

На рис. 2 даны графики  $T(\epsilon)$ , соответствующие нагружению с теми же скоростями деформации. Как видно, линия  $p(\epsilon)$  при  $\dot{\epsilon} = -10^{-2} \text{ с}^{-1}$  удовлетворительно описывает диаграмму, заданную кривой 1. Варьируя константы уравнения состояния и времени релаксации, можно добиться более точного совпадения.

Опишем результаты численных расчетов, в которых обнаруживается аномальное увеличение амплитуды отраженной волны от жесткой стенки. Суть данного эффекта заключается в следующем: при воздействии стационарной ударной волны на слой пористого материала, лежащего на жесткой поверхности, отраженная от этой поверхности волна имеет амплитуду, существенно большую, чем амплитуда входящей волны (газодинамическая теория предсказывает примерное удвоение амплитуды отраженной волны). Экспериментальное описание этого эффекта содержится, например, в [3].

Задача решалась для слоя толщиной 3 см, лежащего на жестком основании. Использовался одномерный вариант системы (10) с уравнением состояния (12) и времени релаксации (13). В качестве граничных условий задавались значение давления  $p = 45 \text{ МПа}$  при  $x = 3 \text{ см}$  и нулевая скорость  $u = 0$  при  $x = 0$ . Для решения использовалась разностная схема С. К. Годунова [5].

Результаты расчета показали, что в данной модели волна сжатия расщепляется на упругий предвестник и пластическую волну. На рис. 3 приведена зависимость давления от времени на жесткой стенке при  $x = 0$ . Видно, что максимальная амплитуда отраженной волны более чем в 3 раза превосходит давление, действующее снаружи на слой материала. Дальнейшее колебательное поведение давления на жесткой стенке качественно совпадает с экспериментальными данными, приведенными в [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Херрманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов // Проблемы теории пластичности. — М.: Мир, 1976.
2. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1978.
3. Гвоздева Л. Г., Фаресов Ю. М., Фокеев В. П. Взаимодействие воздушных ударных волн с пористыми сжимаемыми материалами // ПМТФ. — 1985. — № 3.
4. Роменский Е. И. Динамические трехмерные уравнения упругопластической модели Х. А. Рахматулина // ПМТФ. — 1979. — № 2.
5. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.

Поступила 7/VII 1987 г.

УДК 539.3

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УЗКИХ ОБЛАСТЕЙ

А. Н. Бурмистров  
(Жуковский)

Задача о давлении штампа на упругое полупространство — это классическая задача теории упругости. Ее решение — необходимая составная часть расчета многих объектов машино- и приборостроения. Распределение давления в контакте находится в результате решения двумерного интегрального уравнения первого рода с полярным ядром.

В данной работе предложен асимптотический метод для узких областей контакта, позволяющий свести указанное уравнение к системе двух одномерных интегральных уравнений. Одно из них связывает распределение давления в поперечном направлении с поперечной формой упругого перемещения, второе — уравнение относительно неизвестной нагрузки в сечении. Асимптотический подход позволяет обосновать эвристический метод плоских сечений [1].

Получены аналитические решения для двух задач: контакт штампа с эллиптической зависимостью ширины; контакт полубесконечного штампа при постоянной нагрузке в каждом сечении. В случае эллиптического штампа с плоским основанием про-

ведено сравнение асимптотического и точного [1] результатов. Предлагаемый метод правильно схватывает первый член разложения по малому параметру  $\varepsilon$  (характеризующему вытянутость контакта) точного решения задачи.

1. Задача о давлении штампа ограниченных размеров на упругое полупространство сводится к интегральному уравнению [1]

$$(1.1) \quad \varepsilon \int \int_{G_{xy}} \frac{p'(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{g'(x, y)}{L}.$$

Здесь  $g'(x, y)$  — упругое перемещение;  $\theta = (1 - \nu_1^2)/(\pi E_1) + (1 - \nu_2^2)/(\pi E_2)$ ;  $\nu_1, \nu_2, E_1, E_2$  — коэффициенты Пуассона и модули упругости штампа и полупространства;  $x, y$  — безразмерные декартовы координаты на плоскости, полученные из размерных путем их деления на  $L$ -характерный размер области  $G_{xy}$  контакта;  $p'(x, y)$  — распределение давления.

