

УДК 533.6.011.72, 533.6.011.5

Экстремальные ударно-волновые системы в задачах внешней сверхзвуковой аэродинамики

В.Н. Усков¹, М.В. Чернышов²

¹*Балтийский государственный технический университет «Военмех»,
Санкт-Петербург*

²*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

E-mail: chernyshov@npo-sm.ru

Теоретически исследуются стационарные ударно-волновые системы (последовательности скачков уплотнения, изэнтропных волн разрежения и сжатия), возникающие при плоском обтекании тел сверхзвуковым потоком совершенного невязкого газа. Для модельных задач сверхзвуковой аэродинамики (обтекание одиночной пластины, пластины с передним щитком, многоугольных профилей) аналитически и численно найдены области существования рассматриваемых ударно-волновых систем, определены параметры систем, доставляющих экстремумы силовых и тепловых нагрузок, а также аэродинамических коэффициентов обтекаемых тел.

Ключевые слова: ударно-волновые системы, сверхзвуковое обтекание, взаимодействие скачков уплотнения и волн Прандтля–Майера.

Введение

Оптимальные ударно-волновые системы (последовательности ударных и изэнтропных волн, доставляющие экстремум оптимизируемого комплекса параметров потока, соответствующий наилучшему решению поставленной технической задачи при заданных конструктивных ограничениях) впервые исследованы Г.И. Петровым [1–3] и, независимо от него, К. Осватичем [4, 5] при анализе последовательности косых скачков уплотнения с замыкающим прямым скачком, тормозящим поток до дозвуковой скорости во входном диффузоре сверхзвукового воздухозаборника с наименьшими потерями полного давления. Позднее было аналитически доказано [6] существование и определены параметры ударно-волновых систем с экстремальными значениями статического и полного давлений, плотности, температуры, акустического импеданса и скоростного напора течения за ними, в том числе при ограничениях на суммарный угол поворота потока на скачках и в волнах [7–10]; найдены системы скачков и волн, обеспечивающие максимальный суммарный угол поворота потока [11]; определены экстремальные тройные конфигурации, возникающие при взаимодействии скачков уплотнения между собой и их нерегулярном отражении [12].

Ударно-волновые системы, образующиеся на сторонах несущих тел в сверхзвуковом потоке газа, подлежат исследованию и оптимизации по целевым функциям, выражающим аэродинамические коэффициенты обтекаемого тела, силовые и тепловые нагрузки на его элементы. Математический аппарат теории взаимодействия газодинамических разрывов [13],

известные соотношения на скачках уплотнения и волнах Прандтля–Майера [13, 14] позволяют определить системы, доставляющие экстремальные значения рассматриваемых функций, и соответствующие им геометрические параметры обтекаемых тел.

На примерах модельных задач (обтекание одиночной пластины, пластины с передним щитком, треугольных и ромбических профилей потоком совершенного невязкого газа) в настоящей работе определены ударно-волновые системы, доставляющие экстремум целевых функций, имеющих прикладное значение в задачах аэродинамики крыла и профиля; приведены аналитические решения, описывающие параметры экстремальных систем.

1. Основные соотношения

Элемент стационарной ударно-волновой системы (скачок уплотнения s_i или волна Прандтля–Майера r_i) характеризуется своей интенсивностью $J_i = p_i/p$ — отношением статических давлений за скачком или волной (p_i) и непосредственно перед ним (p). Интенсивность J_i скачка уплотнения s_i (например, скачка s_1 на рис. 1, а) связана с углом σ_i его наклона к направлению течения:

$$J_i = (1 + \varepsilon)M^2 \sin^2 \sigma_i - \varepsilon, \quad (1)$$

где M — число Маха перед скачком, $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ — функция показателя адиабаты газа ($\gamma = 1,4$ во всех приведённых ниже примерах расчетов).

Центрированная волна разрежения Прандтля–Майера, образующаяся вокруг точки излома обтекаемой поверхности (например, волна r_2 на рис. 1, а), представима в виде веера прямолинейных акустических характеристик первого (на верхней стороне тела) или второго (на нижней стороне) семейства. Произвольная (k -я) прямолинейная характеристика наклонена под углом Маха $\alpha_k = \arcsin(1/M_k)$ к каждой проходящей через нее линии тока. Уравнения криволинейных акустических характеристик (AA_k , рис. 1, а) записываются в полярной системе координат с началом в центре волны (точке излома линии тока, обтекающей тело):

$$\frac{r_k}{r} = \left(\frac{M^2 - 1}{M_k^2 - 1} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + \varepsilon(M_k^2 - 1)}{1 + \varepsilon(M^2 - 1)} \right)^{1 + \varepsilon/4\varepsilon}, \quad (2)$$

где M — число Маха перед волной, M_k — местное число Маха в данной точке, r и r_k — расстояния от центра волны до начальной (A) и данной (A_k) точек на рассматриваемой криволинейной характеристике.

Число Маха M_i за изоэнтропной волной разрежения r_i определяется ее интенсивностью:

$$J_i = \pi(M_i)/\pi(M), \quad (3)$$

откуда

$$M_i = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) J_i^{1/\gamma} - 1 \right]},$$

или углом β_i поворота потока в ее веере характеристик:

