ПМТФ, № 1, 1973

УДК 532.517

ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН И ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

В. М. Конторович, Ю. А. Синицын, В. М. Цукерник

(Харьков)

В рамках теории слабой турбулентности рассмотрено взаимодействие длинной когерентной волны и турбулентности на поверхности жидкости. Получена замкнутая система уравнений, состоящая из динамического уравнения для когерентной волны и уравнений типа кинетического, описывающих турбулентную подсистему. Показано, что из-за взаимодействия с турбулентной подсистемой когерентные волны с одинаковыми по величине и противоположными по направлению волновыми векторами оказываются связанными. Оценено дополнительное затухание когерентной волны за счет взаимодействия с турбулентностью, которое может значительно превышать затухание, обусловленное молекулярной вязкостью. Найдено изменение спектра корреляторов возвышений поверхности жидкости при наличии когерентной волны.

1. Формулировка задачи. Часто возникает ситуация, в которой на турбулентное движение накладывается низкочастотное колебание, фаза которого может считаться определенной. При этом турбулентность приводит к дополнительному затуханию волн, а из-за модуляции длинной волной гидродинамического движения турбулентность становится неоднородной и неизотропной. Это взаимное влияние длинной (когерентной) волны и турбулентности может быть последовательно учтено в теории слабой турбулентности, что и составляет содержание данной работы.

Теория локальной изотропной и однородной слабой турбулентности для поверхностных волн была развита в работах В. Е. Захарова и Н. Н. Филоненко [1, 2], в которых получено стационарное распределение n_k квазичастиц — нормальных колебаний поверхности жидкости, через которое выражается спектральная плотность энергии турбулентности $E(k) = \omega_k n_k$

$$n_k = c_1 k^{-4} \quad (k < k_0), \qquad n_k = c_2 k^{-17/4} \quad (k > k_0) \tag{1.1}$$

Здесь первая функция распределения соответствует гравитационным волнам, вторая — капиллярным, k_0 — капиллярная постоянная. Благодаря дисперсии волн на поверхности жидкости их взаимодействие может быть относительно слабым, если средняя энергия волнения не очень велика и не происходит обрушение волн. Распределения (1.1) в отличие от спектров О. М. Филлипса [3] получены для волн без барашков. Заметим, что в объеме несжимаемой жидкости турбулентность всегда является сильной из-за отсутствия дисперсии у вихрей, покоящихся относительно жидкости. В то же время для поверхностных волн имеется широкая область параметров волнения, где применимо представление о слабо неидеальном газе взаимодействующих друг с другом возбуждений, которые описываются с помощью кинетического уравнения. С помощью кинетических уравнений волны на поверхности жидкости рассматривались в работах К. Хассельмана [4].

При наличии длинной волны закон дисперсии ω_k коротковолновых возбуждений становится функцией $\mathbf{r}$ и t. Зависимость от $\mathbf{r}$ и t можно получить, если искать спектр коротковолновых возбуждений в системе отсчета, движущейся вместе с поверхностью жидкости, которая совершает длинноволновое движение. В этой системе отсчета действуют силы инерции и из-за неоднородной деформации поверхности, вызванной длинной волной, изменяется локальный масштаб, а благодаря наклону поверхности изменяется нормальная компонента силы тяжести. Вследствие этого в законе дисперсии короткой волны появляется зависимость от положения ее на длинной волне. Если вернуться в неподвижную систему отсчета, в законе дисперсии коротких волн наряду с поправками, связанными с вышеназванными причинами, возникает допплеровский сдвиг, который играет главную роль. Заметим, что изменение профиля короткой волны на длинной было исследовано в работе [5], однако допплеровский сдвиг там не рассматривается.

Кинетическое уравнение для функции распределения, пропорциональной среднему квадрату модуля амплитуд нормальных колебаний поверхности жидкости, которыми являются гравитационные либо капиллярные волны, можно записать и в пространственно-неоднородном случае. Оно имеет вид

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{k}} + \Gamma_k n_k = I^c(n_k) \qquad (1.2)$$

где n_k — функция распределения квазичастиц, ω_k — частота поверхностных колебаний, Γ_k — их затухание из-за молекулярной вязкости, $I^c(n_k)$ описывает столкновительное взаимодействие между квазичастицами, возникающее вследствие нелинейности гидродинамических уравнений.

Из (1.2) видно, что благодаря изменению закона дисперсии квазичастиц, длинная волна приводит к возникновению модуляции распределения, которое в линейном по амплитуде длинной волны приближении приобретает неоднородное и неизотропное слагаемое $\delta n_k(\mathbf{r}, t)$, пропорциональное углам наклона поверхности, вызванным длинной волной. В свою очередь, из-за взаимодействия в системе волн модуляция распределения и появление зависимости от координат приводит к появлению дополнительных сил, действующих на длинную волну и, как показано ниже, вызывающих изменение ее скорости и дополнительное затухание. Как видно из (1.2), на квазичастицу действует сила, равная $-\partial\omega_k/\partial\mathbf{r}$, в то время как в уравнении для длинной волны появляется обратная сила, усредненная по всем квазичастицам. Таким образом, должна возникать связанная система уравнений, описывающая как турбулентность в присутствии длинной волны, так и длинную волну в присутствии турбулентности. (Возникающая при этом система уравнений вполне подобна уравнениям, описывающим распространение когерентной звуковой волны в системе квазичастиц — электронов в металле [6].)