Пусть контакт в системе координат  $\varphi, \psi$  узкий. Предположим, что  $x = x(\varphi, \psi), y = y(\varphi, \psi), (\varphi, \psi) \in G_{\varphi\psi}$  и заданное этими формулами отображение  $G_{\varphi\psi}$  на  $G_{xy}$  однолиственное, взаимно непрерывно дифференцируемое с якобианом, не равным нулю. Тогда существует  $C$  такое, что  $|x_\varphi|, |y_\varphi|, |x_\psi|, |y_\psi| \leq C$ . Кроме того, предположим, что выполнены неравенства

$$(1.2) \quad \begin{aligned} |x_\varphi(\varphi_1, \psi) - x_\varphi(\varphi_2, \psi)| &\leq C_1 |\varphi_1 - \varphi_2|^{\gamma_1}, \\ |x_\varphi(\varphi, \psi_1) - x_\varphi(\varphi, \psi_2)| &\leq C_1 |\psi_1 - \psi_2|^{\gamma_2}, \\ |y_\varphi(\varphi_1, \psi) - y_\varphi(\varphi_2, \psi)| &\leq C_1 |\varphi_1 - \varphi_2|^{\gamma_3}, \\ |y_\varphi(\varphi, \psi_1) - y_\varphi(\varphi, \psi_2)| &\leq C_1 |\psi_1 - \psi_2|^{\gamma_4}, \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0. \end{aligned}$$

Пусть в переменных  $\varphi, \psi$  область  $G_{\varphi\psi}$  зависит от  $\varepsilon$  так, что в переменных  $u = \varphi, v = (\psi - V(\varphi))/\varepsilon$  область  $G_{uv}$ , соответствующая  $G_{\varphi\psi}$ , имеет вид  $G_{uv} = \{(u, v): u^- \leq u \leq u^+, v^-(u) \leq v \leq v^+(u)\}$  ( $V(\varphi), v^\pm(u)$  — непрерывные функции). Пределом областей  $G_{\varphi\psi}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  является линия  $\psi = V(\varphi)$ , которую в дальнейшем будем называть скелетной.

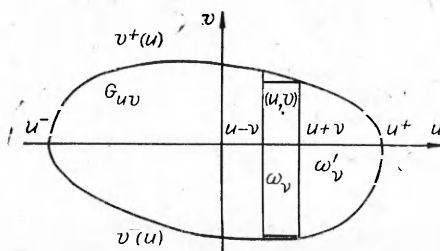
В переменных  $u, v$  уравнение (1.1) запишется в виде

$$(1.3) \quad \int \int_{G_{uv}} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|} = \frac{g(u, v)}{\varepsilon},$$

где  $\mathbf{r} = (x(u, v), y(u, v)); g = g'/L; p = \theta p' \partial(x, y) / \partial(\varphi, \psi)$ . Заметим, что в левой части (1.3), так же как и в правой, есть малый параметр  $\varepsilon$ , поскольку  $|x_v|, |y_v| \leq C\varepsilon$ .

Введем обозначения  $a = \max_u |v^+(u) - v^-(u)|, \mathbf{R}(u) = \mathbf{r}(u, 0)$  ( $\mathbf{R}(u)$  определяет годограф скелетной линии). Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(u)$  — гладкая кривая. Тогда, как следует из формулы конечных приращений Лагранжа, существует  $M > 0: |\mathbf{R}(u + \delta) - \mathbf{R}(u)| \leq M|\delta|$ . Предположим также, что существуют  $m > 0, \delta^* > 0$  такие, что  $|\mathbf{R}(u + \delta) - \mathbf{R}(u)| \geq m|\delta|$  для любого  $|\delta| < \delta^*$ .

2. Получим асимптотическое выражение интеграла в (1.3) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , полагая, что  $p_a = O(1)$  — непрерывная на  $G_{uv}$  функция. Зафиксируем точку  $(u, v) \in G_{uv}, u \neq u^\pm$  (см. рисунок).



Выберем бесконечно малую  $v$  так, чтобы  $u - v > u^-, u + v < u^+, v < \delta^*, \varepsilon = o(v), mv > 4\sqrt{2}Ca\varepsilon$ . Представим интеграл в виде суммы интегралов по областям  $\omega_v = G_{uv} \cap \{(u', v): |u' - u| < v\}$  ( $I_1$ ) и  $\omega'_v = G_{uv} \setminus \omega_v$  ( $I_2$ ) и выделим в каждом слагаемом главную часть. Верна формула

$$(2.1) \quad I_2 = \int_{u^-}^{u-v} d\xi \int_{v^-(\xi)}^{v^+(\xi)} \frac{p(\xi, \eta) d\eta}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|} + \int_{u+v}^{u^+} d\xi \int_{v^-(\xi)}^{v^+(\xi)} \frac{p(\xi, \eta) d\eta}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|}.$$

Преобразуем знаменатель подынтегральных выражений:

$$|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)| = |\mathbf{R}(u) - \mathbf{R}(\xi) + \mathbf{A} + \mathbf{B}|,$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, 0), \quad \mathbf{B} = \mathbf{r}(\xi, 0) - \mathbf{r}(\xi, \eta).$$