$$\beta_i = \chi[\omega(M_i) - \omega(M)], \quad (4)$$

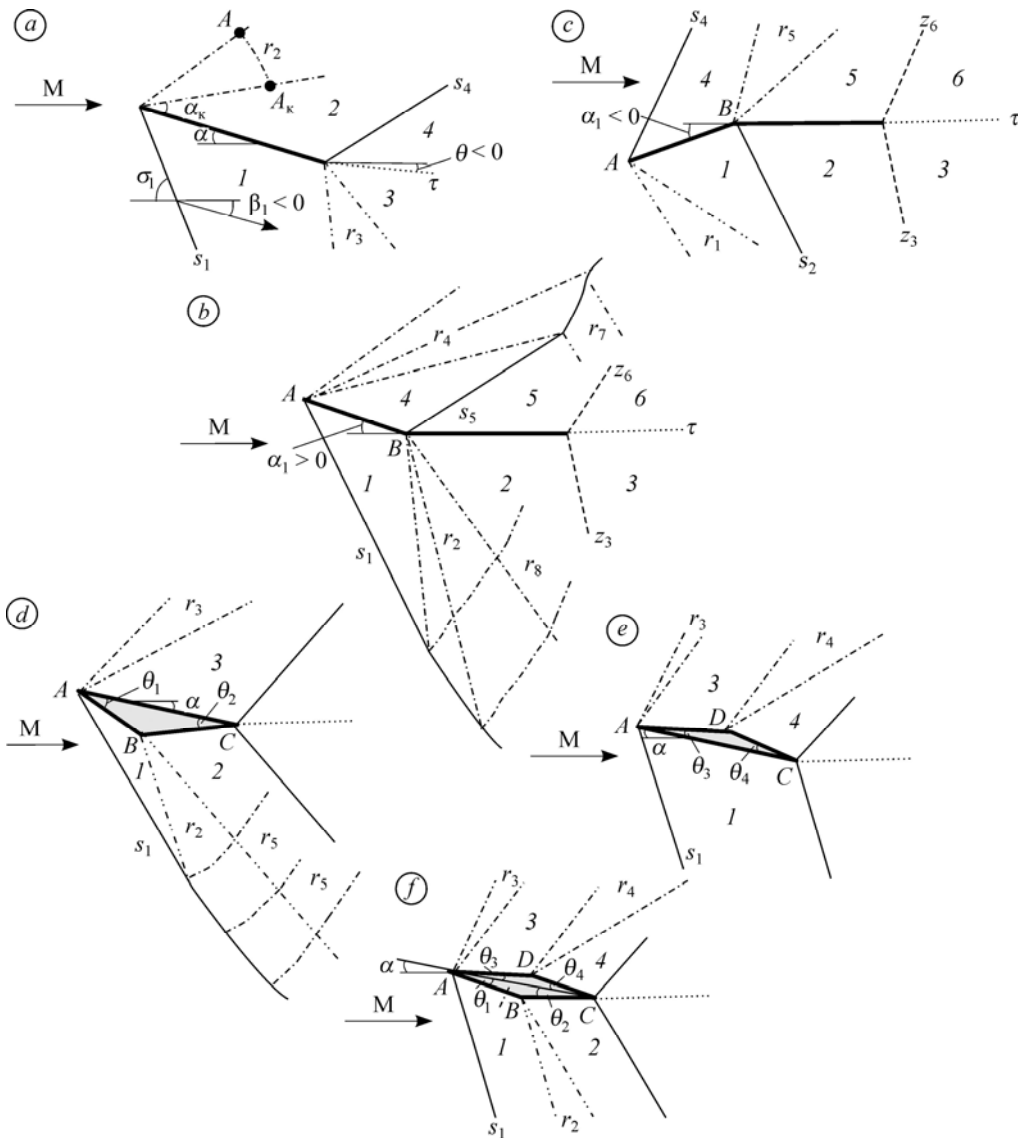


Рис. 1. Ударно-волновые системы на сторонах обтекаемых тел.

a — одиночная пластина в сверхзвуковом потоке, *b, c* — пластины с передним щитком, наклоненным под положительным (*b*) и отрицательным (*c*) углами атаки, *d, e* — треугольные профили с нижней (*d*) и верхней (*e*) угловыми точками, *f* — выпуклый четырехугольный профиль; *l* — области равномерного течения за скачками s_1 – s_6 (r_1 – r_6), характеризующиеся числами Маха M_i , $i = 1, \dots, 6$, давлениями газа p_i , температурами T_i и другими параметрами.

где $\chi = \pm 1$ соответственно на верхней и нижней сторонах тела, $\pi(M) = (1 + (\gamma - 1)M^2/2)^{-\gamma/(\gamma-1)}$ — функция давления в изоэнтропном течении, $\omega(M) = 1/\sqrt{\varepsilon} \arctg \sqrt{\varepsilon(M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}$ — функция Прандтля–Майера.

Интенсивность скачка уплотнения и угол поворота потока на его поверхности связаны соотношением

$$\beta_i = \beta_\sigma(M, J) = \chi \arctg \left[\sqrt{\frac{J_m(M) - J}{J_i + \varepsilon} \frac{(1 - \varepsilon)(J_i - 1)}{J_m(M) - (1 - \varepsilon)(J_i - 1)}} \right], \quad (5)$$

где $J_m(M) = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon$ — интенсивность прямого скачка, образующегося в потоке с числом Маха M . Углы β_i поворота потока на скачках и волнах в задачах внешней аэродинамики, как правило, определяются формой обтекаемых тел и их расположением относительно невозмущенного потока (к примеру, $\beta_1 = \beta_2 = -\alpha$, где β_1 и β_2 — углы поворота потока на скачке s_1 и в волне r_2 , а α — угол атаки пластины, показанной на рис. 1, а).

Соотношениями (3–5) определяются изомахи (поляры) скачков уплотнения и волн разрежения — множества векторов $(\Lambda_i = \ln J_i, \beta_i)$, соответствующие всем возможным волнам и скачкам, образующимся в потоке с данным числом Маха. Изомахи (поляры) скачков и волн, образующихся в невозмущенном потоке, выходят из начала координат на плоскости интенсивности волн (Λ, β) . Таковы, например, кривые I и II (рис. 2), точки 1 и 2 на которых отображают параметры скачка s_1 и волны r_2 в невозмущенном течении с числом Маха M .

Для скачков и волн, расположенных в потоке с давлением p_j и углом течения θ , соответствующие кривые на плоскости интенсивностей волн начинаются с точки $(\Lambda = \ln(p_j/p), \theta)$, где p — статическое давление в невозмущенном потоке. По этой причине, например, кривые III и IV, отображающие на рис. 2 соответственно множества волн разрежения за скачком s_1 и скачков уплотнения за волной r_2 , начинаются с точек $(\Lambda_1, -\alpha)$ и $(\Lambda_2, -\alpha)$, где α — угол атаки пластины.

Свойства скачков и волн, расположенных на задних кромках обтекаемых тел (например, волны r_3 и скачка s_4), определяются обычными условиями равенства статических давлений и сонаправленности потоков на сторонах сходящего с кромки тангенциального разрыва τ :

$$\sum_{z_i \in Z_u} \Lambda_i = \sum_{z_j \in Z_l} \Lambda_j, \quad \sum_{z_i \in Z_u} \beta_i = \sum_{z_j \in Z_l} \beta_j, \quad (6)$$

где Z_u и Z_l — множества всех элементов (z_i и z_j) ударно-волновых систем (скачков уплотнения s_i и s_j , волн разрежения r_i и r_j), образующихся соответственно на верхней (z_i) и нижней (z_j) сторонах. Решения системы (6), если они существуют, графически

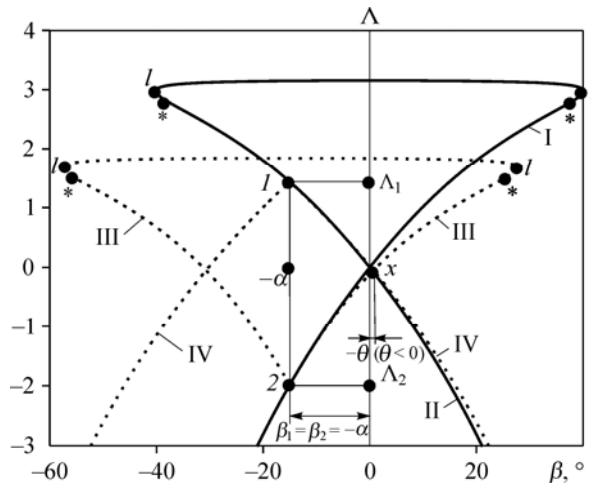


Рис. 2. Решение задачи о распаде разрыва давления на задней кромке одиночной пластины.

I и II — поляры скачка уплотнения и волны разрежения на передней кромке, III и IV — поляры волны и скачка на задней кромке пластины; точка x соответствует параметрам течения за задней кромкой; $M = 4,5$, $\alpha = 15^\circ$.

отображаются пересечением соответствующих изомах (например, точкой x — пересечения кривых III и IV на рис. 2, характеризующей распад разрыва давления на задней кромке показанной на рис. 1, a одиночной пластины).

Нулевое значение производной

$$\dot{\beta}_\sigma(M, J_i) = \frac{\partial \beta_\sigma(M, J_i)}{\partial J_i} = \frac{(1-\varepsilon)\chi \left[(J_i+1+2\varepsilon)(M^2-1) - (J_i-1)(J_i+2) \right]}{2\sqrt{(J_i+\varepsilon)(J_m-J_i)} \left[(J_i+\varepsilon)M^2 - (1-\varepsilon)(J_i^2-1) \right]} \quad (7)$$

определяет максимальный угол поворота потока с числом Маха M на одиночном скачке уплотнения

$$\beta_l(M) = \chi \operatorname{arctg} \left[\frac{(1-\varepsilon)(J_l+1+2\varepsilon)(J_l-1)^2}{2\sqrt{(1+\varepsilon J_l)(J_l+\varepsilon)^3}} \right],$$

соответствующую интенсивность скачка

$$J_l(M) = \frac{M^2-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2-2}{2}\right)^2 + (1+2\varepsilon)(M^2-1) + 2}$$

и точки “ l ”, в которых касательные к ударным изомахам вертикальны на плоскости интенсивностей волн.

