

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА КАТОДЕ

И. П. Острецов, В. А. Петросов, А. А. Поротников,  
Б. Б. Родневич

(Москва)

Рассматривается характер поведения функции распределения напряженности электрического поля на катоде с учетом влияния только ближайшего соседа и сравнивается с поведением функции распределения, полученной с учетом влияния многих ионов. При вычислении функции распределения учтено движение ионов в прикатодной области и неравномерность их концентрации в ней. Показано, что в широком диапазоне параметров полученная функция распределения мало отличается от функции распределения, найденной в предположении постоянства концентрации.

В работе [1] был предложен способ учета влияния на эмиссионные характеристики горячих катодов флуктуирующих микрополей, возникающих на фоне среднего поля благодаря движению отдельных ионов вблизи эмиттирующей поверхности. Такой учет можно осуществить осреднением плотности тока термоэмиссии  $j_0$ , вычисленной по формуле Ричардсона — Дэшмана с поправкой Шоттки, по функции распределения электрического поля  $E$  на поверхности катода  $f(E)$ . В работе [2] была найдена эта функция распределения  $f(E)$  и проведена операция осреднения по ней величины  $j_0$

$$\langle j \rangle = \int j_0(E) f(E) dE \quad (j_0 = AT^2 \exp(-e\phi_0/kT + e\sqrt{eE}/kT))$$

Здесь  $A$  — постоянная термоэмиссии,  $e$  — заряд электрона,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура катода,  $\phi_0$  — работа выхода.

В работе [2] предполагалось, что, во-первых, напряженность поля в данной точке катода зависит от положения ближайшего к ней иона, во-вторых, концентрация ионов  $n$  в прикатодной области разряда считается постоянной. Рассмотрим эти предположения более детально.

1. Покажем, что значение функции распределения  $f(E)$  при больших значениях  $E$  определяется положением ближайшего иона.

Пусть точка  $(x_0, y_0)$  находится на поверхности катода. Опишем вокруг нее полусферу радиуса  $R$  и предположим, что в эту полусферу попало  $N$  ионов. Величина электрического поля, создаваемого этими ионами в точке  $(x_0, y_0)$ , равна

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3} = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k$$

Будем рассматривать поле на поверхности катода без учета зеркального отображения ионов и, кроме того, вектор напряженности поля  $\mathbf{E}$ , а не его нормальную составляющую  $E_z$ . Это приведет к изменению коэффициентов в функции распределения, сам же характер ее принципиально не изменится.

Далее считаем, что при  $R \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  причем  $N / \frac{2}{3}\pi R^3 = n$ , где  $n$  — концентрация ионов в основном объеме плазмы; пока положим

$n = \text{const}$ , а затем покажем, что и при переменном  $n$  основные соотношения изменятся не принципиально.

Найдем вероятность того, что  $E$  находится в интервале  $[E_0 \div E_0 + dE]$ . Используя метод Маркова, подробно рассмотренный в [3], имеем

$$f_N(E_0) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\rho E_0) A_N(\rho) d\rho$$

$$A_N(\rho) = \sum_{k=1}^N \int_{|r_k|=0}^R \exp(i\rho E_k) \tau_k(r_k) dr_k$$

где  $\tau_k(r_k)$  — распределение, которое определяет вероятность того, что  $k$ -й ион имеет координаты  $r_k$ . Предположим далее, что имеют место только флуктуации, совместимые с постоянством средней плотности, т. е.  $\tau_k(r_k) = {}^{2/3}\pi R^3 \tau(q)$ , где  $\tau(q)$  — частота, с которой встречаются ионы. Тогда

$$A_N(\rho) = \left[ \frac{3}{2\pi R^3} \int_{|r|=0}^R \exp(i\rho\varphi) \tau(q) dr \right]^N \quad (\varphi = qr / |r|^3)$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ , имеем

$$f(E) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\rho E) A(\rho) d\rho$$

$$A(\rho) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{3}{2\pi R^3} \int_{|r|=0}^R \exp(i\rho\varphi) \tau(q) dr \right]^{2\pi R^3 n / 3}$$