По теореме Лагранжа верны неравенства  $|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}| \leq \sqrt{2}Ca\varepsilon$ , используя которые получим

$$\Delta = \left| \frac{1}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|} - \frac{1}{|\mathbf{R}(u) - \mathbf{R}(\xi)|} \right| = [|\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 + 2((\mathbf{A} + \mathbf{B}), (\mathbf{R}(u) - \mathbf{R}(\xi)))] / (|\mathbf{R}(u) - \mathbf{R}(\xi) + \mathbf{A} + \mathbf{B}| |\mathbf{R}(u) - \mathbf{R}(\xi)|) +$$

$$+ |\mathbf{R}(u) - \mathbf{R}(\xi) + \mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq 16 \frac{2C^2 a^2 \varepsilon^2 + \sqrt{2} C M a (u^+ - u^-) \varepsilon}{3m^3 v^3} \equiv \mathcal{N}'(\varepsilon, v).$$

Здесь применено неравенство  $|\mathbf{R}(u) - \mathbf{R}(\xi) + \mathbf{A} + \mathbf{B}| \geq |\mathbf{R}(u) - \mathbf{R}(\xi)| - |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}| \geq mv/2$ .

Выберем  $v$ , которое до сих пор оставалось еще достаточно произвольным, так, что  $\varepsilon = o(v^3)$ . Тогда  $\Delta \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $(\xi, \eta) \in \omega_v'$ . Обозначим  $q(u) = \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} p(u, \eta) d\eta$ . В силу непрерывности  $p$  существует  $M_q > 0$ :  $|q| < M_q$ . Тогда главная часть  $I_2$  дается выражением

$$(2.2) \quad I_2 \sim \int_{u^-}^{u-v} \frac{q(\xi) d\xi}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} + \int_{u+v}^{u^+} \frac{q(\xi) d\xi}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|}.$$

Действительно, так как  $\Delta \rightarrow 0$ , то модуль разности правых частей (2.1) и (2.2) не превышает  $(u^+ - u^-)M_q \mathcal{N}'(\varepsilon, v) \rightarrow 0$ .

Перейдем к оценке интеграла  $I_1$ :

$$(2.3) \quad I_1 = \iint_{\omega_v} \frac{p(u, \eta) d\xi d\eta}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|} + \iint_{\omega_v} \frac{p(\xi, \eta) - p(u, \eta)}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|} d\xi d\eta.$$

Поскольку  $p = O(1)$ ,  $|p(\xi, \eta) - p(u, \eta)| \leq w(v, p, G_{uv})$  ( $w$  — модуль непрерывности  $p$  на контакте  $G_{uv}$ ) и по теореме Кантора  $w \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то вторым интегралом в (2.3) можно пренебречь в сравнении с первым.

В область  $\omega_v$  впишем максимальный прямоугольник  $Q_v = \{(u', v): |u' - u| \leq v, v_1^-(u, v) \leq v \leq v_1^+(u, v)\}$ , где  $v_1^+(u, v) = \min v^+(u)$ ,  $v_1^-(u, v) = \max v^-(u)$ ,  $u \in [u - v, u + v]$ . Вследствие непрерывности  $v^\pm(u)$  величины  $|v_1^+(u, v) - v^+(u)|$ ,  $|v_1^-(u, v) - v^-(u)|$  асимптотически малы. Тогда  $\text{mes}(\omega_v \setminus Q_v)$  асимптотически мала в сравнении с  $\text{mes}(Q_v)$ , значит,

$$(2.4) \quad \iint_{\omega_v \setminus Q_v} \frac{p(u, \eta) d\xi d\eta}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|} = o\left(\iint_{Q_v} \frac{p(u, \eta) d\xi d\eta}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|}\right).$$

Преобразуем знаменатель в правой части (2.4) для  $(\xi, \eta) \in Q_v$ . Используя формулу конечных приращений, получим

$$(2.5) \quad \mathbf{r}(\xi, \eta) = \mathbf{r}(u, \eta) + \left[ \mathbf{R}'(u) + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta'_x \\ \Delta'_y \end{pmatrix} \right] (\xi - u),$$

где  $\Delta_x = x_u(\xi', \eta) - x_u(u, \eta)$ ;  $\Delta'_x = x_u(u, \eta) - x_u(u, 0)$ ;  $\Delta_y = y_u(\xi'', \eta) - y_u(u, \eta)$ ;  $\Delta'_y = y_u(u, \eta) - y_u(u, 0)$ ;  $\xi', \xi''$  — точки, лежащие между  $\xi$  и  $u$ . Как следует из (1.2), верны неравенства  $|\Delta_x| \leq C_1 v^{\gamma_1}$ ,

$|\Delta'_x| \leq C_1 a^{\nu_2} \varepsilon^{\nu_2}$ ,  $|\Delta_y| \leq C_1 v^{\nu_3}$ ,  $|\Delta'_y| \leq C_1 a^{\nu_4} \varepsilon^{\nu_4}$ . Учитывая (2.5), находим  $\mathbf{r}(\xi, \eta) = \mathbf{r}(u, \eta) + (\mathbf{R}'(u) + \mathbf{b})(\xi - u)$ ,  $|\mathbf{b}| \leq C_1 (v^{\nu_1} + a^{\nu_2} \varepsilon^{\nu_2} + v^{\nu_3} + a^{\nu_4} \varepsilon^{\nu_4}) \rightarrow 0$ .