Максимальный угол $\beta_{lw}(M)$ поворота потока в волне разрежения определяется зависимостью

$$\beta_{lw}(M) = \frac{\pi}{2} \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} - \omega(M).$$

При этом

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \beta_{lw}(M) = 0, \quad \lim_{M \rightarrow 1} \beta_{lw}(M) = \pi(1-\sqrt{\varepsilon})/2\sqrt{\varepsilon}.$$

Число Маха за скачком уплотнения зависит от интенсивности скачка и числа Маха перед ним:

$$M_i = \sqrt{\frac{(J_i+\varepsilon)M^2 - (1-\varepsilon)(J_i^2-1)}{J_i(1+\varepsilon J_i)}}. \quad (8)$$

Совместно с выражениями (3) и (5) условие $M_i=1$ определяет параметры скачков с критической скоростью течения за ними (отображаемые символами “*” на плоскости интенсивностей волн):

$$J_*(M) = \frac{M^2-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2-1}{2}\right)^2 + \varepsilon(M^2-1) + 1},$$

$$\beta_*(M) = \chi \operatorname{arctg} \left[\frac{(1-\varepsilon)\sqrt{(J_*-1)^3}}{(2J_*-1+\varepsilon)\sqrt{1+\varepsilon J_*}} \right].$$

Зависимости $|\beta_l(M)|$, $|\beta_{lw}(M)|$ и $|\beta_*(M)|$ показаны соответственно кривыми 1–3 на рис. 3. Равенство $\beta_l(M) = \beta_{lw}(M)$ достигается при $M = M_a = 6,4119$, а равенство $\beta_*(M) = \beta_{lw}(M)$ имеет место при $M = M_b = 6,4123$.

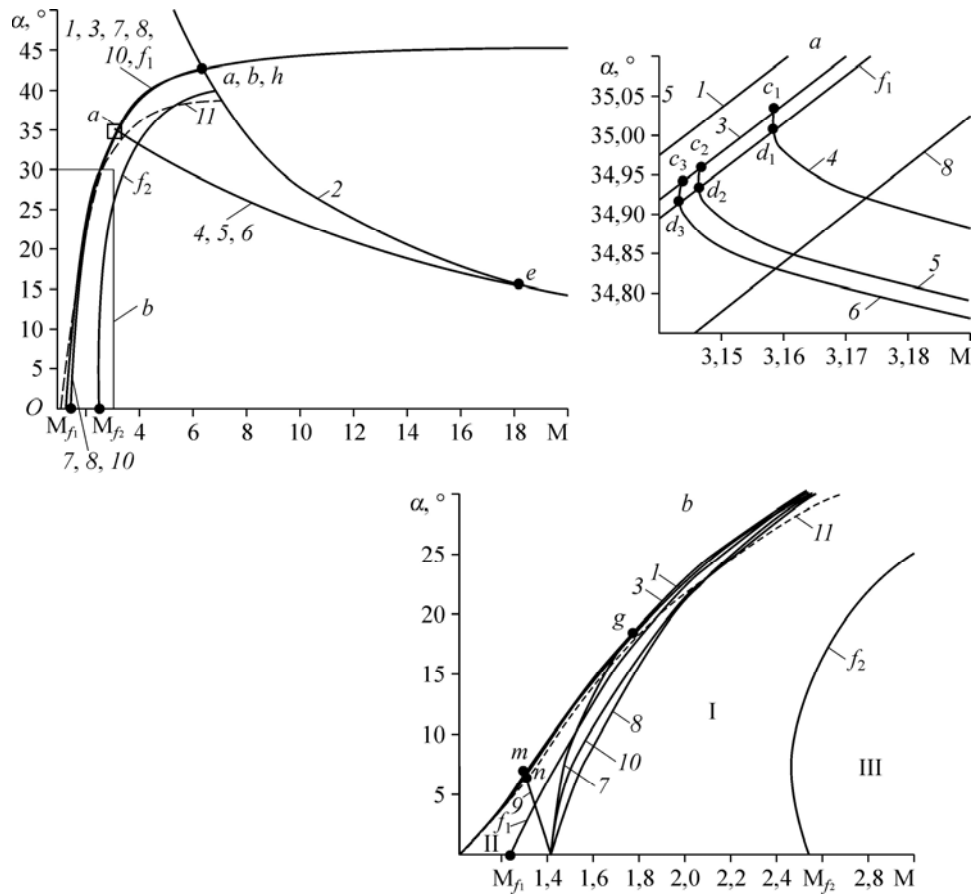


Рис. 3. Параметры экстремальных ударно-волновых систем на плоскости «число Маха невозмущенного потока — угол атаки обтекаемого тела».

Соотношения плотностей ($E_i = \rho_i/\rho$) и температур газа ($\Theta_i = T_i/T$) для элементов ударно-волновых систем в потоке идеального газа записываются в следующей форме:

$$E_i = \frac{J_i + \varepsilon}{1 + \varepsilon J_i}, \quad \Theta_i = \frac{J_i}{E_i} = \frac{J_i(1 + \varepsilon J_i)}{J_i + \varepsilon} \quad \text{— на сторонах скачка уплотнения и}$$

$$E_i = J_i^{1/\gamma}, \quad \Theta_i = \frac{J_i}{E_i} = J_i^{(\gamma-1)/\gamma} \quad \text{— в волне Прандтля–Майера.}$$

Давление (p_k), плотность (ρ_k) и температура (T_k) газа на k -й стороне кусочно-линейного профиля рассчитываются следующим образом:

$$p_k = p \prod_{z_i \in Z_k} J_i, \quad \rho_k = \rho \prod_{z_i \in Z_k} E_i, \quad T_k = T \prod_{z_i \in Z_k} \Theta_i, \quad (9)$$

где p , T и ρ — соответствующие параметры невозмущенного течения, Z_k — множество всех скачков ($z_i \equiv s_i$) и волн ($z_i \equiv r_i$), преодолеваемых линией тока перед обтеканием k -й стороны профиля.

Безразмерные коэффициенты давления на сторонах обтекаемого профиля

$$c_{p_k} = \frac{p_k - p}{\rho V^2 / 2} = \frac{2}{\gamma M^2} \left(\prod_{z_i \in Z_k} J_i - 1 \right) \quad (10)$$

определяют аэродинамические коэффициенты нормальной силы

$$c_N = -(1/L) \sum_k \chi_k c_{p_k} l_k \cos \theta_k, \quad (11)$$

подъемной силы

$$c_y = -(1/L) \sum_k \chi_k c_{p_k} l_k \cos \psi_k \quad (12)$$

и силы лобового сопротивления

$$c_x = -(1/L) \sum_k \chi_k c_{p_k} l_k \sin \psi_k, \quad (13)$$

воздействующих на профиль в целом. В соотношениях (10–13) V — скорость набегающего потока, L — хорда профиля, l_k — длина его k -й стороны, ψ_k и θ_k — углы, образованные k -й стороной с направлением невозмущенного течения и с хордой профиля, соответственно.

Соотношения (9–13) справедливы, если отсутствует влияние скачков и волн, отраженных в результате взаимодействия догоняющих элементов ударно-волновых систем (например, волны r_7 , рис. 1, *b*), на обтекаемый профиль. Кроме того, углы поворота потока в точках излома не должны превышать предельных значений: $\beta_l(M_{i-1})$ при образовании присоединенного скачка уплотнения и $\beta_{lv}(M_{i-1})$ для волны разрежения (здесь M_{i-1} — число Маха перед скачком или волной).