В действительности ситуация оказывается несколько более сложной, чем описано выше, так как когерентная волна приводит не только к появлению средних вида

$$\delta n_k(\mathbf{q}, t) = {}^1/_2 (\langle a_k^* a_{k+q} \rangle + \langle \overset{*}{a}_{k-q} a_k \rangle)$$

где a_k — амплитуда нормального колебания, а $\mathbf{q}$ — волновой вектор длинной волны, но и к появлению «аномальных» средних вида $\langle aa \rangle$, $\langle a^* a^* \rangle$. Благодаря этому полная система уравнений включает в себя и уравнения для этих средних.

В п. 2 и 3 получена связанная система уравнений, описывающая взаимное влияние длинной когерентной волны и турбулентности. В п. 4 рассмотрено дополнительное затухание когерентной волны при наличии турбулентности. В п. 5 получены «интегралы столкновений», описывающие процессы взаимодействия волн в присутствии длинной когерентной волны. В п. 6 исследовано изменение спектра корреляторов возвышений поверхности жидкости, вызванное взаимодействием с длинной когерентной волной.

2. Вывод уравнений для когерентной волны в присутствии турбулентности. Исходная система уравнений гидродинамики для поверхностного волнения имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + g\zeta - \frac{\alpha}{\rho}\Delta\zeta = -\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2|_{z=\zeta} - \frac{\alpha}{2\rho}[\Delta\zeta + (\nabla\zeta\nabla)](\nabla\zeta)^2$$
$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\zeta} = -(\nabla\zeta\nabla\varphi)|_{z=\zeta}, \quad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{z\to-\infty} \to 0 \tag{2.1}$$

где $\varphi(\mathbf{r}, z, t)$ — потенциал скоростей жидкости, $\zeta(\mathbf{r}, t)$ — отклонение поверхности от равновесия, вызванное волнением, ось z направлена вверх, а $z = 0$ соответствует поверхности жидкости в отсутствие волнения.

Следуя [1,2], перейдем к каноническим переменным $\zeta(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t)$ и введем нормальные координаты колебаний поверхности a_k и a_k^*

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \int\left(\frac{4k}{g + \alpha k^2/\rho}\right)^{1/4}(a_k e^{i\mathbf{kr}} + a_k^* e^{-i\mathbf{kr}})\,d\mathbf{k} \tag{2.2}$$
$$\psi(\mathbf{r}, t) = -i\int\left[\frac{4(g + \alpha k/\rho)}{k}\right]^{1/4}(a_k e^{i\mathbf{kr}} - a_k^* e^{-i\mathbf{kr}})\,d\mathbf{k}$$

Функция Гамильтона системы поверхностных волн равна

$$H = \frac{\rho}{2}\int d\mathbf{r}\int\limits_{-\infty}^{\zeta}(\nabla\varphi)^2\,dz + \rho g\int d\mathbf{r}\int\limits_{0}^{\zeta} z\,dz = \int \omega_k a_k^* a_k\,d\mathbf{k} +$$
$$+\int\Big[V^{(1)}_{1,23}a_1^*a_2a_3\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \frac{1}{3}V^{(2)}_{123}a_1a_2a_3\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + B\Big] \times$$
$$\times\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 + \int\Big[\frac{1}{4}W^{(1)}_{12,34}a_1^*a_2^*a_3a_4\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) + W^{(2)}_{1,234}a_1^*a_2a_3a_4 \times$$
$$\times\,\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) + B\Big]\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \tag{2.3}$$

где для краткости введены обозначения $\mathbf{k}_1 \equiv 1$, $\mathbf{k}_2 \equiv 2$ и т. д., B— комплексно-сопряженные величины. Члены, описывающие процессы рождения и уничтожения четырех волн, не приведены, так как в рассматриваемом далее приближении они вклада не дают. Динамические уравнения для амплитуд a_k и a_k^* получаются варьированием функции Гамильтона соответственно по ia_k^* и $-ia_k$

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\frac{\delta H}{\delta a_k^*}, \qquad \frac{\partial a_k^*}{\partial t} = i\frac{\delta H}{\delta a_k} \tag{2.4}$$

Наличие когерентной волны приводит к тому, что среднее по статическому ансамблю фаз значение амплитуд нормальных колебаний становится отличным от нуля

$$\langle a_q\rangle = A_q \neq 0 \tag{2.5}$$

Здесь и далее q — волновой вектор когерентной волны. Малость углов наклона когерентной волны позволяет ограничиться линейным по A_q приближением. Слабость взаимодействия дает возможность рассматривать систему поверхностных волн как совокупность двух подсистем: когерентной и турбулентной.