Представим интеграл по  $Q_v$  в виде

$$(2.6) \quad \iint_{Q_v} \frac{p(u, \eta) d\xi d\eta}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(\xi, \eta)|} = \iint_{Q_v} p(u, \eta) [|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, \eta) - (\xi - u)(\mathbf{R}'(u) + \mathbf{b})|^{-1} - |\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, \eta) - \mathbf{R}'(u) \times (\xi - u)|^{-1}] d\xi d\eta + \iint_{Q_v} \frac{p(u, \eta) d\xi d\eta}{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, \eta) - \mathbf{R}'(u)(\xi - u)|}.$$

В правой части (2.6) первый интеграл асимптотически мал в сравнении со вторым в силу равномерной малости  $|\mathbf{b}|$ . Тогда, учитывая, что  $|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, \eta)| = \varepsilon$  (поскольку  $v \sim \varepsilon$ ), вводя обозначения

$$(2.7) \quad s = \frac{((\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, \eta)), \mathbf{R}'(u))}{\varepsilon |\mathbf{R}'(u)|^2}, \quad t^2 = \frac{|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, \eta)|^2}{\varepsilon^2 |\mathbf{R}'(u)|^2}$$

( $s$  и  $t$  порядка единицы) и вычисляя второй интеграл в правой части (2.6), имеем

$$(2.8) \quad I_1 \sim \frac{1}{|\mathbf{R}'(u)|} \int_{v_1^-(u, v)}^{v_1^+(u, v)} p(u, \eta) \operatorname{arsh} \frac{\xi - \varepsilon s}{\varepsilon \sqrt{t^2 - s^2}} \Big|_{\xi=-v}^{\xi=v} d\eta.$$

Вследствие того что  $\varepsilon = o(v)$ , значения  $(\pm v - \varepsilon s)/(\varepsilon \sqrt{t^2 - s^2})$  асимптотически велики. Тогда, используя соотношение  $\operatorname{arsh} x = \operatorname{sgn} x \ln(2|x|) + O(x^{-2})$ ,  $x \rightarrow \infty$ , получим, что главная часть выражения в квадратных скобках (2.8) равна  $2 \ln [2v/(\varepsilon \sqrt{t^2 - s^2})]$ . Применяя асимптотическую малость величин  $|v_1^\pm - v^\pm|$  и заменяя верхний и нижний пределы интегрирования на  $v^+$ ,  $v^-$ , находим

$$(2.9) \quad I_1 \sim \frac{2}{|\mathbf{R}'(u)|} \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} p(u, \eta) \ln \frac{2v}{\varepsilon \sqrt{t^2 - s^2}} d\eta.$$

Преобразуем правую часть выражения (2.2):

$$(2.10) \quad I_2 \sim \int_{u^-}^{u-v} \frac{q(\xi) - q(u)}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} d\xi + \int_{u+v}^{u^+} \frac{q(\xi) - q(u)}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} d\xi + \\ + q(u) \int_{u^-}^{u-v} \frac{d\xi}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} + q(u) \int_{u+v}^{u^+} \frac{d\xi}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} - \\ - \frac{q(u)}{|\mathbf{R}'(u)|} \left\{ \int_{u^-}^{u-v} \frac{d\xi}{|\xi - u|} + \int_{u+v}^{u^+} \frac{d\xi}{|\xi - u|} \right\} + \\ + \frac{q(u)}{|\mathbf{R}'(u)|} \ln(u^+ - u)(u - u^-) - \frac{2q(u)}{|\mathbf{R}'(u)|} \ln v.$$

Два первых интеграла при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют пределом в.р.  $\int_{u^-}^{u^+} \frac{q(\xi) - q(u)}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} d\xi$ ,

а предел четырех последующих интегралов есть  $q(u)$  в.р.

$\int_{u^-}^{u^+} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} - \frac{1}{|\mathbf{R}'(u)(\xi - u)|} \right\} d\xi$ . Учитывая это, а также (2.9),

можно записать уравнение (1.3) в виде

$$(2.11) \quad \frac{2}{|\mathbf{R}'(u)|} \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} p(u, \eta) \ln \frac{2}{\sqrt{v^2 - \eta^2}} d\eta + \text{v.p.} \int_{u^-}^{u^+} \frac{q(\xi) - q(u)}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} d\xi +$$

$$+ q(u) \text{v.p.} \int_{u^-}^{u^+} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} - \frac{1}{|\mathbf{R}'(u)(\xi - u)|} \right\} d\xi +$$

$$+ \frac{q(u)}{|\mathbf{R}'(u)|} \ln \frac{(u^+ - u)(u - u^-)}{\varepsilon^2} = \frac{g(u, v)}{\varepsilon}.$$

Заметим, что в окончательное уравнение  $v$  (которая в процессе вывода выбирается с достаточной степенью произвола) не входит.

