

ЛИТЕРАТУРА

1. McCroskey W. J., Pucci S. L. Viscous-inviscid interaction on oscillating airfoils in subsonic flow // AIAA J.— 1982.— V. 20, N 2.
2. Francis M. S., Keese J. E. Airfoil dynamic stall performance with large-amplitude motions // AIAA J.— 1985.— V. 23, N 11.
3. Graham G. M., Strickland J. H. An experimental investigation of an airfoil pitching at moderate to high rates to large angles of attack.— N. Y., 1986.— (Pap./AIAA; N 0008).
4. Jumper E. J., Shreck S. J., Dimmick R. L. Lift-curve characteristics for airfoil pitching on constant rate.— N. Y., 1986.— (Pap./AIAA; N 0117).
5. Джонсон У. Современное состояние теоретических исследований по аэродинамике несущего винта // Аэрокосмич. техника.— 1987.— № 5.
6. Таганов Г. И. Модель происхождения циркуляции у крыла бесконечного размаха с острой задней кромкой при больших числах Рейнольдса.— М., 1980.— (Препр./ Сектор механики неоднородных сред АН СССР; № 5).
7. Таганов Г. И. Обоснование соотношения $\Pi = \rho U_\infty^2 \delta_{2\infty}^{**}$, применяемого в модели происхождения циркуляции у крыла бесконечного размаха с острой задней кромкой // Учен. зап. ЦАГИ.— 1986.— Т. 17, № 6.
8. Таганов Г. И. О втором диссипативном слое и следе в вязком течении около тела // Учен. зап. ЦАГИ.— 1970.— Т. 1, № 6.
9. Садовский В. С. Бесциркуляционное обтекание вращающейся пластины потоком идеальной жидкости // ПМТФ.— 1990.— № 3.

г. Москва

Поступила 31/V 1988 г.,
в окончательном варианте — 26/VIII 1988 г.

УДК 551.466.81

В. Ф. Санников

ПОЛЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ, СОЗДАВАЕМОЕ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В линейной постановке рассматривается пространственная задача определения поля горизонтальных скоростей $u(x, y, z)$, создаваемого равномерно и прямолинейно перемещающимся точечным источником в невязкой несжимаемой вертикально стратифицированной жидкости. Выведены формулы, представляющие точное решение задачи в виде ряда однократных интегралов. В отличие от полученного ранее решения для вертикальной составляющей скорости [1] выражения для u содержат неволновые члены, обеспечивающие сходимость рядов. Построены полные асимптотические разложения u при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, доказана их сходимость при суммировании вкладов отдельных мод. Приведен пример расчета компонент u в ближней области для однородной и равномерно стратифицированной жидкости. Показано, что выделение из решения члена, соответствующего случаю однородной жидкости, устраняет имеющиеся особенности при вычислении характеристик волн в ближней области.

1. Пусть невязкая несжимаемая жидкость занимает область $-\infty < x_1, y < +\infty, -h < z < 0$, плотность невозмущенной жидкости $\rho_0(z)$ зависит только от одной вертикальной координаты z и не убывает с глубиной. На глубине h_0 от положения невозмущенной свободной поверхности $z = 0$ с постоянной скоростью c движется источник интенсивности q в отрицательном направлении оси x_1 . В системе координат, связанной с источником $x = x_1 - ct$, в линейном приближении установившееся волновое поле, создаваемое источником, описывается уравнениями

$$(1.1) \quad \rho_0 D\mathbf{v} = -\nabla p + g\rho, \quad D\rho = \rho_0 g^{-1} N^2 w, \quad \nabla \mathbf{v} = q\delta(x, y, z + h_0)$$

с граничными условиями

$$(1.2) \quad p = \rho_0 g \zeta, \quad D\zeta = w(z = 0), \quad w = 0(z = -h),$$

где $D = c\partial/\partial x$; $\mathbf{v} = (u, v, w)$, ρ, p — возмущенные скорости, плотность и давление жидкости; ζ — вертикальное смещение жидких частиц; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — ускорение свободного падения; $N^2(z) = -g\rho_0^{-1}d\rho_0/dz$ — квадрат частоты Вэйсяля — Брента; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. К (1.2) не-

обходимо добавить условие излучения: основные волновые возмущения формируются за источником.

Из (1.1), (1.2) выводятся уравнения для вертикальной составляющей скорости

$$(1.3) \quad D^2(\rho_0 w_z)_z + \rho_0(N^2 + D^2)\Delta_2 w = qD^2[\rho_0 \delta(x, y, z + h_0)]_z$$

с граничными условиями

$$(1.4) \quad (D^2 - g\Delta_2)w = 0 \quad (z = 0), \quad w = 0 \quad (z = -h)$$

и выражение, связывающее поле горизонтальных скоростей $\mathbf{u} = (u, v)$ с w :

$$(1.5) \quad \Delta_2 \mathbf{u} = \nabla_2 [q\delta(x, y, z + h_0) - w_z], \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Применяя к (1.3), (1.4) преобразование Фурье по переменным x и y , для трансформанты вертикальной компоненты скорости

$$W(r, \theta, z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) \exp[-ir\mu(\theta)] dx dy,$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \mu(\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$$

