

О ДРОБЛЕНИИ СТРУИ ЖИДКОСТИ, ОБТЕКАЕМОЙ  
ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

*В. А. Бородин, Л. Н. Бритнева, Ю. Ф. Димякин,  
В. И. Ягодкин*

(Москва)

Задача о распаде цилиндрической струи идеальной жидкости, поперечно-обтекаемой потоком другой идеальной жидкости, имеет как самостоятельное, так и вспомогательное значение при анализе колебаний и дробления на части жидкого тора [1].

В данной работе изучаются два вида волн, распространяющихся по поверхности струи: а) тангенциальные волны, деформирующие струю в плоскости ее поперечного сечения и приводящие к дроблению ее на продольные нити; б) продольные волны.

Имеются две работы [2, 3], в которых изучалось воздействие на цилиндрическую струю жидкости плоской ударной волны, направленной нормально к оси струи.

Опыты, выполненные в этих работах, показали, что для данной скорости газа, обтекающего струю, существует некоторый критический диаметр струи; при значениях диаметра, меньших критического, струя оказывается устойчивой и не может быть разрушена ударной волной данной интенсивности. Как видим, этот вывод аналогичен выводу о существовании критического значения числа Вебера ( $W = aU_0^2\rho_2/\sigma$ ,  $a$  — радиус капли,  $U_0$  — относительная скорость капли,  $\rho_2$  — плотность жидкости внешней среды,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости среды) при распаде капли в потоке газа [4, 5, 6].

Упомянутые опыты обосновывают применимость метода малых возмущений к решению задачи о дроблении струи.

1. Пусть струя идеальной жидкости радиуса  $a$  (плотность  $\rho_1$ ) обтекается нормально к оси потоком другой жидкости (плотность  $\rho_2$ ) с постоянной скоростью  $U_0$ .

Потенциал скорости возмущений обозначим для струи через  $\Phi_1(r, \varphi, t)$ , для среды — через  $\Phi_2(r, \varphi, t)$ , где  $r$ ,  $\varphi$  — цилиндрические координаты,  $t$  — время. Скорость на границе раздела при  $r = a$   $U_\varphi = 2U_0 \sin \varphi$ .

Потенциал скорости возмущенного движения жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.1)$$

Скорости возмущений выражаются через

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\varphi = r^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (1.2)$$

Давление при возмущенном движении жидкости определяется интегралом Лагранжа — Коши

$$\frac{p}{\rho} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U_\varphi v_\varphi \quad (1.3)$$

Пусть зависимость потенциала скоростей от времени имеет вид

$$\Phi(r, \varphi, t) = u(r, \varphi) e^{-i\beta t} \quad (1.4)$$

где  $\beta$  — комплексная частота колебаний. Границные условия следующие.

1. Непрерывность нормальных составляющих скоростей на границе раздела

$$v_{r_i} = v_{r_z} + U_n, \quad r = a + \xi \quad (1.5)$$

Здесь  $\zeta$  — радиальное отклонение возмущенной поверхности от цилиндра,  $U_n$  — проекция скорости потока на нормаль к возмущенной поверхности струи

$$U_n = \frac{2U_0}{i\beta a} \sin \varphi \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial \varphi} \quad (1.6)$$

Радиальное отклонение  $\zeta$  определяется из соотношения

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (\zeta = \zeta^\circ(\varphi) e^{-i\beta t}) \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) получим первое граничное условие в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{2U_0}{i\beta a} \sin \varphi \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial \varphi} = 0 \quad \text{при } r = a \quad (1.8)$$

2. Равенство разности возмущенных давлений на поверхности струи давлению поверхностного натяжения

$$p_1 - p_2 = \sigma H \quad (H = -\frac{\zeta}{a^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2}) \quad (1.9)$$

Здесь  $H$  — возмущение средней кривизны поверхности раздела.