Получим уравнения движения для амплитуды когерентной волны A_q при наличии турбулентности. Это можно сделать, усредняя уравнение

(2.4) по статистическому ансамблю случайных фаз. С учетом (2.5) получаем

$$\frac{\partial A_q}{\partial t} + i\omega_q A_q + 2iA_q \int W^{(1)}_{kq,\, qk} n_k d\mathbf{k} + 2iA^*_{-q} \int W^{(2)}_{k;\, k,\, q,\, -q} n_k d\mathbf{k} = \tag{2.6}$$
$$= -i \int \left[V^{(1)}_{q;\, k,\, q-k} \langle a_k a_{q-k} \rangle + 2V^{(1)}_{k+q;\, q,\, k} \langle a_k{}^* a_{k+q} \rangle + V^{(2)}_{q,\, k,\, k+q} \langle a_k{}^* a^*_{-k-q} \rangle \right] d\mathbf{k}$$

Как видно из (2.6), наличие взаимодействия в системе поверхностных волн приводит к появлению в уравнении для амплитуды когерентной волны корреляционных функций $\langle a_k a_{q-k} \rangle$, $\langle a_k{}^* a_{k+q} \rangle$, $\langle a_k{}^* a_{-k-q} \rangle$, которые определяют действующие со стороны турбулентной подсистемы на когерентную волну дополнительные силы. Последние возникают из-за того, что в присутствии когерентной волны распределения квазичастиц становятся отличными от (1.1).

3. Описание турбулентности в присутствии когерентной волны. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо вывести уравнения для корреляционных функций, входящих в (2.6). Для коррелятора $\langle a_k{}^* a_{k+q} \rangle$ имеем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i(\omega_{k+q} - \omega_k) \right\} \langle a_k{}^* a_{k+q} \rangle = -i \int [V^{(1)}_{k+q,\, 12} \langle a_k{}^* a_1 a_2 \rangle \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) +$$
$$+ 2V^{(1)}_{2;\, k+q,\, 1} \langle a_k{}^* a^*{}_1 a_2 \rangle \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + V^{(2)}_{k+q,\, 1,\, 2} \langle a_k{}^* a_1{}^* a_2{}^* \rangle \times$$
$$\times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) - B_0]\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \tag{3.1}$$

Здесь B_0 — комплексно-сопряженные члены с заменой $\mathbf{k} \rightleftarrows \mathbf{k} + \mathbf{q}$.

Наличие когерентной волны дает возможность выразить тройные корреляторы через сумму произведений бинарных корреляторов на амплитуду когерентной волны $\langle a \rangle$. В линейном по A_q приближении необходимо опускать члены, являющиеся произведением $\langle a \rangle$ на аномальные бинарные корреляторы $\langle aa \rangle$ и $\langle a^* a^* \rangle$, так как последние, как это будет показано ниже, оказываются пропорциональными амплитуде когерентной волны. В произведениях вида $\langle a \rangle \langle a^* a \rangle$ оставлены только те средние, где парный коррелятор представляет собой стационарную функцию распределения (1.1). Например, для коррелятора $\langle a_k{}^* a_1 a_2 \rangle$ получаем

$$\langle a_k{}^* a_1 a_2 \rangle = \langle a_2 \rangle n_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \langle a_1 \rangle n_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) \tag{3.2}$$

Уравнение (3.1) с учетом вышесказанного приводится к виду

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i(\omega_{k+q} - \omega_k) \right\} \langle a_k{}^* a_{k+q} \rangle - 2i(n_{k+q} - n_k)[V^{(1)}_{k+q;\, k,\, q} A_q + V^{(1)}_{k;\, k+q,\, q} A^*_{-q}] = I_1 \tag{3.3}$$

где I_1 — линеаризованный интеграл столкновений, который отличается от обычного присутствием аномальных корреляторов. Выражение для I_1 получено путем расцепления высших корреляционных функций и приведено в п. 5.

В дальнейшем будет рассматриваться случай, когда когерентная волна является длинной ($q \ll k$) и в уравнении (3.3) можно произвести разложение по $q/k \ll 1$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{q}\mathbf{v}_k \right\} \langle a_k{}^* a_{k+q} \rangle - 2i\mathbf{q} \frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{k}} [V^{(1)}_{k+q;\, k,\, q} A_q + V^{(1)}_{k;\, k+q,\, q} A^*_{-q}] = I_1 \tag{3.4}$$

где $\mathbf{v}_k = \partial\omega_k / \partial\mathbf{k}$ — групповая скорость коротких волн. Отметим, что представление поверхности моря в виде длинных волн, на которых имеется рябь, оказалось полезным и в ряде радиофизических задач [7].

Наряду с нормальными корреляторами $\langle a^*a\rangle$, как видно из (2.6), появляются аномальные $\langle a^*a^*\rangle$ $\langle aa\rangle$, уравнения, для которых получаются аналогично и при $q \ll k$ имеют вид

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + 2i\omega_k\right\}\langle a_k a_{q-k}\rangle + 4in_k\,[V^{(1)}_{q;\,k,\,q-k}A_q + V^{(2)}_{k,\,q,\,q-k}\overset{*}{A}_{-q}] = I_2 \tag{3.5}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} - 2i\omega_k\right\}\langle a_k{}^*\overset{*}{a}_{-k-q}\rangle - 4in_k\,[V^{(2)}_{k,\,q,\,k+q}A_q + V^{(1)}_{q;\,k,\,k+q}\overset{*}{A}_q] = I_3$$

интегралы столкновений I_2 и I_3 приведены ниже. Уравнение для амплитуды $A_{-q}{}^*$ и связанных с ней корреляционных функций получаются из (2.6), (3.4), (3.5) комплексным сопряжением и заменой $\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$.