2. Одиночная пластина в сверхзвуковом потоке

В простейшем модельном случае обтекания бесконечно тонкой пластины потоком совершенного невязкого газа ([15, 16], рис. 1, *a*) представляют интерес условия существования ударно-волновых систем $\{s_1, r_3\}$ и $\{r_2, s_4\}$ на сторонах пластины. Предельные углы поворота потока на скачке s_1 и в волне r_2 ограничивают рассматриваемый диапазон углов атаки

$$|\alpha| \leq \min[\beta_l(M), \beta_{lv}(M)] \quad (14)$$

областью под кривыми 1 и 2 (рис. 3). В дальнейшем, для определенности, угол атаки пластины считается положительным. Более строгое ограничение

$$|\alpha| \leq \min[\beta_*(M), \beta_{lv}(M)] \quad (15)$$

необходимо для существования сверхзвукового потока перед волной разрежения r_3 . Условия (14) и (15) практически идентичны при больших числах Маха (к примеру, координаты точки *a* пересечения кривых 1 и 2: $M_a = 6,4119$, $\alpha_a = 42,820^\circ$, а координаты точки *b* пересечения кривых 2 и 3: $M_b = 6,4123$, $\alpha_b = 42,817^\circ$).

Условие (15) не является достаточным для существования решения задачи о распаде разрыва давления на задней кромке пластины с образованием волны r_3 и скачка s_4 . Система уравнений (6) для тангенциального разрыва τ , для данного случая записывается в форме

$$J_1 J_3 = J_2 J_4, \quad \beta_1 + \beta_3 = \beta_2 + \beta_4 = \theta, \quad \beta_1 = \beta_2 = -\alpha, \quad (16)$$

имеет решение лишь в области, ограниченной кривыми 3, 4 и 2 (контур Oc_1d_1e , где точка O соответствует принятому началу координат на рис. 3, $M_{c_1} = 3,159$, $\alpha_{c_1} = 35,032^\circ$, $M_{d_1} = 3,158$, $\alpha_{d_1} = 35,013^\circ$, $M_e = 18,057$, $\alpha_e = 15,777^\circ$).

Условие принадлежности присоединенного скачка уплотнения s_4 к нижней ветви соответствующей ударной поляры выражается в форме дополнительного ограничения на решения системы (16):

$$J_4 \leq J_l(M_2),$$

где M_2 — число Маха в области 2 за волной r_2 на рис. 1, а. Верхняя граница области существования рассматриваемых ударно-волновых систем соответствует тогда кривым 3, 5 и 2 (контур Oc_2d_2e , где $M_{c_2} = 3,147$, $\alpha_{c_2} = 34,960^\circ$, $M_{d_2} = 3,146$, $\alpha_{d_2} = 34,941^\circ$) на рис. 3. Более сильное требование сверхзвуковой скорости течения за задней кромкой пластины (на обеих сторонах тангенциального разрыва τ)

$$J_4 \leq J_*(M_2)$$

сводит верхнюю границу области существования решения к кривым 3, 6 и 2 (контур Oc_3d_3e , где $M_{c_3} = 3,144$, $\alpha_{c_3} = 34,941^\circ$, $M_{d_3} = 3,143$, $\alpha_{d_3} = 34,923^\circ$).

Угол θ скоса потока за задней кромкой в зависимости от параметров задачи (числа Маха M и угла атаки α), может быть не только отрицательным (как постулировано в работе [15] и показано на рис. 1, а), но и положительным (разрыв τ в этом случае направлен вверх). При небольших углах атаки пластины угол скоса потока за ней является величиной четвертого порядка малости:

$$\theta = K(M)\alpha^4 \operatorname{sign} \alpha,$$

причем $K(M) < 0$ при $M < \sqrt{2}$ и $K(M) > 0$ при $M > \sqrt{2}$. При $M = \sqrt{2}$ угол скоса потока за пластиной убывает пропорционально α^6 .

Зависимость $\theta(\alpha)$ при произвольных положительных углах атаки пластины показана на рис. 4. Угол скоса потока, определяемый решениями системы (12), неполюжителен при $M \leq \sqrt{2}$ (рис. 4, а), может быть положителен при $M > \sqrt{2}$ (рис. 4, б) и всегда неотрицателен при $M > M_g$ ($M_g = 1,775$, $\alpha_g = 18,312^\circ$, см. рис. 4, с). В диапазоне чисел Маха $M_{d_1} < M < M_{c_1}$ область определения функции $\theta(\alpha)$ распадается на два промежутка (рис. 4, д). Значения функции $\theta(\alpha)$ на внешних границах (точки p и r) возникающего промежутка отсутствия решения конечны и относительно невелики, хотя в силу касания поляр, соответствующих волне r_3 и скачку s_4 , производные $d\theta/d\alpha$ при приближении к точкам p и r слева и справа соответственно стремятся к бесконечным значениям. Лишь при $M > M_e$ угол скоса потока является монотонно возрастающей функцией угла атаки (рис. 4, ф), хотя уже при числах Маха $M \approx 4$ максимум этой функции (точка t на рис. 4, е) находится крайне близко к границам области ее определения.

Углы атаки пластины, обеспечивающие нулевой скос потока за ее задней кромкой, показаны на рис. 3 кривой 7.

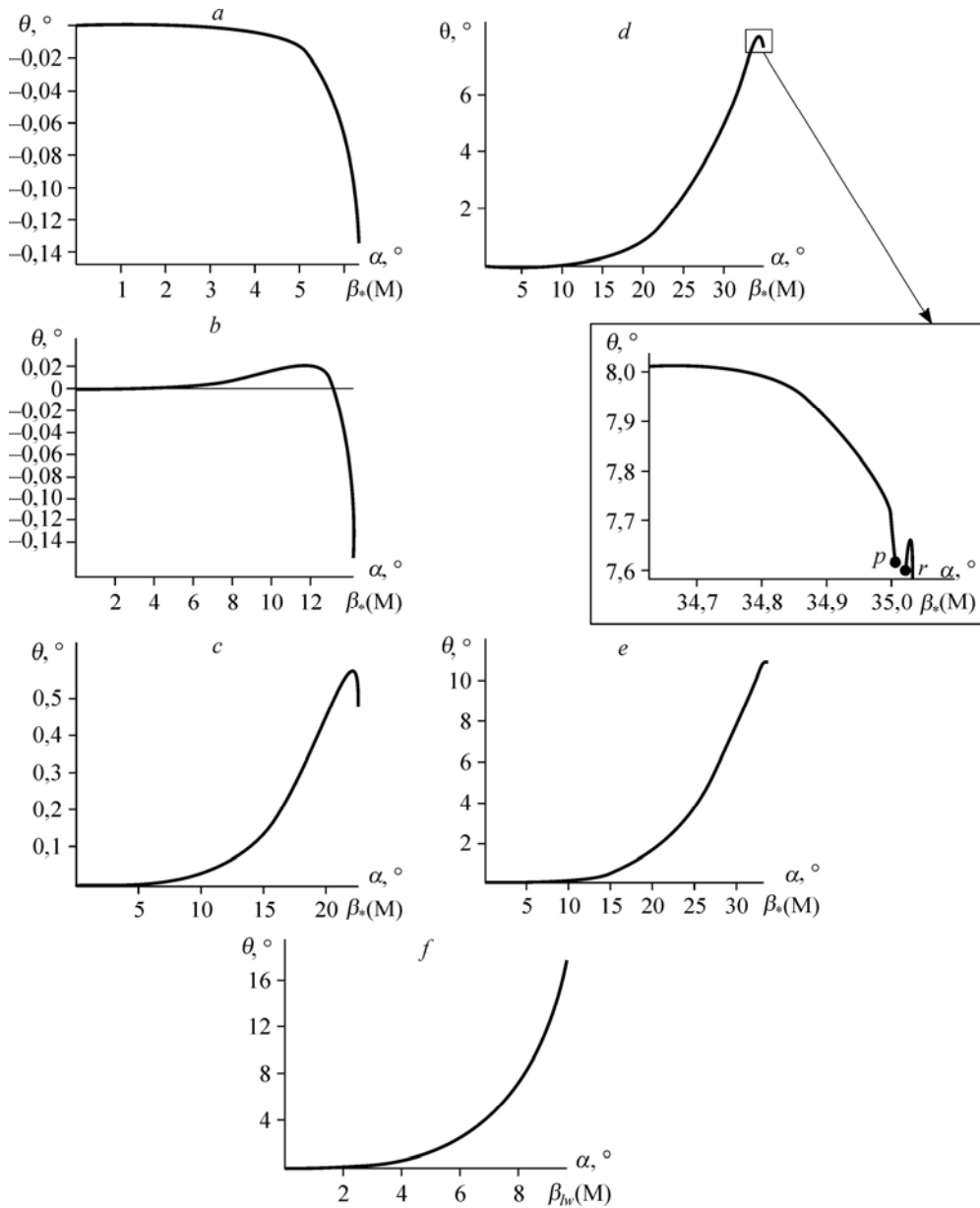


Рис. 4. Зависимость угла скоса потока от угла атаки одиночной пластины.