Из соотношений (1.2) — (1.4), (1.7) и уравнения  $\Delta u_1 = 0$  получим второе граничное условие в виде

$$i\beta u_1 \rho_1 - i\beta u_2 \rho_2 + 2U_0 \sin \varphi \frac{\rho_2}{a} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} = -\frac{\sigma}{i\beta a} \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial r^3} + \frac{3}{a} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right) \quad \text{при } r = a \quad (1.10)$$

Введем безразмерные параметры

$$R = \frac{r}{a}, \quad Z = i\beta \left( \frac{a^2 \rho_1}{\sigma} \right)^{1/2}, \quad M = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad W = \frac{a U_0^2 \rho_2}{\sigma} \quad (1.11)$$

$$\psi = 2U_0 \left( \frac{a \rho_1}{\sigma} \right)^{1/2} \sin \varphi = \psi_0 \sin \varphi, \quad \psi_0 = 2 \left( \frac{W}{M} \right)^{1/2}$$

граничные условия преобразуем к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial R} - \frac{\partial u_2}{\partial R} - \frac{\psi_0 \sin \varphi}{Z} \frac{\partial^2 u_1}{\partial R \partial \varphi} = 0 \quad \text{при } R = 1 \quad (1.12)$$

$$Z^2 u_1 - M Z^2 u_2 + M \psi_0 Z \sin \varphi \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial R^3} + 3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial R^2} = 0 \quad \text{при } R = 1 \quad (1.13)$$

Частные (ограниченные) решения уравнения Лапласа напишем в виде

$$u_1 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m R^m e^{im\varphi}, \quad u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} B_m R^{-m} e^{im\varphi} \quad (1.14)$$

Для  $\psi_0 = 0$  получим собственные значения (частоты колебаний струи)

$$Z^2 = -\frac{m(m^2 - 1)}{M + 1} \quad (1.15)$$

аналогично колебаниям сферической капли (случай Релея). Подставив (1.14) в (1.12) и (1.13), получим для общего случая ( $\psi_0 \neq 0$ )

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ m A_m e^{im\varphi} + m B_m e^{im\varphi} - \frac{\psi_0}{2Z} m^2 A_m e^{i(m+1)\varphi} + \frac{\psi_0}{2Z} m^2 B_m e^{i(m-1)\varphi} \right] = 0 \quad (1.16)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ Z^2 A_m e^{im\varphi} - M Z^2 B_m e^{im\varphi} + \frac{M \psi_0 Z}{2} m B_m e^{i(m+1)\varphi} - \frac{M \psi_0 Z}{2} m B_m e^{i(m-1)\varphi} + m(m^2 - 1) A_m e^{im\varphi} \right] = 0 \quad (1.17)$$

Для того чтобы равенства (1.16) и (1.17) были тождествами относительно координаты  $\varphi$ , необходимо, чтобы коэффициенты при экспонентах были нулями для всех указанных значений индекса  $m$ . Это дает бесконечную линейную систему уравнений для  $A_m, B_m$

(1.18)

$$mA_m + mB_m - \frac{\psi_0}{2Z} (m-1)^2 A_{m-1} + \frac{\psi_0}{2Z} (m+1)^2 A_{m+1} = 0 \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} Z^2 A_m - MZ^2 B_m + \frac{M\psi_0 Z}{2} (m-1) B_{m-1} - \frac{M\psi_0 Z}{2} (m+1) B_{m+1} + \\ + m(m^2-1) A_m = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Исключая из (1.18) и (1.19) величины  $B_m$  и пренебрегая слагаемыми, содержащими малую величину  $M$ , после замены  $\psi_0 = 2(W/M)^{1/2}$ , получим

$$c_{m,m-2}A_{m-2} + c_{m,m}A_m + c_{m,m+2}A_{m+2} = 0 \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} c_{m,m} &= \chi + R_m - D_m W, & R_m &= m(m^2-1) \\ c_{m,m-2} &= C_{m-2}W, & D_m &= 2m^2, & C_m &= m^2 \\ c_{m,m+2} &= E_m W, & E_m &= (m+2)^2, & \chi &= Z^2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Система (1.20) распадается на две независимые системы для четных и нечетных значений индекса  $m$ . Разделив левую и правую части уравнений системы (1.20) на  $c_{m,m}$ , получим

$$A_m = \alpha_m A_{m-2} + \beta_m A_{m+2} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.22)$$

Здесь

$$\alpha_m = -\frac{c_{m,m-2}}{c_{m,m}}, \quad \beta_m = -\frac{c_{m,m+2}}{c_{m,m}} \quad (1.23)$$

При больших значениях  $m$  величины  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  имеют порядок  $O(W/m)$ , т. е. рассматриваемая система является вполне регулярной, начиная с некоторого достаточно большого  $m$  [7]. Положив

$$\begin{aligned} A_{2k+1}/A_1 &= \alpha_3 \alpha_5 \dots \alpha_{2k+1} s_{2k+1}, & \gamma_{2k+1} &= \alpha_{2k+1} \beta_{2k+1} \\ A_{2k}/A_2 &= \alpha_4 \alpha_6 \dots \alpha_{2k} s_{2k}, & \gamma_{2k} &= \alpha_{2k} \beta_{2k-2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