Вычисляя  $A(\rho)$ , имеем

$$A(\rho) = \exp \left[ -\frac{2n}{15} (2\pi q)^{3/2} |\rho|^{3/2} \right]$$

и тогда

$$f(E) = \frac{1}{2\pi^2 |E|^3} \int_0^{\infty} \exp \left( -\frac{ax^{3/2}}{|E|^{3/2}} \right) x \sin x dx$$

$$(x = |\rho| |E|, \quad a = {}^{4/15} (2\pi q)^{3/2} n / 2)$$

Асимптотическое поведение распределения  $f(E)$  при  $|E| \rightarrow \infty$  имеет вид.

$$f(E) = \pi q^{3/2} n |E|^{-5/2} \quad (1.1)$$

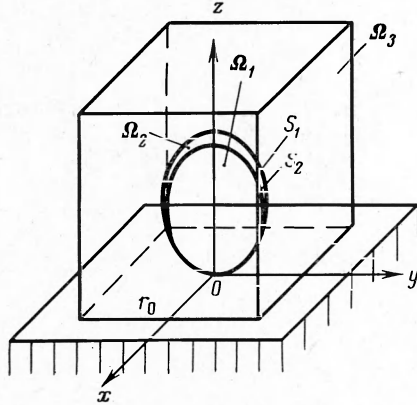
Главная часть тока термоэмиссии определяется большими значениями  $E$ . Распределение (1.1), полученное с учетом влияния всех ионов, которые находятся вблизи данной точки на катоде, с точностью до коэффициента  $1/2$  совпадает с асимптотическим поведением распределения (12) в работе [2], полученным с учетом влияния только ближайшего иона. Таким образом, первое предположение оправдано и для вычисления плотности тока термоэмиссии можно пользоваться распределением (1.1).

2. Рассмотрим более подробно второе предположение о постоянстве концентрации в прикатодной области. В действительности из-за прикатодного падения потенциала концентрация ионов изменяется, вследствие чего изменится и функция распределения напряженности электрического поля на поверхности катода. Найдем вид функции распределения  $f(E)$  с учетом переменной концентрации ионов. Поместим начало координат

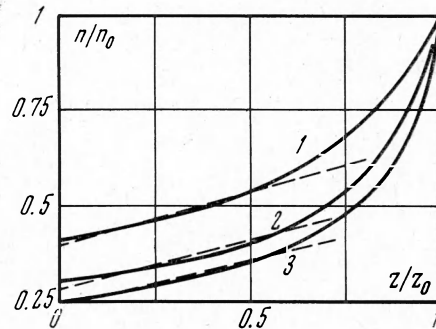
в рассматриваемую точку на поверхности катода (фиг. 1). Оси  $x$  и  $y$  расположим в плоскости катода, ось  $z$  — перпендикулярно к ней. Рассмотрим поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , уравнения которых имеют вид

$$E = 2qz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, \quad E - dE = 2qz(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$$

Так как функция распределения напряженности электрического поля в точке  $(0, 0)$  определяется положением ближайшего иона, то, чтобы вели-



Фиг. 1



Фиг. 2

чина нормальной составляющей электрического поля лежала в диапазоне  $[E_0 - dE \div E_0]$ , необходимо, чтобы не было ни одного иона внутри тела  $\Omega_1$  и был один ион в теле  $\Omega_2$ , т. е.

$$p(E_0 - dE \leq E_z \leq E_0) = f(E) dE = p_1(0 \in \Omega_1) p_2(1 \in \Omega_2)$$

Эти рассуждения аналогичны проведенным в [2] для случая с постоянной концентрацией, за исключением того, что вероятности  $p_1$  и  $p_2$  пишутся в несколько ином виде.

Рассмотрим изменение концентрации ионов в прикатодной области разряда. В работах [4,5] показано, что в широком диапазоне изменения параметров разряда изменение потенциала в прикатодной области близко к линейному. Учитывая, что скорость иона  $v$  связана с пройденной им разностью потенциалов  $\Delta U = U_0 - U$  соотношением

$$v = (v_0^2 + \Delta U 2e / m)^{1/2}$$

ионы в прикатодной области нерелятивистские и закон изменения потенциала имеет вид  $U = U_0 z / z_0$ , где  $z$  — расстояние от катода,  $z_0$  — толщина слоя прикатодного падения потенциала  $U_0$ , получим

$$n = n_0 (1/2 m v_0^2)^{1/2} [1/2 m v_0^2 + e U_0 (1 - z / z_0)]^{-1/2} \quad (2.1)$$

Графически зависимость (2.1) при различных значениях  $U_0$  для начальной скорости ионов  $v_0$ , соответствующей температуре плазмы в 1 эв, приведена на фиг. 2. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $U_0 = 5, 10, 15$  эв.