Заметим, что сила в уравнениях (3.4), (3.5) пропорциональна амплитуде когерентной волны. Если с помощью (3.4) в r-представлении написать уравнение для поправки к функции распределения в подсистеме квазичастиц $\delta n_k(\mathbf{r}, t)$, вызванной наличием длинной когерентной волны, то это уравнение в соответствии с (1.2), приобретает смысл линеаризованного кинетического уравнения

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{k}}(r, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}_k\nabla)\,\delta n_k(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\delta\omega_k(\mathbf{r}, t)}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial n_k}{\partial\mathbf{k}} = I^\circ \tag{3.6}$$

где

$$\delta n_k(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\int[\langle a_k{}^*a_{k+q}\rangle + \langle \overset{*}{a}_{k-q}a_k\rangle]\,e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}d\mathbf{q} \tag{3.7}$$

$$I^\circ = \frac{1}{2}\int[I_1(\mathbf{q}) + I_1{}^*(-\mathbf{q})]\,e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}d\mathbf{q}$$

а добавка к частоте коротких волн, связанная с модуляцией когерентной волной, имеет вид

$$\delta\omega_k(\mathbf{r}, t) = 2\int[V^{(1)}_{k+q;\,k,\,q}A_q + V^{(1)}_{k;\,k+q,\,q}\overset{*}{A}_{-q} + B_1]\,e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}d\mathbf{q} \tag{3.8}$$

Здесь B_1 — комплексно-сопряженные слагаемые с заменой $\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$.

Величина $\delta\omega_k(\mathbf{r}, t)$ включает в себя как допплеровский сдвиг, так и поправки, связанные с действием сил инерции и изменением локального масштаба на длинной когерентной волне; I° отличается от I^c в выражении (1.2) наличием аномальных корреляционных функций.

Аномальные корреляторы в линейном приближении по A_q появляются вследствие нарушения хаотизации фаз в турбулентной подсистеме при наличии когерентной волны и из-за наличия в функции Гамильтона членов, описывающих процессы с несохранением числа квазичастиц.

4. Дисперсия и поглощение длинных волн. Уравнения для амплитуды когерентной волны A_q (2.6) и корреляционных функций $\langle a_k{}^*a_{k+q}\rangle$, $\langle a_k a_{q-k}\rangle$, $\langle a_k{}^*a^*{}_{-k-q}\rangle$ (3.4) и (3.5) вместе с уравнениями для амплитуд $A_{-q}{}^*$, A_{-q}, $A_q{}^*$ и соответственно связанных с ними корреляционных функций, которые получаются из приведенных выше заменой $\mathbf{q}$ на $-\mathbf{q}$ и комплексным сопряжением, образуют полную систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающую взаимное влияние длинных когерентных волн и турбулентности. Различные типы корреляционных функций оказываются связанными как в уравнениях для амплитуд когерентных волн (2.6), так и в «интегралах столкновений» (5.1), (5.2). Полную систему уравнений можно символически представить следующим образом:

$$\hat{D}_{il}A_l = -i\int P_{il}f_l\,d\mathbf{k} \tag{4.1}$$

$$\hat{K}_{il}f_l + \hat{\nu}_{il}f_l = Q_{il}A_l \tag{4.2}$$

Здесь A_l — совокупность всех амплитуд когерентных волн — A_q, A_{-q}^*, A_{-q}, A_q^*; f_i — парные корреляционные функции (нормальные и аномальные), индуцированные когерентной волной с амплитудой A_l; вид дифференциальных операторов $\hat{D}_{il}$, $\hat{K}_{il}$ и матриц P_{il} и Q_{il} ясен из сравнения (4.1) и (4.2) с уравнениями (2.6), (3.4), (3.5) и остальными уравнениями, входящими в систему. Интегральный оператор $\hat{\nu}_{il}$ описывает взаимодействие в турбулентной подсистеме

$$-\hat{\nu}_{1l} f_l = I_1, \quad -\hat{\nu}_{2l} f_l = I_2, \quad -\hat{\nu}_{3l} f_l = I_3$$

как видно из уравнения (2.6), амплитуды когерентных волн A_q и A_{-q}^* (а также A_{-q} и A_q^*) оказываются связанными попарно. Однако в интегралах столкновений связаны друг с другом все корреляционные функции, входящие в уравнения, и, таким образом, интеграл столкновений связывает все четыре амплитуды — A_q, A_{-q}^*, A_{-q}, A_q^*.