3. Запишем уравнение (2.11) для двух систем координат.

А. Аффинная система координат  $\varphi, \psi$ . Пусть  $(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\psi)$ ,  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  — базисы, причем векторы имеют единичную длину и верны формулы  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_\psi = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{e}_\psi$  и  $\mathbf{e}_x$ . Тогда  $\mathbf{r} = \varphi \mathbf{e}_\varphi + \psi \mathbf{e}_\psi$ ,  $\varphi = x - y \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\psi = y / \sin \alpha$ . Пусть также  $V(\varphi) \equiv 0$  (скелетная линия — отрезок, лежащий на прямой  $\psi = 0$ ), следовательно,  $\mathbf{R}(\varphi) = \mathbf{e}_\varphi \varphi$ . При этом  $p = \theta \sin \alpha p'$ . Поскольку  $v = \psi / \varepsilon$ ,  $u = \varphi$ , то  $\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, \eta) = \varepsilon(v - \eta) \mathbf{e}_\psi$ ,  $\mathbf{R}'(u) = \mathbf{e}_\varphi$ ,  $s = (v - \eta) \cos \alpha$ ,  $t^2 = (v - \eta)^2$ .

Уравнение (2.11) принимает вид

$$(3.1) \quad \text{v.p.} \int_{u^-}^{u^+} \frac{q(\xi) - q(u)}{|\xi - u|} d\xi + q(u) \ln \frac{4(u^+ - u)(u - u^-)}{\sin^2 \alpha \varepsilon^2} =$$

$$= 2 \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} p(u, \eta) \ln |v - \eta| d\eta + \frac{g(u, v)}{\varepsilon}.$$

Б. Полярная система координат  $x = \psi \cos \varphi$ ,  $y = \psi \sin \varphi$ . Пусть скелетная линия лежит на окружности единичного радиуса. Тогда  $u = \varphi$ ,  $v = (\psi - 1) / \varepsilon$ ,  $\mathbf{R}(u) = \mathbf{e}_x \cos u + \mathbf{e}_y \sin u$ ,  $\mathbf{R}'(u) = -\mathbf{e}_x \sin u + \mathbf{e}_y \cos u$ ,  $\mathbf{r}(u, v) = (1 + \varepsilon v) \mathbf{R}(u)$ ,  $\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u, \eta) = \varepsilon(v - \eta) \mathbf{R}(u)$ ,  $\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u) = (\cos \xi - \cos u) \mathbf{e}_x + (\sin \xi - \sin u) \mathbf{e}_y$ ,  $s = 0$ ,  $t^2 = (v - \eta)^2$ ,

$$\frac{1}{|\mathbf{R}(\xi) - \mathbf{R}(u)|} - \frac{1}{|\mathbf{R}'(u)(\xi - u)|} = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\xi - u}{2} \right|} - \frac{1}{|\xi - u|}. \quad \text{Уравнение}$$

(2.11) преобразуется в форму

$$(3.2) \quad \text{v.p.} \int_{u^-}^{u^+} \frac{q(\xi) - q(u)}{2 \left| \sin \frac{\xi - u}{2} \right|} d\xi + q(u) \ln \frac{64 \left| \operatorname{tg} \frac{u^+ - u}{4} \operatorname{tg} \frac{u - u^-}{4} \right|}{\varepsilon^2} =$$

$$= 2 \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} p(u, \eta) \ln |v - \eta| d\eta + \frac{g(u, v)}{\varepsilon}.$$

Отметим одно свойство уравнений (3.1), (3.2). Предположим, что найдено решение  $p(u, v)$  при заданных  $g(u, v)$ ,  $v^\pm(u)$ . Тогда для любой непрерывной функции  $z(u)$   $p_1(u, v) = p(u, v - z(u))$  будет решением задачи с  $g_1(u, v) = g(u, v - z(u))$ ,  $v_1^\pm(u) = v^\pm(u) - z(u)$ , т. е. искривление

области контакта с сохранением ширины в каждом сечении  $u = \text{const}$  приводит к такому же искривлению распределения давления.