получаем краевую задачу

$$(1.6) \quad (\rho_0 W_z)_z + \rho_0(N^2 \lambda - \beta)W = q_1[\rho_0 \delta(z + h_0)]_z;$$

$$(1.7) \quad W_z - g\lambda W = 0 \quad (z = 0), \quad W = 0 \quad (z = -h), \quad \lambda = (c \cos \theta)^{-2}, \quad \beta = r^2, \\ q_1 = q/2\pi.$$

Обозначим через \mathbf{U} трансформанту горизонтальной скорости \mathbf{u} . Для нее из (1.5)

$$\mathbf{U} = ir^{-1} \mathbf{v}(\theta) [W_z - q_1 \delta(z + h_0)], \quad \mathbf{v}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Пусть $V_1(z)$ и $V_2(z)$ — решения однородного уравнения

$$(1.8) \quad (\rho_0 V_{kz})_z + \rho_0(N^2 \lambda - \beta)V_k = 0 \quad (k = 1, 2),$$

удовлетворяющие соответственно граничным условиям при $z = 0$ и $z = -h$:

$$(1.9) \quad V_{1z} - g\lambda V_1 = 0 \quad (z = 0), \quad V_2 = 0 \quad (z = -h).$$

Решение неоднородного уравнения (1.6) можно записать в виде

$$W = -\frac{q_1}{Wr_0} \begin{cases} V_1(z) V_{2z}(-h_0) & (-h_0 < z \leq 0), \\ V_{1z}(-h_0) V_2(z) & (-h \leq z < -h_0), \end{cases} \\ Wr_0 = V_{1z} V_2 - V_1 V_{2z} \quad (z = -h_0).$$

Для трансформанты горизонтальной скорости имеем

$$(1.10) \quad \mathbf{U} = -iq_1 \rho_0(h_0) r^{-1} \mathbf{v}(\theta) \Phi(\lambda, \beta, z),$$

$$\Phi(\lambda, \beta, z) = \frac{1}{\rho_0(-h_0)Wr_0} \begin{cases} V_{1z}(z) V_{2z}(-h_0) & (-h_0 < z \leq 0), \\ V_{1z}(-h_0) V_{2z}(z) & (-h \leq z < -h_0). \end{cases}$$

Из спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [2] известно, что решения (1.8), (1.9) вместе со своими производными по z являются целыми функциями λ и β , поэтому функция $\Phi(\lambda, \beta, z)$ мероморфна по этим параметрам, а полюсы Φ — нули вронскиана Wr_0 и собственные значения соответствующей (1.8), (1.9) задачи Штурма — Ливуилля. Выберем в качестве спектрального параметра квадрат волнового числа β , и пусть β_n, W_n ($n = 1, 2, \dots, \beta_1 > \beta_2 > \dots$) — совокупность зависящих от λ собственных значений и ортонормированных собственных функций $\left(\int_{-h}^0 \rho_0 W_n W_m dz = \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} \text{ — символ Кронекера} \right).$

Свойства дисперсионных зависимостей $\beta_n(\lambda)$ описаны в [1]. Функции $\beta = \beta_n(\lambda)$ являются монотонно возрастающими, имеют по одному простому нулю $\lambda = \lambda_n$, причем наибольшая фазовая скорость распространения волн n -й моды $c_n = \lambda_n^{-1/2}$.

Мероморфная функция $\Phi(\lambda, \beta, z)$ может быть разложена на простейшие дроби [3], а вид такого разложения зависит от асимптотики Φ при $|\beta| \rightarrow \infty$, если разложение ведется по параметру β , или при $|\lambda| \rightarrow \infty$, если по λ . Из теории задач Штурма — Лиувилля известно [2], что при $|\beta| \rightarrow \infty$

$$(1.11) \quad \begin{aligned} V_1 &= O(e^{|r_1 z|}), \quad V_{1z} = O(|r_1| e^{|r_1 z|}), \quad r_1 = \text{Re } r, \\ V_2 &= O(|r|^{-1} e^{|r_1(z+h)|}), \quad V_{2z} = O(e^{|r_1(z+h)|}). \end{aligned}$$

Из (1.11) выводится, что $\Phi = O(|r| e^{|r_1(z+h)|})$ при $|\beta| \rightarrow \infty$. Используя полученную оценку и применяя теорему о разложении мероморфной функции на простейшие дроби [3], находим

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \beta, z) &= \Phi(\lambda, 0, z) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\lambda, z, h_0) \left(\frac{1}{\beta - \beta_n} + \frac{1}{\beta_n} \right), \\ \varphi_n &= W_{nz}(z) W_{nz}(-h_0). \end{aligned}$$

Аналогичные (1.11) асимптотические оценки есть и для зависимости Φ от λ . Пусть λ_n ($n = 1, 2, \dots, \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$) — собственные значения задачи (1.8), (1.9) при $\beta = 0$. Раскладывая далее $\Phi(\lambda, 0, z)$ на простейшие дроби по λ , запишем