$a - M \leq \sqrt{2}$ ($M = 1,3$), $b - \sqrt{2} < M < M_g$ ($M = 1,6$), $c - M_g < M < M_{c1}$ ($M = 2$), $d - M_{c1} < M < M_d$ ($M = 3,1583$),
 $e - M > M_{d1}$ ($M = 4$), $f - M > M_e$ ($M = 20$).

Скос потока на задней кромке достаточно велик при больших числах Маха и углах атаки: к примеру, $\theta_e = 29,808^\circ$ при $M_e = 18,057$ и $\alpha_e = 15,777^\circ$, т. е. угол наклона тангенциального разрыва, направленного вверх, в данном случае почти вдвое превосходит угол атаки пластины.

Силовое воздействие сверхзвукового потока на одиночную пластину характеризуется безразмерной разностью давлений

$$B(M, \alpha) = (p_1 - p_2)/p = J_1(M, \beta_1) - J_2(M, \beta_2), \quad \beta_1 = \beta_2 = -\alpha,$$

которая монотонно возрастает при увеличении угла атаки. Давления на сторонах пластины, установленной под постоянным углом атаки ($\alpha = \text{const}$), при изменении числа Маха ведут себя немонотонно. Интенсивность скачка s_1 ($J_1 = p_1/p$) минимальна (при постоянном значении α и переменном числе Маха) на кривой δ , описываемой уравнением

$$J_1 = M^2 - 1.$$

Начало кривой δ (при $\alpha \rightarrow 0$) соответствует значению числа Маха $M \rightarrow \sqrt{2}$. Увеличение числа Маха набегающего потока в области параметров задачи, лежащей слева от кривой δ , приводит к уменьшению, а справа — к увеличению интенсивности скачка s_1 и, соответственно, давления p_1 на нижнюю сторону пластины, если давление невозмущенного потока постоянно. Кривые 2 и δ пересекаются в точке h ($M_h = 6,4137$, $\beta_h = 42,809^\circ$).

Максимум давления ($p_2 = pJ_2$) на верхней стороне пластины, установленной под постоянным углом атаки, достигается при условии

$$\Gamma(M) = \Gamma(M_2), \quad (17)$$

где $\Gamma(M) = \gamma M^2 / \sqrt{M^2 - 1}$, M_2 — число Маха за волной, причем $M \leq \sqrt{2}$, а $M_2 \geq \sqrt{2}$. В области параметров задачи, расположенной слева от соответствующей условию (17) кривой δ , давление за волной r_2 возрастает, справа — падает при увеличении числа Маха. Кривая δ пересекается с границами 1 и 3 области существования рассматриваемых систем в точках m ($M_m = 1,313$, $\beta_m = 6,663^\circ$) и n ($M_n = 1,309$, $\beta_n = 6,923^\circ$) соответственно.

Безразмерная разность давлений на сторонах пластины $B(M, \alpha)$ — также немонотонная функция числа Маха течения. Минимальные значения этой функции соответствуют кривой 10, выходящей из точки $(\sqrt{2}, 0)$ и заканчивающейся в точке h на линии минимумов интенсивности скачка s_1 . Таким образом, аэродинамические силы, воздействующие на пластину, летящую под фиксированным углом атаки, немонотонно зависят от числа Маха полета, а их минимумы соответствуют кривой 10 на плоскости (M, α) . В отличие от аэродинамических сил, их коэффициенты, обратно пропорциональные квадрату скорости, при увеличении числа Маха монотонно уменьшаются.

3. Обтекание пластины с передним щитком

Пластина с плоским передним щитком AB (рис. 1, b, c) является простейшей моделью сверхзвукового крыла с предкрылком, а управление ее обтеканием осуществляется путем изменения угла α_1 атаки щитка.

Условия существования систем $\{z_1, z_2, z_3\}$ на нижней и $\{z_4, z_5, z_6\}$ на верхней стороне при произвольных углах атаки пластины и щитка численно исследованы в работах [17, 18]. Возможности оптимизации этих систем наиболее очевидны, когда угол атаки пластины равен нулю (рис. 1, b, c). Угол атаки щитка, необходимый для существования рассматриваемых ударно-волновых систем, в этом случае изменяется в пределах, заданных неравенством (15). Безразмерные разности статических давлений и температур на сторонах пластины

$$B_1 = (p_2 - p_5)/p = J_1 J_2 - J_4 J_5, \quad B_2 = (T_2 - T_5)/T = \Theta_1 \Theta_2 - \Theta_4 \Theta_5$$

при каждом фиксированном числе Маха невозмущенного потока являются нечетными функциями угла α_1 (см. рис. 5, $a-e$, и рис. 6, $a-e$). Первые и вторые производные этих

функций, а также безразмерных давлений и температур на каждой из сторон пластины в отдельности, равны нулю в точке $\alpha_1 = 0$:

$$\frac{dB_1}{d\alpha_1} = \frac{d(J_1J_2)}{d\alpha_1} = \frac{d(J_4J_5)}{d\alpha_1} = 0, \quad \frac{d^2B_1}{d\alpha_1^2} = \frac{d^2(J_1J_2)}{d\alpha_1^2} = \frac{d^2(J_4J_5)}{d\alpha_1^2} = 0,$$

$$\frac{dB_2}{d\alpha_1} = \frac{d(\Theta_1\Theta_2)}{d\alpha_1} = \frac{d(\Theta_4\Theta_5)}{d\alpha_1} = 0, \quad \frac{d^2B_2}{d\alpha_1^2} = \frac{d^2(\Theta_1\Theta_2)}{d\alpha_1^2} = \frac{d^2(\Theta_4\Theta_5)}{d\alpha_1^2} = 0.$$

Третьи производные

$$\frac{d^3B_1}{d\alpha_1^3} = 0, \quad \frac{d^3(J_1J_2)}{d\alpha_1^3} = \frac{d^3(J_4J_5)}{d\alpha_1^3} = \frac{(1+\varepsilon)M^6 \left[(1-4\varepsilon)M^4 - 4(1-2\varepsilon)M^2 + 4(1-\varepsilon) \right]}{4(1-\varepsilon)^3(M^2-1)^{7/2}}, \quad (18)$$

$$\frac{d^3B_2}{d\alpha_1^3} = 0, \quad \frac{d^3(\Theta_1\Theta_2)}{d\alpha_1^3} = \frac{d^3(\Theta_4\Theta_5)}{d\alpha_1^3} = \frac{(4-3M^2)\varepsilon M^8}{2(1-\varepsilon)^3(M^2-1)^{7/2}} \quad (19)$$