4. Исследуем уравнение (2.11). Если вычесть из (2.11) такое же уравнение, записанное при  $v = v^0(u) = (v^+(u) + v^-(u))/2$ , то получим уравнение плоской теории упругости

$$(4.1) \quad \frac{2}{|R'(u)|} \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} p(u, \eta) \ln \sqrt{\frac{t^2(u, v^0(u), \eta) - s^2(u, v^0(u), \eta)}{t^2(u, v, \eta) - s^2(u, v, \eta)}} d\eta = \\ = \frac{1}{3} [g(u, v) - g(u, v^0(u))],$$

которое связывает распределение давления в каждом сечении  $u = \text{const}$  с формой упругого перемещения в этом сечении. В результате решения (4.1)  $p(u, v)$  выражается через  $v^-(u)$ ,  $v^+(u)$ ,  $q(u)$ . Подставляя его в (2.11), при  $v = v^0(u)$  имеем одномерное уравнение относительно  $q(u)$ :

$$(4.2) \quad \text{v.p.} \int_{u^-}^{u^+} \frac{q(\xi) - q(u)}{|R(\xi) - R(u)|} d\xi + q(u) \int_{u^-}^{u^+} d\xi \left\{ \frac{1}{|R(\xi) - R(u)|} - \right. \\ \left. - \frac{1}{|R'(u)(\xi - u)|} \right\} + \frac{q(u)}{|R'(u)|} \ln \frac{4(u^+ - u)(u - u^-)}{\varepsilon^2} = \\ = \frac{g(u, v^0(u))}{\varepsilon} + \frac{2}{|R'(u)|} \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} p(u, \eta) \ln \sqrt{\frac{t^2(u, v^0(u), \eta) - s^2(u, v^0(u), \eta)}{t^2(u, v, \eta) - s^2(u, v, \eta)}} d\eta.$$

Таким образом, исходное двумерное интегральное уравнение распадается на два одномерных ((4.1), (4.2)), решаемых последовательно.

Рассмотрим решение (3.1). Для аффинной системы координат (4.2) запишем в виде уравнения

$$\int_{v^-(u)}^{v^+(u)} p(u, \eta) \ln \left| \frac{v^0(u) - \eta}{v - \eta} \right| d\eta = \frac{1}{2\varepsilon} [g(u, v) - g(u, v^0(u))],$$

решение которого есть [2]

$$(4.3) \quad p(u, v) = - \frac{1}{2\pi^2 \varepsilon \sqrt{(v^+ - v)(v - v^-)}} \int_{v^-}^{v^+} \frac{\sqrt{(v^+ - \eta)(\eta - v^-)}}{\eta - v} \times \\ \times g_v(u, \eta) d\eta + \frac{q}{\pi \sqrt{(v^+ - v)(v - v^-)}} \quad (g_v(u, v) = \partial g(u, v) / \partial v).$$

Подставим (4.3) в (3.1), положив  $v = v^0(u)$ , и воспользуемся леммой [2] о замене порядка интегрирования в интеграле в правой части равенства

(3.1). Используя табличный интеграл [3]  $\int_{-c}^c \frac{\ln|x|}{\sqrt{c^2 - x^2}} dx = \pi \ln \frac{c}{2}$ , находим вклад второго слагаемого из (4.3) в правую часть (3.1)

$$(4.4) \quad \int_{v^-}^{v^+} \frac{q \ln|v^0 - \eta|}{\pi \sqrt{(v^+ - \eta)(\eta - v^-)}} d\eta = q \ln \frac{(v^+ - v^-)^2}{16}.$$

Вклад первого слагаемого из (4.3) равен

$$\int_{v^-}^{v^+} g_v(u, \eta) \sqrt{(v^+ - \eta)(\eta - v^-)} \left[ \frac{1}{\pi^2 \varepsilon} \int_{v^-}^{v^+} \frac{\ln|v - v^0| dv}{(v - \eta) \sqrt{(v^+ - v)(v - v^-)}} \right] d\eta.$$

Выражение в квадратных скобках находится с помощью теории вычетов и табличных интегралов [3]

$$(4.5) \quad \frac{1}{\pi^2 \varepsilon} \int_{v^-}^{v^+} \frac{\ln |v - v^0| dv}{(v - \eta) \sqrt{(v^+ - v)(v - v^-)}} = \\ = \frac{\operatorname{sgn}(\eta - v^0)}{\varepsilon \sqrt{(v^+ - v)(v - v^-)}} \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left( -2 \frac{|\eta - v^0|}{(v^+ - v^-)} \right) \right].$$

С учетом (4.4), (4.5) интеграл в правой части (3.1) равен

$$(4.6) \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_{v^-}^{v^+} g_v(u, \eta) \operatorname{sgn}(\eta - v^0) d\eta - \frac{1}{\pi \varepsilon} \int_{v^-}^{v^+} g_v(u, \eta) \times \\ \times \operatorname{sgn}(\eta - v^0) \arccos \left( -2 \frac{|\eta - v^0|}{(v^+ - v^-)} \right) d\eta.$$

Первое слагаемое в (4.6) равно  $[g(u, v^+(u)) + g(u, v^-(u)) - 2g(u, v^0(u))]/\varepsilon$ . Второе слагаемое в (4.6) представляется в виде суммы двух интегралов по отрезкам  $[v^-, v^0]$ ,  $[v^0, v^+]$ , которые берутся по частям. В результате