считая коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  известными и отбрасывая уравнения, соответствующие  $m=0, 2$  и  $m=1$ , из (1.22) получим

$$\begin{aligned} s_3 &= 1 + \gamma_5 s_5, & s_4 &= 1 + \gamma_6 s_6 \\ s_5 &= s_3 + \gamma_7 s_7, & s_6 &= s_4 + \gamma_8 s_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{2k+1} &= s_{2k-1} + \gamma_{2k+3} s_{2k+3}, & s_{2k} &= s_{2k-2} + \gamma_{2k+2} s_{2k+2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Решения систем (1.25) можно представить в виде цепных дробей

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= s_{2k-1} \left( \frac{1}{1} - \frac{\gamma_{2k+3}}{1} - \frac{\gamma_{2k+5}}{1} - \dots \right) \\ s_{2k} &= s_{2k-2} \left( \frac{1}{1} - \frac{\gamma_{2k+2}}{1} - \frac{\gamma_{2k+4}}{1} - \dots \right) \end{aligned}$$

Уравнения собственных значений в виде цепных дробей имеют вид

$$1 = \frac{\gamma_3}{1} - \frac{\gamma_5}{1} - \dots, \quad 1 = \frac{\gamma_4}{1} - \frac{\gamma_6}{1} - \dots \quad (1.26)$$

Уравнения (1.26) решались методом последовательных приближений. Последовательные приближения  $i$  значений корней  $W_*^{(i)}$  при  $Z = 0$  приведены в таблице.

Таблица

$i$	$m = 3, 5, \dots$				$m = 4, 6, \dots$			
	0	1.778	—	—	0.75	2.839	—	—
1	0	—	—	—	0.75	—	—	—
2	0	1.778	—	—	0.661	2.839	—	—
3	0	1.2853	4.9813	—	0.6576	1.8502	6.7422	—
4	0	1.247	2.3173	10.8813	0.6556	1.741	3.4350	13.1676
5	0	1.2445	2.379	4.675	0.6560	1.7082	2.570	6.0935
								145.213

Для определения форм возмущений получим уравнение узловых линий на возмущенной поверхности струи. Из (1.2), учитывая (1.4) и (1.14), при  $m = 0$  (симметрия относительно средней плоскости) и  $R = 1$  получим

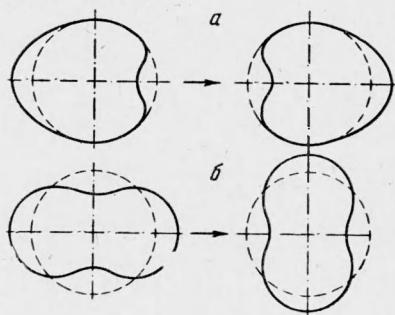
скорость поднятия поверхности струи

$$v_{r_1} = \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{\infty} m A_m R^{m-1} \cos m\varphi e^{-i\beta t} \quad (1.27)$$

Если переход к неустойчивости происходит при  $\chi = 0$ , то  $\beta = 0$ , коэффициенты  $A_m$  действительны, и уравнения узловых линий на возмущенной поверхности струи принимают вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} m A_m \cos m\varphi = 0 \quad (m = 2k \text{ или } m = 2k + 1) \quad (1.28)$$

Фиг. 1.



если собственные значения и значения  $W_*^{(i)}$  определены из системы (1.20). Так как система (1.20) однородна, то коэффициенты  $A_{2m}$  пропорциональны  $A_2$ , а коэффициенты  $A_{2k+1}$  пропорциональны  $A_1$ . Из уравнения (1.28) можно определить значения угла  $\varphi$ , соответствующие узловым линиям нейтрального возмущения.

Уравнения (1.28) дают значение угла  $\varphi = 90^\circ$ , соответствующее  $W_* = 1.2445$  при  $m = 2k + 1$  и  $\varphi = 58^\circ$ , соответствующее  $W_* = 0.656$  при  $m = 2k$ . На фиг. 1 даны схемы форм возмущений поверхности струи, соответствующие различным собственным значениям  $W$ , полученные по скорости деформации поверхности струи из (1.27).

Как видно на фиг. 1, случаю  $m = 2k + 1$  соответствует единственная форма возмущения — сдвиг параллельно направлению обтекающего потока. Случаю  $m = 2k$  соответствуют различные формы возмущений, которые могут привести к образованию двух, четырех и более струй. Величина наименьшего критического числа Вебера оказалась равной  $W_*^{(5)} = 0.656$ .