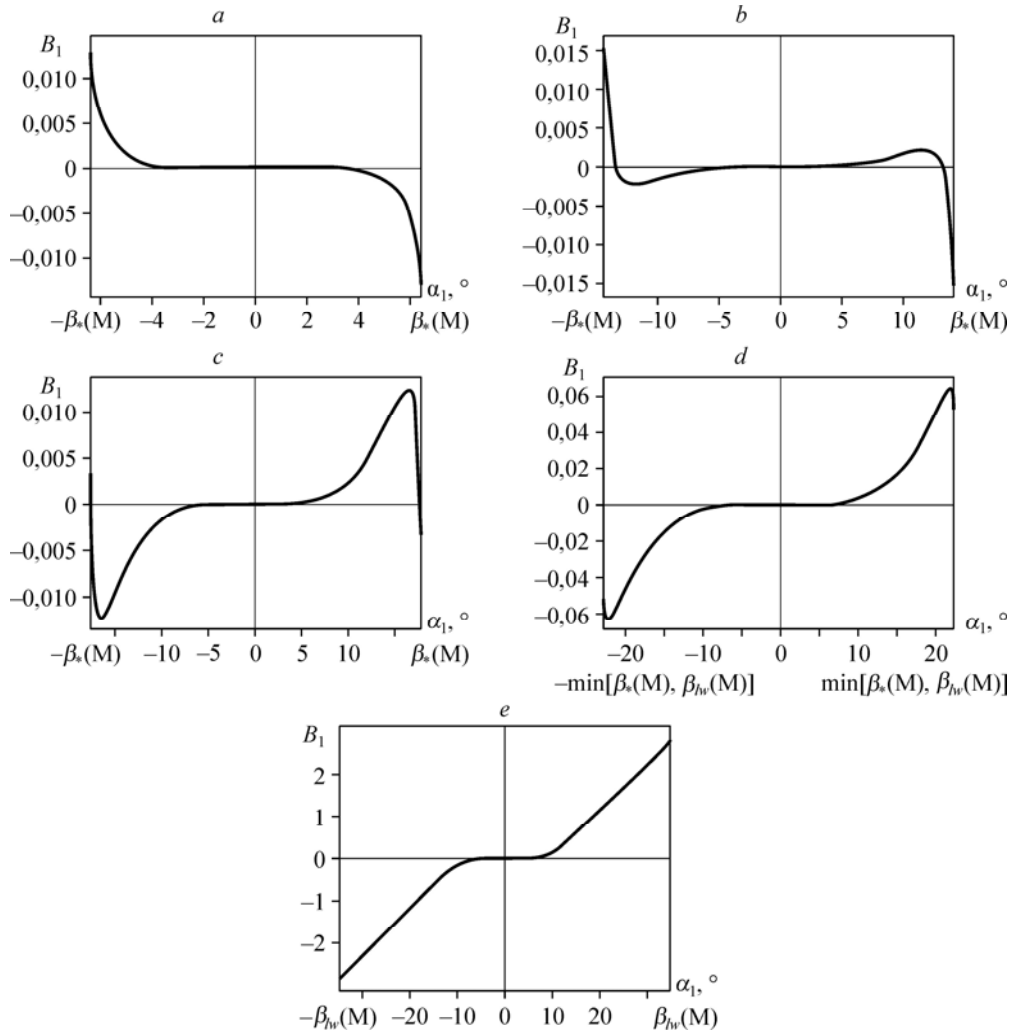
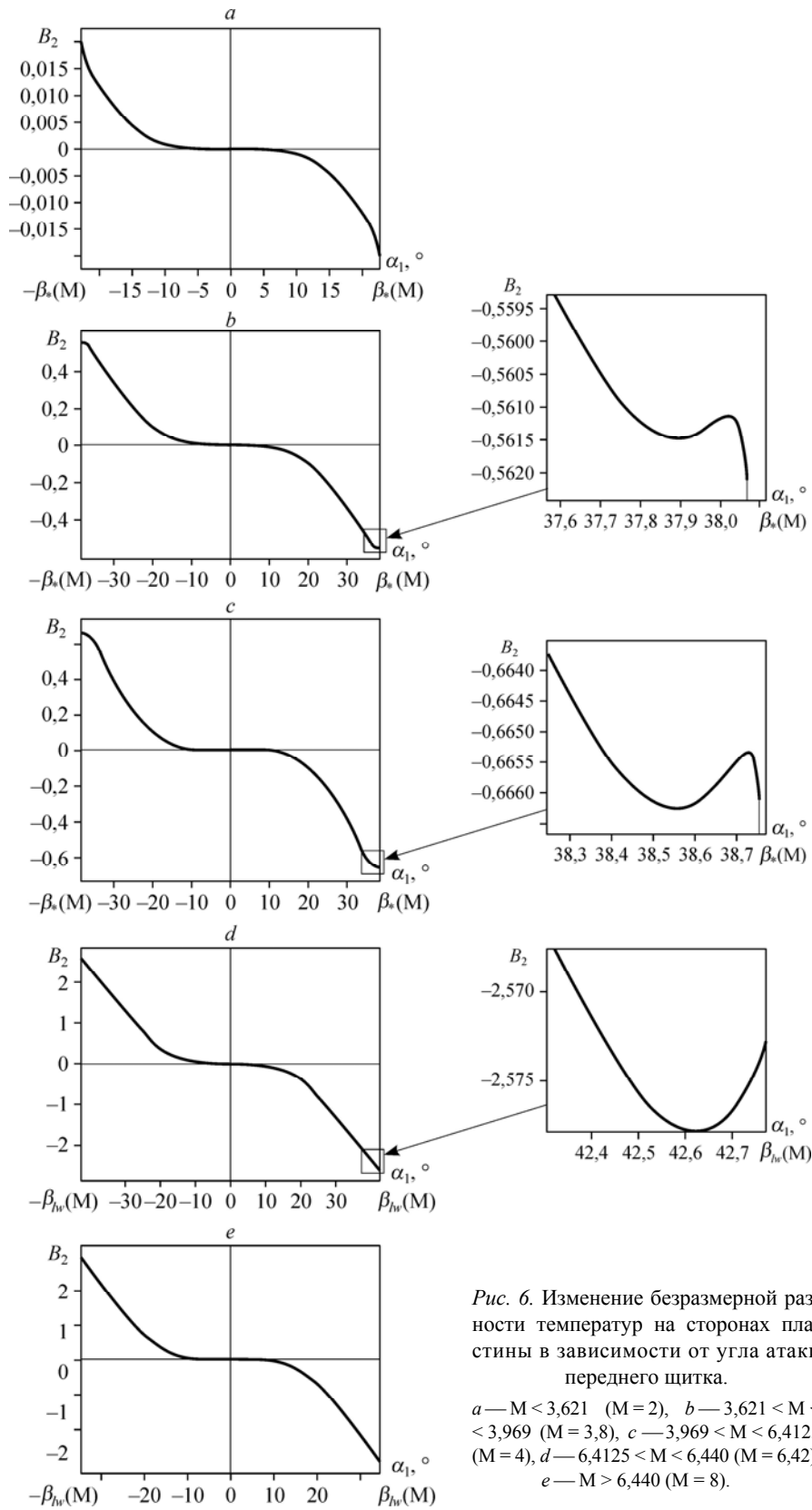


Рис. 5. Безразмерная разность давлений на пластине со щитком как функция угла атаки щитка.
 а — $M \leq \sqrt{2}$ ($M = 1,3$), б — $\sqrt{2} < M < 1,706$ ($M = 1,6$), в — $1,706 < M < M_g$ ($M = 1,75$), д — $M_g < M < 6,428$
 ($M = 2$), е — $M > 6,428$ ($M = 8$).