Решение (4.2) в фурье-компонентах по времени в случае безграничной системы можно формально записать в виде

$$f_i = R_{il}(\omega) Q_{lm} A_m \tag{4.3}$$

где $R_{il}(\omega)$ — временная фурье-компонента оператора Грина уравнений для корреляционных функций. Производя преобразование Фурье по времени в (4.1) и подставляя (4.3) в (4.1), получим

$$D_{il}(\omega) A_l = -i\sigma_{im}(\omega) A_m, \quad \sigma_{im} = \int P_{il} R_{ln}(\omega) Q_{nm} d\mathbf{k} \tag{4.4}$$

Выделяя из матрицы D_{il} члены, связанные со взаимодействием

$$D_{il} = (-\omega + \omega_q{}^i)\,\delta_{il} + D_{il}^{\mathrm{int}}, \quad \omega_q^i = \pm\,\omega_q$$

и группируя их с σ_{il}, перепишем (4.4) в виде

$$\{(-\omega + \omega_q{}^i)\,\delta_{il} + d_{il}\}\, A_l = 0, \quad (d_{il} = D_{il}^{\mathrm{int}} + i\sigma_{il}) \tag{4.5}$$

Здесь не приводится выражение для d_{il}, которое может быть получено из сравнения с предыдущими формулами. Дисперсионное уравнение получаем, приравнивая нулю детерминант однородной линейной системы уравнений (4.5)

$$\mathrm{Det}\, |\, (-\,\omega + \omega_q{}^i)\,\delta_{il} + d_{il}\, | = 0 \tag{4.6}$$

Анализ уравнений (4.4), (4.6) весьма сложен. Ограничимся случаем, когда можно не учитывать связь между различными типами корреляторов в интегралах столкновений, которые запишем в τ-приближении

$$I_1 \sim -\,\nu_1 \langle a^*{}_k a_{k+q} \rangle, \quad I_2 \sim -\,\nu_2 \langle a_k a_{q-k} \rangle, \quad I_3 \sim -\,\nu_3 \langle a_k{}^* a^*{}_{-k-q} \rangle$$

Тогда уравнения (4.4) распадутся на две системы, связывающие амплитуду A_q с A_{-q}^* и A_{-q} с A_q^*

$$\begin{aligned} -\,(\omega - \omega^\circ)\, A_q + \lambda\,(\mathbf{q})\, A^*{}_{-q}{}^* &= 0 \\ -\,(\omega + \omega^{\circ *})\, A_{-q}{}^* - \lambda^*(\mathbf{q})\, A_q &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

где

$$\omega^\circ \equiv \omega_q + 2\int \Bigg[W^{(1)}_{kq,\,qk} n_k + \frac{2\,|V^{(1)}_{k+q;\,k,\,q}|^2}{\mathbf{q}\mathbf{v}_k - \omega - i\nu_1}\,\mathbf{q}\,\frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{k}} - \frac{2\,|V^{(1)}_{q;\,k,\,q-k}|^2 n_k}{2\omega_k - \omega - i\nu_2} - \frac{2\,|V^{(2)}_{k,\,q,\,k+q}|^2 n_k}{2\omega_k + \omega + i\nu_3} \Bigg] d\mathbf{k} \tag{4.8}$$

$$\lambda(q) \equiv \int \Bigg[W^{(2)}_{k;\,q,\,k,\,-q} n_k + \frac{2V^{(1)}_{k+q;\,k,\,q} V^{(1)}_{k-q;\,k,\,q}}{\mathbf{q}\mathbf{v}_k - \omega - i\nu_1}\,\mathbf{q}\,\frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{k}} - \frac{2V^{(1)}_{q;\,k,\,q-k} V^{(2)}_{k,\,q,\,q-k} n_k}{2\omega_k - \omega - i\nu_2} - \frac{2V^{(1)}_{q;\,k,\,k+q} V^{(2)}_{k,\,q,\,k+q} n_k}{2\omega_k + \omega + i\nu_3} \Bigg] d\mathbf{k}$$

ω_q — частота длинной волны с волновым вектором q в отсутствие турбулентности. Аналогичные уравнения связывают A_{-q}и $A_q{}^*$. Из (4.7) получаем, что корни дисперсионного уравнения

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{|\omega_q{}^\circ|^2 - |\lambda(q)|^2 - (\operatorname{Im}\omega_q{}^\circ)^2} + i \operatorname{Im}\omega_q{}^\circ \tag{4.9}$$

Из (4.7) видно, что в линейном приближении по взаимодействию корни дисперсионного уравнения имеют вид

$$\omega_1 = \omega_q{}^\circ, \qquad \omega_2 = -\omega_q{}^{\circ *}$$

Из (4.1) видно, что вследствие взаимодействия через турбулентную подсистему волны с волновыми векторами $\mathbf{q}$ и $-\mathbf{q}$ оказываются связанными. Благодаря этому снимается вырождение по частоте у длинных волн, распространяющихся в противоположных направлениях и возникают новые типы колебаний, нормальные координаты которых b_q и $b_{-q}{}^*$ в линейном по $\lambda(\mathbf{q})/\omega_q$ приближении имеют вид

$$b_q = A_q + \frac{\lambda(\mathbf{q})}{2\omega_q} A_{-q}^*, \qquad b_{-q}^* = A_{-q}^* + \frac{\lambda^*(\mathbf{q})}{2\omega_q} A_q \tag{4.10}$$