Найдем зависимость от  $W$  числа узловых линий для случая нарастающих возмущений, обладающих наибольшим инкрементом  $Z$ . Так как из всех форм нарастающих возмущений осуществляется в действительности лишь форма, соответствующая наибольшему значению инкремента  $\chi = Z^2$ , то для определения форм возмущений для заданного значения  $\chi$  из уравнения собственных значений следует находить наименьшее значение корня  $W$ .

Приводим вычисленные при помощи второго уравнения (1.26) значения минимальных корней  $W$  для заданных значений  $\chi$  и углы узловых линий на поверхности струи

$\chi = 0$	5	50	100	1000
$\min W = 0.656$	1.045	2.086	2.540	27.6
$\varphi^\circ = 58$	58	30 и 75	40 и 80	35 и 85

Отсюда видно, что при  $2 \leq W \leq 27.6$  на возмущенной поверхности струи возникают четыре узловые линии.

Сопоставление этих данных и таблицы показывает, что при  $0.656 < W < 1.24$  на струе возникают две узловые линии, и основная струя дробится, следовательно, на две продольные струи. Как идет дробление при  $W > 1.24$ , установить пока не удалось ввиду трудностей при расчете форм возмущений для нечетного  $m$ .

**2.** Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль струи. Этот вопрос существен для изучения распада жидкого тора, радиус которого достаточно велик по сравнению с размерами поперечного сечения [1]. В данном случае можно пренебречь кривизной кольца и ограничиться рассмотрением влияния обтекания на прямолинейный жидкий цилиндр. Следует, однако, учитывать, что на торе могут существовать лишь волны, длина которых укладывается на длине тора целое число раз.

Уравнение Пуассона для этого случая будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

Положив

$$\Phi(r, \varphi, z, t) = u(r, \varphi) e^{-i\beta t + ikz} \quad (2.2)$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - k^2 u = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) имеет частное решение

$$u = u_m(r) \cos m\varphi, \quad u_m(r) = A_m I_m(kr) + B_m K_m(kr) \quad (2.4)$$

Здесь  $I_m(kr), K_m(kr)$  — функции Бесселя мнимого аргумента. Положив

$$ka = a, \quad r = aR \quad (2.5)$$

решения для струи  $U_1$  и для внешней среды  $U_2$  напишем в виде

$$U_1 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m I_m(\alpha R) \cos m\varphi, \quad U_2 = \sum_{m=0}^{\infty} B_m K_m(\alpha R) \cos m\varphi \quad (2.6)$$

Границные условия задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial R} - \frac{\partial U_2}{\partial R} - \frac{\psi_0 \sin \varphi}{Z} \frac{\partial^2 U_1}{\partial R \partial \varphi} &= 0, \quad (R=1) \\ Z^2 U_1 - M Z^2 U_2 + M \psi_0 Z \sin \varphi \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial U_1}{\partial R} - \frac{\partial^3 U_1}{\partial R \partial \varphi^2} + \alpha^2 \frac{\partial U_1}{\partial R} &= 0, \quad R=1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь  $Z, M, \psi_0$  по (1.11). После подстановки (2.5), (2.6) в (2.7) и после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} 2ZI_m'(\alpha) A_m - 2ZK_m'(\alpha) B_m + (m+1) \psi_0 I_{m+1}'(\alpha) A_{m+1} - \\ - (m-1) \psi_0 I_{m-1}'(\alpha) A_{m-1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} 2Z^2 I_m(\alpha) A_m - 2M Z^2 K_m(\alpha) B_m + 2\alpha(\alpha^2 + m^2 - 1) I_m'(\alpha) A_m - \\ - M \psi_0 Z(m+1) K_{m+1}(\alpha) B_{m+1} + M \psi_0 Z(m-1) K_{m-1}(\alpha) B_{m-1} &= 0 \\ (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Исключая из системы (2.8) коэффициенты  $B_s$ , получим систему