Как видно из фиг. 2, при температуре плазмы  $\sim 1$  эв и катодном падении на уровне  $\sim 10$  эв концентрация ионов по сравнению с концентрацией в центральной области разряда меняется лишь в несколько раз, причем изменение концентрации вблизи поверхности катода близко к линейному.

Зная закон изменения концентрации, запишем выражения для вероятностей  $p_1$  и  $p_2$ .

Вес  $V_1$  тела  $\Omega_1$  можно вычислить следующим образом:

$$V_1 = \pi \int_0^{\sqrt{2q/E}} \left[ \left( \frac{2qz}{E} \right)^{3/2} - z^2 \right] n(z) dz \quad (2.2)$$

Чтобы получить формулу, пригодную для практических вычислений, запишем выражение для  $n(z)$  в виде

$$n(z) = n_0 + \gamma z \quad (2.3)$$

Графически зависимость (2.3) показана на фиг. 2 в виде пунктирных линий. Подставляя в (2.2) выражение для  $n(z)$  из (2.3), имеем

$$V_1 = \frac{4\pi n_0}{15} \left( \frac{2q}{E} \right)^{3/2} + \frac{\pi\gamma}{8} \left( \frac{2q}{E} \right)^2$$

Вычисляя аналогичным образом вес тел  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , имеем

$$V_2 = \left[ \frac{2\pi n_0}{5} \frac{(2q)^{3/2}}{E^{3/2}} + \frac{\pi\gamma(2q)^2}{4E^3} \right] dE, \quad V_3 = 8r_0^3 (n_0 + \gamma r_0)$$

Для вероятностей  $p_1$  и  $p_2$  получим

$$p_1 = \exp \left[ - \frac{2\pi n_0}{15} \left( \frac{2q}{E} \right)^{3/2} - \frac{\pi\gamma}{8} \left( \frac{2q}{E} \right)^2 \right], \quad p_2 = \left[ \frac{2\pi n_0}{5} \frac{(2q)^{3/2}}{E^{3/2}} + \frac{\pi\gamma(2q)^2}{4E^3} \right] dE$$

Функция распределения нормальной составляющей напряженности электрического поля имеет вид

$$f(E) = \left( \frac{2\pi n_0 (2q)^{3/2}}{5E^{3/2}} + \frac{\pi\gamma(2q)^2}{4E^3} \right) \exp \left[ - \frac{4\pi n_0}{15} \left( \frac{2q}{E} \right)^{3/2} - \frac{\pi\gamma(2q)^2}{8E^2} \right] \quad (2.4)$$

Зависимость  $f(E)$  для  $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$  при значениях  $\gamma$ , равных для кривой 1 — 0, 2 —  $10^{21}$ , 3 —  $10^{22} \text{ см}^{-4}$ , приведена на фиг. 3.

Вычислим среднее значение тока термоэмиссии по распределению (2.4)

$$\begin{aligned} \langle j \rangle &= \int_0^{E_*} j_0(E) f(E) dE = I_1 + I_2 = \\ &= \int_0^{E_*} j_0(E) \frac{2\pi n_0 (2q)^{3/2}}{5E^{3/2}} \exp \left[ - \frac{4\pi n_0}{15} \left( \frac{2q}{E} \right)^{3/2} - \frac{\pi\gamma(2q)^2}{8E^2} \right] dE + \\ &+ \int_0^{E_*} j_0(E) \frac{\pi\gamma(2q)^2}{4E^3} \exp \left[ - \frac{4\pi n_0}{15} \left( \frac{2q}{E} \right)^{3/2} - \frac{\pi\gamma(2q)^2}{8E^2} \right] dE \end{aligned} \quad (2.5)$$