Таким образом, распространение когерентной волны в области, где имеется статистически однородная изотропная турбулентность, сопровождается появлением отраженной волны с коэффициентом отражения $\lambda(q)/2\omega_q$. Используя оценки для матричных элементов при $q \ll k$

$$V^{(1)}_{k+q;\,k,\,q} \sim -V^{(1)}_{k;\,k+q,\,q} \sim g^{1/4} k q^{3/4} \cos(\hat{\mathbf{k}, \mathbf{q}}), \qquad V^{(2)}_{k,\,q,\,k+q} \sim -V^{(1)}_{q;\,k,\,q-k} \sim g^{1/4} k q^{3/4}$$

и частот столкновений $\nu(k) \sim c_1{}^2 k^2 \omega_k{}^{-1}$ [1,2], для гравитационной и $\nu(k) \sim c_2 k^{3/4}$ для капиллярной ряби (см. также п. 5) получаем, что коэффициент отражения длинной гравитационной волны при наличии гравитационной ряби имеет порядок

$$\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2\omega_q} \sim \sqrt{\frac{\nu(k_a)}{\omega_a}\frac{q}{k_a}} + \frac{i\omega_q}{\sqrt{\nu(k_a)\,\omega_a}}\left(\frac{q}{k_a}\right)^{3/2}$$

при наличии капиллярной ряби

$$\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2\omega_q} \sim \frac{\nu(k_a)}{\omega_a}\frac{q}{k_a} - \frac{\omega_q}{\nu(k_a)}\left(\frac{q}{k_a}\right)^2 + i\left(\frac{q}{k_a}\right)^2$$

Здесь ω_a — частота, соответствующая низкочастотной границе инерционного интервала гравитационной турбулентности, $\mathbf{k}_a$ — низкочастотная граница интервала гравитационной или капиллярной турбулентности.

Рассмотрим дополнительное затухание когерентной волны при наличии турбулентности. Длинная когерентная волна вызывает отклонение распределения квазичастиц от стационарного (1.1). Взаимодействие в турбулентной подсистеме восстанавливает стационарное распределение и тем самым приводит к дополнительному затуханию когерентной волны.

Оценивая выражение (4.8) при условии $\omega\nu^{-1}(\mathbf{k}) \ll 1$, получаем, что когда длинная гравитационная волна распространяется в области, где имеется гравитационная рябь, декремент дополнительного затухания длинной волны по порядку величины равен

$$\frac{\operatorname{Im}\omega}{\omega} \sim \frac{\omega_q}{\sqrt{\omega_a \nu(k_a)}}\left(\frac{q}{k_a}\right)^{3/2} \tag{4.11}$$

в случае, когда рябь капиллярная, декремент затухания имеет вид

$$\operatorname{Im}\omega / \omega \sim (q / k_a)^2 \tag{4.12}$$

Дополнительное затухание длинной гравитационной волны в присутствии гравитационной ряби преобладает над вязким при $c_1 \ll (q/k_a)^{1/2} \times \omega / \gamma k^2{}_a$, в присутствии капиллярной ряби — при $q \gg (\gamma k_a)^2 g^{-1}$, где γ — кинематическая вязкость воды. Более подробно затухание длинных волн на турбулентности будет рассмотрено отдельно.

5. Интеграл столкновений. Интегралы столкновений I_1, I_2, I_3 в уравнениях (3.4), (3.5), описывающие процессы взаимодействия волн в турбулентной подсистеме при наличии когерентной волны выводятся путем расцепления цепочек уравнений для корреляционных функций (см. [8]). Для записи получающихся при этом довольно громоздких выражений удобно воспользоваться обозначениями, близкими к обозначениям Хассельмана [4]: введем дополнительный параметр s, который принимает значения ± 1, причем

$$a^s = \begin{cases} a^+ \equiv a^*, & s = +1 \\ a^- \equiv a, & s = -1 \end{cases}$$

В этих обозначениях уравнения (2.6), (3.4), (3.5) будут иметь вид

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} - is\omega_q\right\} A_{sq}{}^s = -is \sum_{s's''} \int V_{q,\, k,\, q-k}^{-ss's''} \langle a_{s'k}^{s'} a_{s''(q-k)}^{s''} \rangle \, d\mathbf{k} \tag{5.1}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} - i\,(s'\omega_k + s''\omega_{q-k})\right\} \langle a_{s'k}^{s'} a_{s''(q-k)}^{s''} \rangle + 2i\,(s'n_k + s''n_{q-k}) \sum_{s_1} V_{k,\, q-k,\, q}^{-s',-s'',\, s_1} A_{s_1 q}^{s_1} = I^{s's''}$$

где $I^{s's''}$ — интегралы столкновений

$$I^{+-}(-\mathbf{q}) \equiv I_1, \quad I^{--}(-\mathbf{q}) \equiv I_2, \quad I^{++}(-\mathbf{q}) \equiv I_3$$