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[ g(u, v^0(u)) - g(u, v^+(u)) - g(u, v^-(u)) + \frac{1}{\pi} \int_{v^-}^{v^+} \frac{g(u, v) dv}{\sqrt{(v^+ - v)(v - v^-)}} \right].$$

Уравнение (3.1) запишется в окончательном виде

$$(4.7) \quad \text{в.р.} \int_{u^-}^{u^+} \frac{q(\xi) - q(u)}{|\xi - u|} d\xi + q(u) \ln \left[ \frac{64(u^+ - u)(u - u^-)}{\sin^2 \alpha (v^+(u) - v^-(u))^2 \varepsilon^2} \right] = \\ = \frac{1}{\pi \varepsilon} \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} \frac{g(u, v) dv}{\sqrt{(v^+(u) - v)(v - v^-(u))}}.$$

Не ограничивая общности, положим  $u^\pm = \pm 1$ . Пусть перемещение  $g$  не зависит от  $v$  и  $v^+(u) - v^-(u) = 2\sqrt{1 - u^2}$  (в частности, рассматривается штамп эллиптической формы). При этих предположениях  $p(u, v) = \frac{q(u)}{\pi \sqrt{(v^+(u) - v)(v - v^-(u))}}$  и уравнение (4.7) принимает более простой вид

$$(4.8) \quad \int_{-1}^1 \frac{q(\xi) - q(u)}{|\xi - u|} d\xi + q(u) \ln \frac{16}{\varepsilon^2} = \frac{g(u)}{\varepsilon}.$$

Данное уравнение имеет полиномиальное решение. Положим  $g(u) = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \dots + b_0$  и будем искать решение  $q(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_0$ . Воспользуемся соотношением

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n - u^n}{|\xi - u|} d\xi = -2 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) u^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{n-k} [(-1)^{n-k} + 1].$$

Тогда для определения  $a_j$  получается система линейных уравнений

$$a_n \left( \ln \frac{16}{\varepsilon^2} - 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) + \sum_{j=n+1}^n \frac{(-1)^{j-k} + 1}{j-k} a_j = \frac{b_n}{\varepsilon}$$

с верхней треугольной матрицей. В частном случае  $g(u) = \text{const } q(u) = g/(\varepsilon \ln(16/\varepsilon^2))$ .



Для эллиптического штампа с плоским основанием имеется формула [1]  $q = \frac{g}{2\varepsilon F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-\varepsilon^2}\right)}$  ( $F$  — полный эллиптический интеграл первого

рода). Как следует из [4], при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $F \sim \varepsilon \ln(4/\varepsilon)$ . Таким образом, точное и приближенное решения асимптотически близки.

Исследуем случай неограниченных областей. Пусть  $G_{uv} = \{(u, v): u \geq 0, |v - v^0(u)| \leq d(u)\}$ . Будем рассматривать уравнение

$$(4.9) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{G_T} p(\xi, \eta) \left[ \frac{1}{\sqrt{(u-\xi)^2 + \varepsilon^2(v-\eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1-\xi)^2 + \varepsilon^2(v^0(1)-\eta)^2}} \right] d\xi d\eta = \frac{g(u)}{\varepsilon},$$

где  $G_T = G_{uv} \cap \{(u, v): u \leq T; v = y/\varepsilon; u = x$  ( $x, y$  — прямоугольные координаты). Без учета второго слагаемого в квадратных скобках под интегралом предел в левой части может оказаться бесконечным. Наличие этого слагаемого приводит к вычитанию «бесконечного» перемещения в фиксированной точке  $(u, v) = (1, v^0(1))$ .

Выражение интеграла в левой части (4.9) для фиксированного  $T$  получается из (4.7) при  $u^- = 0, u^+ = T$ . Тогда (4.9) запишется в виде

$$(4.10) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T \frac{q(\xi) - q(u)}{|\xi - u|} d\xi - \int_0^T \frac{q(\xi) - q(1)}{|\xi - 1|} d\xi + q(u) \ln \frac{u(T-u)}{\varepsilon^2} - q(1) \ln \frac{T-1}{\varepsilon^2} \right\} = 2q(u) \ln \frac{d(u)}{4} - 2q(1) \ln \frac{d(1)}{4} + \frac{g(u)}{\varepsilon}.$$

Будем искать решения (4.10)  $q(u) = \text{const}$ . Тогда  $\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \ln u + \ln \frac{T-u}{T-1} \right\} = 2q \ln \frac{d(u)}{d(1)} + \frac{g(u)}{\varepsilon}$ . Решая это уравнение, находим полуширину области контакта  $d(u) = d(1) \sqrt{u} \exp[-g(u)/(2q\varepsilon)]$ . В частном случае  $g(u) = 0$   $d(u) = d(1) \sqrt{u}$  (контакт параболической формы, вообще говоря, с криволинейной «осью»).