Определяя  $I_1$ , пренебрегая вторым членом в экспоненте при больших  $E$ , приближенно имеем

$$I_1 = AT^2 \exp \left( - \frac{e\Phi_0}{kT} \right) \left[ 1 + \frac{4\pi n_0 kT}{5E_*^2} \exp \left( \frac{e\sqrt{eE_*}}{kT} \right) \right] \quad (2.6)$$

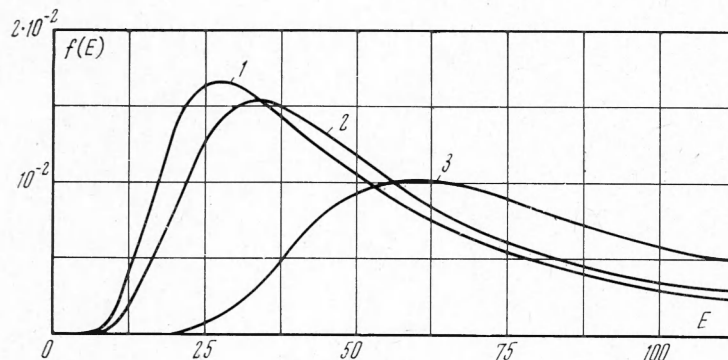
Выражение (2.6) совпадает с главной частью выражения (14) в работе [2]. Это выражение описывает составляющую тока термоэмиссии с катода, которая соответствует постоянной концентрации ионов  $n_0$  в прикатодном слое.

Найдем  $I_2$ , пренебрегая вторым членом в экспоненте

$$I_2 = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_0}{kT}\right) \frac{\pi\gamma q^2}{4} 8 \left(\frac{e\sqrt{V_e}}{kT}\right)^4 \exp\left(\frac{e\sqrt{V_e E_*}}{kT}\right) \left(\frac{e\sqrt{V_e E_*}}{kT}\right)^{-5} \quad (2.7)$$

Следовательно

$$\langle j \rangle = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_0}{kT}\right) \left\{ 1 + \left( \frac{4\pi n_0 kT}{5E_*^2} + \frac{2\pi\gamma \sqrt{V_e} kT}{E_*^{5/2}} \right) \exp\left(\frac{e\sqrt{V_e E_*}}{kT}\right) \right\} \quad (2.8)$$



Фиг. 3

Выясним случаи, в которых преобладает второй член в фигурных скобках выражения (2.8)

$$\frac{4\pi n_0 kT}{5E_*^2} > \frac{2\pi\gamma \sqrt{V_e} kT}{E_*^{5/2}}$$

т. е. при

$$\frac{n_0}{\gamma} > \frac{5}{2} \sqrt{\frac{e}{E_*}} \quad (2.9)$$

третьим членом в выражении (2.8) можно пренебречь по сравнению со вторым. Так как в практически интересных случаях  $n_0 / \gamma \sim 10^{-6}$ , то соотношение (2.9) выполняется с большой точностью и выражение (2.8) совпадает с выражением для плотности тока термоэмиссии, полученным в предположении, что концентрация ионов в прикатодной области постоянна.

Таким образом, проведена оценка на максимальный градиент концентрации ионов вблизи катода. Если в реальных условиях градиент концентрации удовлетворяет условию (2.9), то изменение  $n$  можно не учитывать, в противном случае следует пользоваться выражением типа (2.8).

Итак, для определения плотности тока термоэмиссии и асимптотического поведения функции распределения нормальной составляющей электрического поля на катоде нет необходимости учитывать влияние ансамбля частиц, так как  $j$  и  $f(E)$  определяются функцией распределения ближайшего соседа. В широком диапазоне параметров разряда для определения плотности тока термоэмиссии достаточно знать концентрацию ионов в непосредственной близости от него. Концентрация в дальнейшем изменяется, но на величину тока термоэмиссии практически не оказывает влияния. Решающее влияние на величину  $E$  оказывает только ближайший к данной точке на катоде ион.

В работе предполагалось выполнение условия  $n_e \ll n_i$ . При  $s = j_i / j_e \gg 0,1$ , т. е. когда доля ионного тока существенна (случай, реализующийся