В случае капиллярной (раснадной) турбулентности интегралы столкновений при $q \ll k$ равны

$$\begin{gathered} I^{s's''} = -2\pi \sum_{s_1 s_2 s_3} \int \{ s' V_{k12}^{-s' s_1 s_2} [V_{k12}^{s_3,-s_1,-s_2} (s_1 n_2 + s_2 n_1) \langle a_{s_3}{}^{s_3} a_{s''(q-k)}^{s''} \rangle \times \\ \times \delta(s_3\omega_k - s_1\omega_1 - s_2\omega_2) + 2V_{21k}^{s_3,-s_1,-s''} (s_1 n_k + s'' n_1) \times \\ \times \langle a_{s_3(q-k_2)}^{s_3} a_{s_2 k_2}^{s_2} \rangle \, \delta(s_3\omega_2 - s_1\omega_1 - s''\omega_k)] \, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + B_2 \} \, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \end{gathered} \tag{5.2}$$

Здесь B_2 — члены с заменой $s' \rightleftarrows s''$ и одновременно $\mathbf{k} \rightleftarrows \mathbf{q} - \mathbf{k}$.

Для получения интегралов столкновений в случае гравитационной (нераспадной) турбулентности произведем сначала с гамильтонианом (2.3) каноническое преобразование, чтобы исключить члены, кубические по нормальным координатам. Необходимо иметь в виду, что при наличии когерентной волны среднее по ансамблю фаз значение нормальных координат отлично от нуля. Поэтому, прежде чем производить каноническое преобразование, необходимо представить нормальные координаты в виде: $a^s = a'^s + \langle a^s \rangle$, после чего из кубических членов в гамильтониане выделить те, которые являются линейными по $\langle a \rangle$. Выделенные члены вместе с

$$H_0 = \int \omega_k a_k{}^* a_k d\mathbf{k}$$

будут представлять собой новый (перенормированный из-за наличия когерентной волны) гамильтониан невзаимодействующих квазичастиц

$$\widetilde{H}_0 = H_0 + \sum_{s_1 s_2 s_3} \int V_{123}^{s_1 s_2 s_3} a_1^{s_1} a_2^{s_2} \langle a_3^{s_3} \rangle \, \delta(s_1 \mathbf{k}_1 + s_2 \mathbf{k}_2 + s_3 \mathbf{k}_3) \, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3$$

после чего можно производить каноническое преобразование но уже с H_0. Выделение когерентной волны в нормальных координатах позволяет учесть в гамильтониане перенормировку частоты в линейном по A приближении и приводит к появлению силового члена в кинетическом уравнении. Интегралы столкновений для гравитационной турбулентности при $q \ll k$ имеют вид

$$\begin{gathered} I_g^{s's''} = -\frac{2\pi}{3} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int \{ s' T_{k123}^{-s' s_1 s_2 s_3} [T_{k123}^{s_4, -s_1, -s_2, -s_3} (s_1 n_2 n_3 + s_2 n_1 n_3 + \\ + s_3 n_1 n_2) \langle a_{s''(q-k)}^{s''} a_{s_4 k}^{s_4} \rangle \, \delta(s_4 \omega_k - s_1 \omega_1 - s_2 \omega_2 - s_3 \omega_3) + 3 T_{1k23}^{s_4, -s', -s_2, -s_3} \times \\ \times (s'' n_2 n_3 + s_2 n_k n_3 + s_3 n_k n_2) \langle a_{s_1 k_1}^{s_1} a_{s_4 (q-k_1)}^{s_4} \rangle \, \delta(s_4 \omega_1 - s'' \omega_k - s_2 \omega_2 - s_3 \omega_3)] \times \\ \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + B_3 \} \, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \end{gathered} \tag{5.3}$$

Здесь B_3 — члены с заменой $s' \rightleftarrows s''$ и одновременно $\mathbf{k} \rightleftarrows \mathbf{q} - \mathbf{k}$, T — матричный элемент «эффективного» четырехчастичного гамильтониана (см. [2]), в котором при помощи канонического преобразования исключены члены третьего порядка по a'.

6. Спектр турбулентности в присутствии длинных волн. Фурье-компонента коррелятора возвышений поверхности жидкости определяется соотношением

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \, \zeta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) \rangle \, e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} \tag{6.1}$$

В стационарном случае между функцией распределения n_k и спектром $S(k)$ имеется простая связь

$$S(k) = \left(\frac{4k}{g + \alpha k^2/\rho} \right)^{1/2} n_k$$

Используя формулы перехода к каноническим переменным (2.2), получим, что длинная когерентная волна приводит к модуляции спектра и появлению дополнительного слагаемого в спектре

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = S(k) + \delta S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$$

зависящего от координат и времени

$$\delta S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \left(\frac{4k}{g + \alpha \rho^{-1} k^2} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \{ \langle a_k a_{q-k} \rangle + \langle a_{-k}^* a_{k-q}^* \rangle + \langle a_{-k}^* a_{q-k} \rangle + \langle a_{k-q}^* a_k \rangle \} \tag{6.2}$$