Заметим, что уравнение (4.7) имеет класс точных решений с  $q \equiv 0$  при условии, что  $g(u, v)$  при фиксированном  $u$  представляется в виде суммы нечетной функции аргумента  $2(v - v^0)/(v^+ - v^-)$  и линейной комбинации полиномов Чебышева (исключая полином нулевого порядка) от того же аргумента. Это следует из того, что интеграл в правой части (4.7) при указанных условиях равен нулю.

Процедура получения (4.7) непосредственно переносится и на случай уравнения (3.2), которое можно записать в виде

$$\int_{u^-}^{u^+} \frac{q(\xi) - q(u)}{2 \left| \sin \frac{\xi - u}{2} \right|} d\xi + q(u) \ln \left\{ \frac{1024 \left| \operatorname{tg} \frac{u^+ - u}{4} \operatorname{tg} \frac{u - u^-}{4} \right|}{(v^+(u) - v^-(u))^2 \varepsilon^2} \right\} = \\ = \frac{1}{\pi \varepsilon} \int_{v^-(u)}^{v^+(u)} \frac{g(u, v) dv}{\sqrt{(v^+(u) - v)(v - v^-(u))}}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.



3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.  
 4. Ковалев М. П., Народецкй М. З. Расчет высокоточных шарикоподшипников. — М.: Машиностроение, 1980.

Поступила 1/VII 1987 г.

УДК 539.3

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧЕК ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Г. М. Куликов  
(Гамбов)

Теория многослойных оболочек, построенная на основе статических или кинематических гипотез, приобрела наибольшую популярность [1—5], что объясняется физической наглядностью подхода и относительной простотой решения конкретных практических задач. Существующие подходы не позволяют, однако, одновременно описать неоднородное распределение поперечных касательных напряжений по толщине пакета, обеспечить выполнение условий непрерывности для этих напряжений на поверхностях раздела слоев и граничных условий на внешних поверхностях оболочки.

В данной работе на основе независимых кинематических [1] и статических [6] гипотез построен математически обоснованный вариант теории многослойных анизотропных оболочек, в равной мере учитывающий упомянутые выше факторы. В качестве примера рассмотрена задача об осесимметричном напряженно-деформированном состоянии перекрестно армированной цилиндрической оболочки.

1. Рассмотрим оболочку толщины  $h$ , составленную из  $N$  упругих анизотропных слоев постоянной толщины  $h_{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). В качестве поверхности приведения выберем внутреннюю граничную поверхность  $\Omega$ , которую отнесем к системе криволинейных координат  $x^i$ . Здесь и в дальнейшем все индексы, за исключением  $k, m$ , принимают значения 1, 2. Координату  $z$  будем отсчитывать вдоль нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности приведения.

Положение произвольной точки в недеформированной оболочке определяем радиусом-вектором  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{n}$ , в деформированной оболочке — радиусом-вектором  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + u_i^{(k)}\mathbf{r}^i + u_3^{(k)}\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор проекции точки на поверхность  $\Omega$ ,  $\mathbf{r}^i, \mathbf{r}^i$  — векторы основного и взаимного координатных базисов,  $u_i^{(k)}$  — ковариантные компоненты вектора тангенциальных перемещений,  $u_3^{(k)}$  — нормальное перемещение точек  $k$ -го слоя.

На поверхностях раздела слоев  $z = \delta_{(m)}$  ( $m = 1, 2, \dots, N - 1$ ) должны выполняться условия непрерывности для поперечных компонент тензора напряжений  $\sigma_{(k)}^{i3}, \sigma_{(k)}^{33}$  и компонент вектора перемещений

$$(1.1) \quad \sigma_{(m)}^{i3} = \sigma_{(m+1)}^{i3}, \quad \sigma_{(m)}^{33} = \sigma_{(m+1)}^{33};$$

$$(1.2) \quad u_i^{(m)} = u_i^{(m+1)}, \quad u_3^{(m)} = u_3^{(m+1)}.$$

Граничные условия на внутренней поверхности оболочки  $z = 0$  представим в форме

$$(1.3) \quad \sigma_{(1)}^{i3} = p_0^i, \quad \sigma_{(1)}^{33} = q_0.$$

На внешней поверхности оболочки  $z = h$  граничные условия имеют вид

$$(1.4) \quad \sigma_{(N)}^{i3} = p_1^i, \quad \sigma_{(N)}^{33} = q_1.$$

Воспользуемся далее кинематическими гипотезами, предложенными в [1]. Согласно [1], материал каждого слоя несжимаем в поперечном направлении и компоненты вектора тангенциальных перемещений  $k$ -го слоя оболочки линейны относительно нормальной координаты  $z$ :

$$(1.5) \quad u_i^{(k)} = v_i^{(k)} + (z - \delta_{(k-1)})\beta_i^{(k)}, \quad u_3^{(k)} = w.$$