указывают на особенности изменения давления и температуры на каждой из сторон пластины, взятой в отдельности, при повороте щитка. В частности, согласно выражению (18), статические давления на обеих сторонах пластины при $M_{F_1} < M < M_{F_2}$ возрастают, а при $M < M_{F_1}$ и $M > M_{F_2}$ — убывают с увеличением угла атаки α_1 . Числа Маха M_{F_1} и M_{F_2} определяются соотношениями

$$M_{F_{1,2}} = \sqrt{\frac{2(1 \pm \sqrt{\varepsilon})}{1 \pm 2\sqrt{\varepsilon}}} \quad (20)$$

($M_{F_1} = 1,245$, $M_{F_2} = 2,540$). Данные выводы относительно изменения статического давления на каждой из сторон пластины соответствуют результатами теоретического анализа систем «скачок уплотнения и последующая волна разрежения», «волна разрежения и скачок уплотнения», изложенных в работах [7, 8]. Известные аналитические решения задач о взаимодействии скачка уплотнения с последующим или предшествующим догоняющим слабым разрывом [13] показывают, что слабые отраженные волны (r_7 , r_8 на рис. 1, *b*) противодействуют образованию экстремумов статического давления за ударно-волновыми системами. При увеличении давлений p_2 и p_5 на сторонах пластины в результате малого поворота щитка отраженные волны r_7 и r_8 осуществляют разрежение, а при уменьшении — сжатие потока.

Согласно соотношению (19), температуры газа на обеих сторонах обтекаемой пластины при $M < 2/\sqrt{3}$ возрастают, а при $M > 2/\sqrt{3}$ — убывают при небольшом увеличении угла атаки щитка.

Четвертые производные безразмерных разностей давлений и температур терпят разрыв в точке $\alpha_1 = 0$:

$$\frac{d^4 B_1}{d\alpha_1^4} = \frac{6(1+\varepsilon)M^6(M^2-2)(1+\varepsilon(M^2-1))[(1-2\varepsilon)M^4-2(1-2\varepsilon)M^2+2(1-\varepsilon)]}{(1-\varepsilon)^4(M^2-1)^5} \text{sign } \alpha_1,$$

$$\frac{d^4 B_2}{d\alpha_1^4} = -\frac{12\varepsilon M^8(M^2-2)^2(1+\varepsilon(M^2-1))}{(1-\varepsilon)^4(M^2-1)^5} \text{sign } \alpha_1. \quad (21)$$

Первая из них, совместно с результатами расчетов, свидетельствует об убывании разности давлений на пластине при $M \leq \sqrt{2}$ (рис. 5, *a*) и ее возрастании при $M > \sqrt{2}$ (рис. 5, *b–e*). Соотношение (21) указывает на убывание безразмерной разности температур как при $M < \sqrt{2}$, так и при $M > \sqrt{2}$ (рис. 6, *a–e*). При $M > \sqrt{2}$ функция $B_2(\alpha_1)$ убывает пропорционально α_1^6 .

Свойства функций $B_1(\alpha_1)$ и $B_2(\alpha_1)$ в окрестности точки $\alpha_1 = 0$ во многом определяют ее поведение и при ненулевых углах атаки щитка. Так, при $M > \sqrt{2}$ разность давлений на пластине монотонно убывает (рис. 5, *a*), после чего в точке $\alpha_1 = 0$ зарождается пара локальных экстремумов (рис. 5, *b*), которые становятся глобальными при $M = 1,706$ (рис. 5, *c*). Начиная с этого числа Маха, наибольшая разность давлений на пластине обеспечивается при положительных углах атаки щитка. При $M > M_g$ отрицательный угол α_1 больше не обеспечивает положительной разности давлений на пластине (рис. 5, *d*). При $M = M_b$ происходит смена активного ограничения в неравенстве (15),

определяющем диапазон углов атаки щитка, а при $M = 6,428$ внутренние экстремумы выходят за пределы области определения, после чего разность давлений окончательно становится монотонно возрастающей (рис. 5, *e*).

Безразмерная разность температур $B_2(\alpha_1)$, как правило, является убывающей функцией угла атаки щитка (рис. 6, *a-e*). При $M = 3,621$ и $\alpha_1 = \pm 37,258^\circ$ на ее графике образуются точки перегиба, которые распадаются на две пары внутренних экстремумов (рис. 6, *b*). При $M = 3,969$ внутренние экстремумы становятся глобальными (рис. 6, *c*), а числа Маха $M = 6,4125$ и $M = 6,440$ соответствуют их выходу за пределы промежутка определения функции.

Разности давлений и температур газа на пластине, расположенной под нулевым углом атаки, могут оказаться весьма существенными. Так, при $M = 4 \div 7$ найденные максимумы разности давлений в 2-3 раза превышают давление набегающего потока.

4. Аэродинамические коэффициенты многоугольных профилей

Согласно соотношениям (11–13), аэродинамические коэффициенты равнобедренного треугольного профиля с угловой точкой снизу от хорды (рис. 1, *d* при $\theta_1 = \theta_2 = \theta$) записываются в форме

$$c_N = \frac{1}{\gamma M^2} [J_1(1+J_2) - 2J_3], \quad (22)$$

$$c_y = \frac{1}{\gamma M^2 \cos \theta} [J_1(\cos(\alpha + \theta) + J_2 \cos(\alpha - \theta)) - 2J_3 \cos \alpha \cos \theta], \quad (23)$$

$$c_x = \frac{1}{\gamma M^2 \cos \theta} [J_1(\sin(\alpha + \theta) + J_2 \sin(\alpha - \theta)) - 2J_3 \sin \alpha \sin \theta].$$

Аэродинамические профили треугольного профиля ACD с угловой точкой C сверху от хорды ($\theta_3 = \theta_4 = \theta$, $\theta \leq \alpha$, рис. 1, *e*) определяются следующим образом:

$$c_N = \frac{1}{\gamma M^2} [2J_1 - J_3(1+J_4)], \quad (24)$$

$$c_y = \frac{1}{\gamma M^2 \cos \theta} [2J_1 \cos \alpha \cos \theta - J_3(\cos(\alpha - \theta) + J_4 \cos(\alpha + \theta))],$$

$$c_x = \frac{1}{\gamma M^2 \cos \theta} [2J_1 \sin \alpha \cos \theta - J_3(\sin(\alpha - \theta) + J_4 \sin(\alpha + \theta))];$$

у ромбовидного четырехугольного профиля $ABCD$, показанного на рис. 1, *d*, при $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta$ и $\theta \leq \alpha$

$$c_N = \frac{1}{\gamma M^2} [J_1(1+J_2) - J_3(1+J_4)], \quad (25)$$

$$c_y = \frac{1}{\gamma M^2 \cos \theta} [(J_1 - J_3 J_4) \cos(\alpha + \theta) + (J_1 J_2 - J_3) \cos(\alpha - \theta)],$$

$$c_x = \frac{1}{\gamma M^2 \cos \theta} [(J_1 - J_3 J_4) \sin(\alpha + \theta) + (J_1 J_2 - J_3) \sin(\alpha - \theta)].$$

Представляет определенный интерес поведение аэродинамических коэффициентов представленных профилей при изменении угла θ , характеризующего их относительную толщину. Задача на экстремум коэффициента нормальной силы (22) при ограничениях (3–5, 8), определяющих интенсивности скачков и волн, сводится к уравнению

$$1 + J_2 - 2J_1J_2\Gamma(M_2)\dot{\beta}_\sigma(M, J_1) - \frac{(1 + \varepsilon)J_2(J_1^2 + 2\varepsilon J_1 + 1)}{2(1 + \varepsilon J_1)(J_1 + \varepsilon)} \left(1 - \frac{\Gamma(M_2)}{\Gamma(M_1)} \right) = 0.$$

Производная $\dot{\beta}_\sigma(M, J_1)$ здесь определяется соотношением (7). При $\theta \rightarrow 0$ это уравнение упрощается и принимает вид

$$1 - J_1\Gamma(M_1)\dot{\beta}_\sigma(M, J_1) = 0,$$

или, в другой форме,

$$\mu(M) = 1 + \varepsilon(M^2 - 1) = L(N \mp P), \quad (26)$$

$$L = \frac{1 + \varepsilon J_1}{(1 + \varepsilon)(J_1(1 - 3\varepsilon) - 4\varepsilon^2)}, \quad N = J_1(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2, \quad P = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon J_1)(J_1 + \varepsilon)}.$$

Условию (26) соответствуют кривые f_i ($i = 1, 2$), разделяющие на рис. 3 параметры задачи с качественно разным изменением коэффициента c_N при утолщении профиля. Кривые f_i берут начало в точках F_i , определенных уравнением (20). Область I между этими кривыми соответствует монотонному росту коэффициента нормальной силы. В областях II и III коэффициент нормальной силы имеет минимум и при утолщении профиля сначала немного убывает. В частности, при $M = 3$ и $\alpha = 15^\circ$ коэффициент $c_N(\theta)$ убывает от значения $c_N = 0,40531$ при $\theta = 0$ до величины $c_N = 0,40526$ при $\theta = 0,256^\circ$. Дальнейшее утолщение профиля вновь приводит к росту нормальной силы.