Подставляя выражения для корреляторов из (4.3), получим, что в линейном по амплитуде когерентной волны приближении неоднородная часть спектра турбулентности, вызванная наличием когерентной волны, имеет вид

$$\delta S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \left(\frac{4k}{g + \alpha \rho^{-1} k^2} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sum_j R_{jl}(\omega) \, Q_{lm} A_m \tag{6.3}$$

где индекс j принимает значения от 1 до 4, что соответствует четырем корреляторам в выражении (6.2). Для оценки $\delta S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$ заменим, как и прежде, интегралы столкновений временами релаксации, тогда (6.3) будет иметь вид

$$\delta S(\mathbf{k},\mathbf{r},t) = -\left(\frac{4k}{g+\alpha\rho^{-1}k}\right)^{1/2} e^{i\mathbf{qr}}\left\{\frac{4n_k\left(V^{(1)}_{q;\,k,\,q-k}A_q + V^{(2)}_{k,\,q,\,q-k}A^{*}_{-q}\right)}{2\omega_k-\omega-i\nu} - \right.$$

$$\left. - 2\mathbf{q}\,\frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{k}}\,\frac{V^{(1)}_{q-k;\,k,\,q}A_q + V^{(1)}_{k;\,q-k,\,q}A^{*}_{-q}}{-\omega+\mathbf{q}\mathbf{v}_k-i\nu} + B_4\right\} \qquad (6.4)$$

Здесь B_4 — комплексно-сопряженные члены с заменой $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$, $\mathbf{q}\to-\mathbf{q}$, $\omega\to-\omega$.

Оценивая (6.4) по порядку величины при $q \ll k_0^2/k$, $\omega\nu^{-1}(k) \ll 1$, имеем

$$\operatorname{Re}\delta S(\mathbf{k},\mathbf{r},t) \sim q\zeta^{\circ}(\mathbf{r},t)\left[\left(\frac{\omega^q}{\omega_k}\right)^2\frac{k}{q} + \frac{2\omega_q^2}{\nu^2}\cos^2(\hat{\mathbf{k},\mathbf{q}})\right]S(k) \qquad (6.5)$$

где $\zeta^{\circ}(\mathbf{r}, t)$ — возвышение длинной волны.

Для случая гравитационной турбулентности, учитывая малость величины $[\omega_q/\nu(k)]^2 \ll 1$, получаем

$$\delta S(\mathbf{k},\mathbf{r},t) \sim q\zeta^{\circ}S(k)$$

для капиллярной турбулентности

$$\text{при } \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \gg \left[\frac{\omega_q}{\nu(k)}\right]^2 \quad \delta S(\mathbf{k},\mathbf{r},t) \sim q\zeta^{\circ}(\mathbf{r},t)\left[\frac{\omega_q}{\nu(k)}\right]^2 S(k)\cos(\hat{\mathbf{k},\mathbf{q}})$$

Последний результат можно получить, если принять во внимание, что в рассматриваемом случае можно записать

$$\operatorname{Re}\frac{\delta S(\mathbf{k},\mathbf{r},t)}{S(\mathbf{k})} \sim \operatorname{Re}\frac{\delta n_k(\mathbf{r},t)}{n_{\mathbf{k}}}$$

Из кинетического уравнения (3.6) при $qv_k \ll \omega_q$, $\omega_q\nu^{-1}(k) \ll 1$ получаем

$$\operatorname{Re}\delta n_k(\mathbf{r},t) \sim \delta\omega_k(\mathbf{r},t)\,\mathbf{q}\,\frac{\partial n_k}{\partial\mathbf{k}}\,\frac{\omega_q}{\nu^2(k)} \qquad (6.6)$$

Дополнительный член в законе дисперсии коротких волн обусловлен в основном допплеровским сдвигом частоты. Таким образом,

$$\delta\omega_k \sim \mathbf{k}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) \sim \omega_k\sqrt{kq}\,\zeta^{\circ}\cos(\hat{\mathbf{k},\mathbf{q}})$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — скорость смещения поверхности жидкости, вызванного наличием длинной гравитационной волны. Подставляя последнее выражение в (6.6), получаем

$$\operatorname{Re}\frac{\delta S(\mathbf{k},\mathbf{r},t)}{S(k)} \sim q\zeta^{\circ}(\mathbf{r},t)\left[\frac{\omega_q}{\nu(k)}\right]^2\cos(\hat{\mathbf{k},\mathbf{q}})$$

Поступила 20 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. Слабая турбулентность капиллярных волн. ПМТФ, 1967, № 5, стр. 62.
2. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, стр. 1292.
3. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1969.
4. Хассельман К. Описание нелинейных взаимодействий методами теоретической физики (с приложением к образованию волн ветром). Сб. «Нелинейная теория распространения волн». М., «Мир», 1970.
5. Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, p. 565.
6. Конторович В. М. Уравнения теории упругости и дисперсия звука в металлах. ЖЭТФ, 1963, т. 45, стр. 1638.
7. Bass F. G., Fuks I. M., Kalmykov A. I., Ostrovsky I. E., Rosenberg A. D. Very high frequency radiowave scattering by a disturbed sea surface, pt 1, 2, Trans. IEEE, AP-16, 1968, No. 5.
8. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1944.