$$A_m [Z^2 + R_m + P_m W] - A_{m+2} Q_m W - A_{m-2} S_m W = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} R_m &= \alpha(\alpha^2 + m^2 - 1) \frac{I_m'(\alpha)}{I_m(\alpha)}, \quad S_m = (m-1)(m-2) \frac{K_{m-1}(\alpha) I_{m-2}'(\alpha)}{K_{m-1}'(\alpha) I_m(\alpha)} \\ P_m &= m \frac{I_m'(\alpha)}{I_m(\alpha)} \left[ (m+1) \frac{K_{m+1}(\alpha)}{K_{m+1}'(\alpha)} + (m-1) \frac{K_{m-1}(\alpha)}{K_{m-1}'(\alpha)} \right] \\ Q_m &= (m+1)(m+2) \frac{K_{m+1}(\alpha) I_{m+2}'(\alpha)}{K_{m+1}'(\alpha) I_m(\alpha)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналогично выводу в п. 1, получим

$$\begin{aligned} A_m &= \alpha_m A_{m-2} + \beta_m A_{m+2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \\ \left( \alpha_m = \frac{S_m W}{\xi + R_m + p_m W}, \quad \beta_m = \frac{Q_m W}{\xi + R_m + p_m W} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Используя обозначения (1.24) и аналогичные соображения, придем к таким же уравнениям собственных значений, что и (1.26)

$$1 = \frac{\gamma_3}{1} - \frac{\gamma_5}{1} - \dots, \quad 1 = \frac{\gamma_4}{1} - \frac{\gamma_6}{1} - \dots \quad (2.12)$$

Однако для рассматриваемой задачи построенный алгоритм цепных дробей дает несколько медленную сходимость. Для достоверности вычисленных значений требуется вести расчеты до  $m = 40$ , и они становятся обозримыми. Введем некоторые упрощения.

Воспользуемся первым приближением из формулы Мейсселя для функций Бесселя с большим индексом [8]

$$I_v(vZ) \approx \frac{Z^v \exp\{v(1-Z^2)^{1/2}\}}{(2\pi v)^{1/2} (1-Z^2)^{1/4} \{1+(1-Z^2)^{1/2}\}^v} \quad \text{для } v \gg 1 \quad (2.13)$$

Тогда

$$I_n(nZ) = i^{-n} J_n(inZ) = \frac{Z^n \exp\{n(1-Z^2)^{1/2}\}}{(2\pi n)^{1/2} (1+Z^2)^{1/4} \{1+(1+Z^2)^{1/2}\}^n} \quad (2.14)$$

Из рекуррентного соотношения [8] для функций Бесселя имеем

$$\frac{I_n'(\alpha)}{I_n(\alpha)} = \frac{I_{n-1}(\alpha)}{I_n(\alpha)} - \frac{n}{\alpha}$$

$$\frac{K_n(\alpha)}{K_n'(\alpha)} = - \left( \frac{K_{n-1}(\alpha)}{K_n(\alpha)} + \frac{n}{\alpha} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Применив формулу (2.14) к (2.15), получим

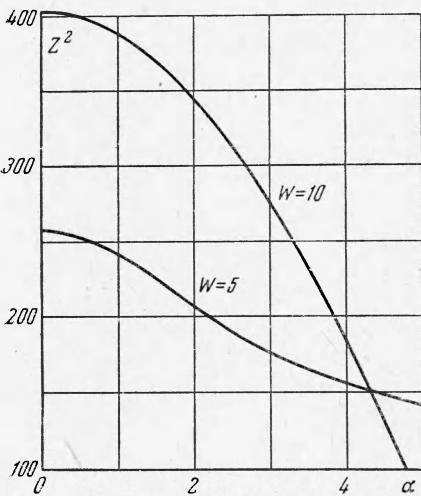
$$M_n = \frac{I_n'(\alpha)}{I_n(\alpha)} = \frac{n^2}{e^{\alpha} [\alpha(n-1)^{n-1}]} - \frac{n}{\alpha}$$

и, так как  $n^n / (n-1)^{n-1} \sim e(n-1)$  при  $n \gg 1$ , то

$$M_n = \frac{n-2}{\alpha} \sim \frac{n}{\alpha} \quad (2.16)$$

Аналогично можно показать, что для больших индексов

$$N_n = \frac{K_n(\alpha)}{K_n'(\alpha)} \sim - \frac{\alpha}{n} \quad (2.17)$$



Фиг. 2

Если использовать (2.15) — (2.17), то можно вместо (1.21) — (1.24) получить такой алгоритм для вычисления  $\gamma_n$

$$\gamma_n = W^2 \frac{n(n-1)^2(n-2) M_n M_{n-2} N_{n-1}^2}{E F} \quad (2.18)$$

$$E = \zeta + \alpha(a^2 + n^2 - 1) M_n + nWM_n[(n+1)N_{n+1} + (n-1)N_{n-1}]$$

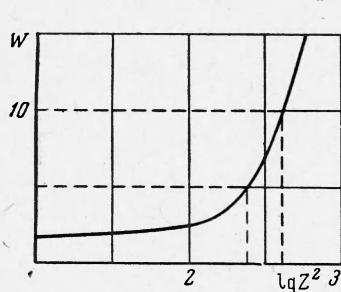
$$F = \zeta + \alpha[a^2 + (n-2)^2 - 1] M_{n-2} + W(n-2)M_{n-2}[(n-1)N_{n-1} + (n-3)N_{n-3}]$$

причем при  $n < 20$  используются формулы (2.15), при  $n > 20$  — формулы (2.16) и (2.17).