Решение задачи на экстремум коэффициента подъемной силы (23) приводит к уравнению

$$\cos(\alpha + \theta) + J_2 \cos(\alpha - \theta) + J_1 \left[\frac{(J_2 - 1)\sin \alpha}{\cos \theta} - 2J_2\Gamma(M_2)\cos(\alpha - \theta) \right] \dot{\beta}_\sigma(M, J_1) - (1 - \varepsilon)J_2 \cos(\alpha - \theta)(J_1^2 + 2\varepsilon J_1 + 1)(1 - \Gamma(M_2)/\Gamma(M_1)) = 0,$$

которое при $\theta \rightarrow 0$ также преобразуется к виду (26) и определяет кривые f_i . Расчеты подтверждают, что коэффициент c_y при утолщении профиля изменяется качественно так же, как и коэффициент c_N . Таким образом, подъемная сила треугольного профиля с нижней угловой точкой нередко уменьшается при его утолщении.

Аналогично поставленная задача на экстремум коэффициента c_N (24) для треугольного профиля с верхней угловой точкой сводится к уравнению

$$\pi(M_3)\Gamma(M_3) = \pi(M_4)\Gamma(M_4),$$

которое не имеет решений, кроме тривиального ($M_3 = M_4$ при $\theta = 0$), поскольку функция $h(M) = \pi(M)\Gamma(M)$ монотонно убывает. Таким образом, утолщение треугольного профиля с верхней угловой точкой ведет к монотонному падению его нормальной, а также подъемной силы.

Определяемый соотношением (25) коэффициент c_N нормальной силы, действующей на ромбический профиль, экстремален, когда

$$1 + J_2 + [J_3 J_4 \Gamma(M_4) - J_3 \Gamma(M_3) - 2J_1 J_2 \Gamma(M_2)] \dot{\beta}_\sigma(M, J_1) - \frac{(1 + \varepsilon) J_2 (J_1^2 + 2\varepsilon J_1 + 1)}{2(1 + \varepsilon J_1)(J_1 + \varepsilon)} \left(1 - \frac{\Gamma(M_2)}{\Gamma(M_1)} \right) = 0.$$

При $\theta \rightarrow 0$ это условие также принимает форму (26). Аналогичны результаты анализа коэффициентов подъемной силы. Таким образом, поведение аэродинамических коэффициентов тонкого четырехугольного профиля бывает немонотонным и определяется свойствами ударно-волновых систем на его наветренной (нижней) стороне. В частности, при $M = 3$ и $\alpha = 15^\circ$ минимум коэффициента c_N имеет место при $\theta = 0,379^\circ$.

Немонотонное изменение коэффициентов c_N , c_y и тип волны r_5 , отражающейся при взаимодействии скачка j_1 и волны r_2 на нижней стороне треугольного (рис. 1, *d*) или четырехугольного профиля, связаны между собой. Согласно решению задач о взаимодействии скачка со слабым возмущением [13, 19], убыванию коэффициентов c_N и c_y при утолщении профиля соответствует течение сжатия в начале отраженной волны r_5 , и наоборот.

Штриховая кривая *ll* на рис. 3 соответствует падению головной характеристики волны r_5 , форма которой определяется из соотношений (1) и (2), на нижнюю кромку профиля. Небольшая ширина области между кривыми *3* и *ll*, на первой из которых течение за скачком s_1 становится дозвуковым ($\Delta\alpha = 1,856^\circ$ при $M = 3$), показывает, что влияние отраженных возмущений на аэродинамические коэффициенты в данном случае скорее исключение, чем правило.

Сформулированный характер изменения подъемной и нормальной сил сохраняется и для тонких неравнобедренных профилей (т. е. когда углы θ_i не равны между собой).

Коэффициент силы аэродинамического сопротивления c_x при утолщении рассматриваемых профилей монотонно возрастает. Для уменьшения волнового сопротивления целесообразно несколько сместить угловые точки этих профилей в направлении задней кромки.

Заключение

На простых модельных примерах (одиночная пластина, пластина с передним щитком, многоугольные профили) показано существование экстремальных ударно-волновых систем, возникающих при обтекании этих тел сверхзвуковым потоком газа. Параметры систем, экстремальных по различным практически значимым критериям, определяются аналитически и численно.

Волны разрежения и сжатия, отражающиеся в результате взаимодействия элементов ударно-волновых систем между собой, как правило, препятствуют достижению экстремальных давлений и сил, действующих на обтекаемое тело.

Таким образом, применение аналитического аппарата исследования и оптимизации ударно-волновых систем представляется полезным для газодинамического конструирования летательных аппаратов, управления силовыми и тепловыми нагрузками на их несущие поверхности, а также для тестирования численных методов аэромеханики и газовой динамики.

Список литературы

1. Петров Г.И., Ухов Е.П. Расчет восстановления давления при переходе от сверхзвукового потока к дозвуковому при различных системах плоских скачков уплотнения // Технические записки НИИ-1. 1947. № 1. С. 1–7.
2. Петров Г.И. Диффузоры для сверхзвукового ВРД // Тр. ЦИАМ. 1950. Вып. 169. С. 1–25.
3. Петров Г.И. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования: избранные труды. М.: Наука, 1992. 306 с.
4. Oswatitsch K. Gas dynamics. New York: Academic Press, 1956. 610 p.
5. Герман Р. Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960. 290 с.
6. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 118–126.
7. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы при ограничениях на суммарный угол поворота потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 4. С. 142–150.
8. Омельченко А.В., Усков В.Н. Экстремальная система «волна разрежения – скачок уплотнения» в стационарном потоке газа // Прикладная механика и техническая физика. 1997. Т. 38, № 3. С. 59–68.
9. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные догоняющие скачки уплотнения с ограничениями на суммарный угол поворота потока // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 4. С. 99–108.
10. Ерофеев В.К., Омельченко А.В., Усков В.Н. Анализ акустического импеданса в стационарных сверхзвуковых течениях // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71, № 4. С. 663–668.
11. Омельченко А.В., Усков В.Н. Максимальные углы поворота потока в ударно-волновых системах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 3. С. 148–156.
12. Усков В.Н., Чернышов М.В. Особые и экстремальные тройные конфигурации скачков уплотнения // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 4. С. 39–53.
13. Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995. 180 с.
14. Усков В.Н. Ударные волны и их взаимодействие: учебное пособие. Л.: Изд-во ЛМИ, 1980. 90 с.
15. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. В 2 ч. Ч. I. Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла. М.: Высшая школа, 1980. 495 с.
16. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 888 с.
17. Чернышов М.В. Теоретический анализ ударно-волновых систем на пластине со щитком в сверхзвуковом потоке // Вестник молодых ученых. Сер. Прикладная математика и механика. 2000. Вып. 3, № 2. С. 105–110.
18. Чернышов М.В. Взаимодействия элементов ударно-волновых систем между собой и с различными поверхностями: дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук: защищена 18.04.2002; утверждена 12.07.2002. СПб: БГТУ «Военмех», 2002. 173 с.
19. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.

*Статья поступила в редакцию 23 июля 2010 г.,
после доработки — 4 апреля 2013 г.*