity // *Combust. Theory Modelling.* 2002. V. 6, N 2. P. 209–222.
14. **Pelce P., Clavin P.** Influence of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 124. P. 219–237.
15. **Bychkov V. V., Liberman M. A.** Dynamics and stability of premixed flames // *Phys. Rep.* 2000. V. 325, N 4–5. P. 115–237.
16. **Searby G., Clavin P.** Weakly turbulent, wrinkled flames in premixed gases // *Combust. Sci. Technol.* 1986. V. 46. P. 167–193.
17. **Aldredge R. C., Williams F. A.** Influence of wrinkled premixed-flame dynamics on large-scale, low-intensity turbulent flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 228. P. 487–511.
18. **Bychkov V. V.** Importance of the Darrieus-Landau instability for strongly corrugated turbulent flames // *Phys. Rev. E.* 2003. V. 68, N 6. Art. N 066304.
19. **Williams F. A.** *Combustion Theory.* Benjamin, CA, 1985.
20. **Denet B.** Pockets in turbulent premixed flames // *Combust. Theory Modelling.* 2001. V. 5, N 1. P. 85–95.
21. **Ishizuka S.** Flame propagation along the vortex axis // *Prog. Energy Combust. Sci.* 2002. V. 28. P. 477–542.

22. **Pocheau A.** Scale invariance in turbulent front propagation // *Phys. Rev. E*. 1994. V. 49, N 2. P. 1109–1122.
23. **Lee T. W., Lee S. J.** Direct comparison of turbulent burning velocity and flame surface properties in turbulent premixed flames // *Combust. Flame*. 2003. V. 132, N 3. P. 492–502.
24. **Гостинцев Ю. А., Истратов А. Г., Шуленгин Ю. В.** Автомодельный режим распространения свободного турбулентного пламени в перемешанных газовых смесях // *Физика горения и взрыва*. 1988. Т. 24, № 5. С. 60–70.
25. **Bradley D., Sheppard C. G. W., Woolley R., et al.** The development and structure of flame instabilities and cellularity at low Markstein numbers in explosions // *Combust. Flame*. 2000. V. 122, N 1–2. P. 195–209.
26. **Bradley D., Cresswell T. M., Puttock J. S.** Flame acceleration due to flame-induced instabilities in large-scale explosions // *Combust. Flame*. 2001. V. 124, N 4. P. 551–559.
27. **Kobayashi H., Kawabata Y., Maruta K.** Experimental study on general correlation of turbulent burning velocity at high pressure // *The Twenty-Seventh Intern. Symp. on Combustion*. The Combustion Inst., 1998. P. 941–948.
28. **Searby G., Quinard J.** Direct and indirect measurements of Markstein numbers of premixed flames // *Combust. Flame*. 1990. V. 82, N 3–4. P. 298–311.

*Поступила в редакцию 26/IV 2004 г.,
в окончательном варианте — 18/II 2005 г.*