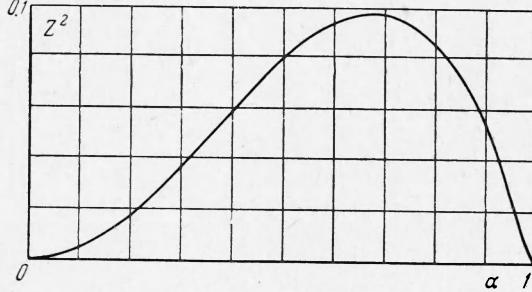
Приводим вычисленные значения корня  $\zeta = Z^2$  уравнения собственных значений (2.12) для двух значений числа Вебера (фиг. 2).

$\alpha = 0$	1	2	5	
$\zeta = 257.8$	241.8	205	140.3	для $W = 5$
$\zeta = 402.3$	386.3	343.5	74.5	для $W = 10$

Как видно из этого графика,  $\zeta = 256$  и 403 при  $\alpha = 0$ . Если изобразить на графике по приведенным данным кривую  $W = f(\zeta)$  (фиг. 3), то можно убедиться, что приведенные значения квадрата



Фиг. 3



Фиг. 4

инкремента  $\zeta$  при  $\alpha = 0$  по данным фиг. 2 хорошо согласуются с приведенными выше результатами на фиг. 3. Таким образом, результаты решения первой и второй задач, выполненного в настоящей работе, хорошо согласуются. Кривые фиг. 2 дают максимум инкремента при  $\alpha = 0$ , что соответствует длине волны  $\lambda = \infty$ .

На фиг. 4 дана кривая изменения инкремента по волновому числу для  $W = 0$ , т.е. для случая, аналогично случаем Релея в задачах о колебании сферической капли. Как видим, точка максимума соответствует  $\zeta = Z^2 < 0.1$ , и, таким образом влияние обтекания (фиг. 2) увеличивает значение инкремента колебаний во много раз.

Если применить полученные результаты к задаче о колебаниях тора [10, 1], то можно, по-видимому, утверждать следующее: так как на торе могут возникать лишь волны длина которых укладывается на нем целое число раз, то наименьшим числом частей, на которые может раздробиться тор, является два. Фиг. 2 показывает, что две волны на торе действительно могут возникнуть и, более того, что преимущественно будут возникать две волны. Это подтверждается также и экспериментально. На фотографиях, приведенных в работе Лейна [1], отчетливо видно возникновение двух узлов на жидким торе, обдуваемом потоком воздуха.

Поступила 22 V 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

- Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф., Ягодкин В. И. О механизмах распада капли, движущейся в газовом потоке. Ж. прикл. механ. и техн. физ., 1964, № 3.
- Priem J. Break up of water drops and sprays with a shock wave. Jet Propuls., 1957, vol. 27, No. 10, p. 1084.
- Morell G. Break up of liquid jets by transverse shocks. Eighth symposium on combustion, Baltimore, 1962.
- Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф., Ягодкин В. И. О дроблении сферической капли в газовом потоке. Ж. прикл. механ. и техн. физ., 1962, № 1, стр. 85.
- Волынский М. С. О дроблении капель в потоке воздуха. Докл. АН СССР, 1948, т. 62, № 3, стр. 304.
- Волынский М. С. Изучение дробления капель в газовом потоке. Докл. АН СССР, 1949, т. 63, № 2.
- Канторович Л. В., Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. ОНТИ, М.—Л., 1936.
- Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. Изд. иностр. лит., М., 1949, стр. 254.
- Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и производствений. Физматгиз, 1962.
- Oka S. On the instability and breaking up of a ring of liquid into small drops. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 2-nd ser., 1936, vol. 18, No. 9, p. 524.
- Lane W. R. Shatter of drops in streams. Ind. Engng. Chem., 1951, vol. 43, No. 6, p. 1312.