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \Phi(\lambda, \beta, z) &= \Phi(0, 0, z) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n(\lambda, z, h_0) \left(\frac{1}{\beta - \beta_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varphi_n(\lambda_n, z, h_0)}{\beta'_n(\lambda_n)} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} \right) \right], \quad \beta'_n(\lambda) = g \rho_0 W_n^2|_{z=0} + \int_{-h}^0 \rho_0 N^2 W_n^2 dz. \end{aligned}$$

Подставляя теперь (1.12) в (1.10) и вычисляя обратные преобразования Фурье от трансформанты горизонтальной скорости, получим точное решение линейной задачи

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= q_1 \rho_0(-h_0) \left\{ \frac{\mathbf{R}}{R^2} \Phi(0, 0, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mathbf{R}}{R^2} \frac{\varphi_n(\lambda_n, z, h_0)}{\beta'_n(\lambda_n) \lambda_n} - \mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n \right] \right\}, \\ \mathbf{I}_n &= \pi^{-1} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{v}(\theta) \beta_n^{-1/2} \varphi_n(\lambda, z, h_0) F[-\beta_n^{-1/2} \mu(\theta)] d\theta, \\ \mathbf{J}_n &= \pi^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{v}(\theta) \mu^{-1}(\theta) \left[\frac{\varphi_n(\lambda_n, z, h_0)}{\beta'_n(\lambda_n) (\lambda - \lambda_n)} - \frac{\varphi_n(\lambda, z, h_0)}{\beta_n(\lambda)} \right] d\theta. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{R} = (x, y)$, (R, γ) — полярные координаты горизонтальной плоскости (x, y) ; интегралы \mathbf{J}_n в этой формуле, имеющие особенности при $\cos(\theta - \gamma) = 0$, вычисляются в смысле главного значения; функция $F(\tau)$ выражается через интегральные синус и косинус $F(\tau) = \text{Si}(\tau) \sin \tau + [\pi/2 - \text{Si}(\tau)] \cos \tau$, $|\arg \tau| < \pi$. Вывод интегралов типа \mathbf{I}_n фактически содержится в [1, 4].

Формула (1.13) дает точное решение линейной задачи о поле возмущенных горизонтальных скоростей, создаваемом движущимся равномерно и прямолинейно точечным источником в жидкости с произвольной устойчивой стратификацией. Интегралы, входящие в (1.13), однократные, способы их расчета описаны в [1].

2. Выведем асимптотическое при $R \rightarrow \infty$ разложение полученного решения. Интегралы I_n из (1.13) однотипны с интегралами, входящими в выражения для вертикальных смещений [4]. Следуя [4], их полное асимптотическое разложение можно записать в виде

$$(2.1) \quad I_n \sim \sum_k P_n(R, \theta_k) + S_n(R),$$

где $P_n(R, \theta_k)$ — вклады стационарных точек, которые являются решениями уравнения

$$\frac{d}{d\theta} [\beta_n^{1/2} \cos(\theta - \gamma)] = 0 \text{ при } \text{Im} \beta_n^{1/2} = 0.$$

Формулы вкладов отдельных стационарных точек и равномерные асимптотики для случая близких стационарных точек приведены в [5]. Слагаемые $S_n(R)$ представляют собой степенные ряды [4]

$$S_n(R) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} (2m)! \alpha_{nm} R^{-(2m+1)},$$

$$\alpha_{nm} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v(\theta) \varphi_n \beta_n^{-(m+1)} [\cos(\theta - \gamma)]^{-(2m+1)} d\theta.$$

В интегралах α_{nm} множители $\beta_n^{-(m+1)} [\cos(\theta - \gamma)]^{-(2m+1)}$ следует рассматривать как обобщенные функции, регуляризованная форма записи α_{nm} есть в [4].

При подстановке (2.1) в (1.13) имеем полное при $R \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение решения. Основной вклад в дальней области волнового поля дают стационарные точки, а учет слагаемых $S_n(R)$ позволяет расширить область применимости асимптотик. Перегруппировав члены полученного ряда, запишем разложение суммарного вклада мод, при этом возникает вопрос о сходимости (при суммировании по n) рядов для членов такого разложения. Рассмотрим сначала коэффициент при R^{-1} в n -м члене суммы (1.13). После приведения подобных членов

$$I_{n1} = \frac{\varphi_n(\lambda_n, z, h_0)}{\beta_n'(\lambda_n)} \left[\frac{R}{\lambda_n R^2} + \pi^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{v(\theta) d\theta}{\mu(\theta) (\lambda - \lambda_n)} \right].$$

Вычисление I_{n1} показывает, что $I_{n1} = 0$ при $c > c_n$, а при $c < c_n$

$$I_{n1} = \frac{\varphi_n(\lambda_n, z, h_0) (x d_n^{-1}, y d_n)}{\beta_n'(\lambda_n) \lambda_n (x^2 + y^2 d_n^2)}, \quad d_n = \sqrt{1 - (c/c_n)^2}.$$

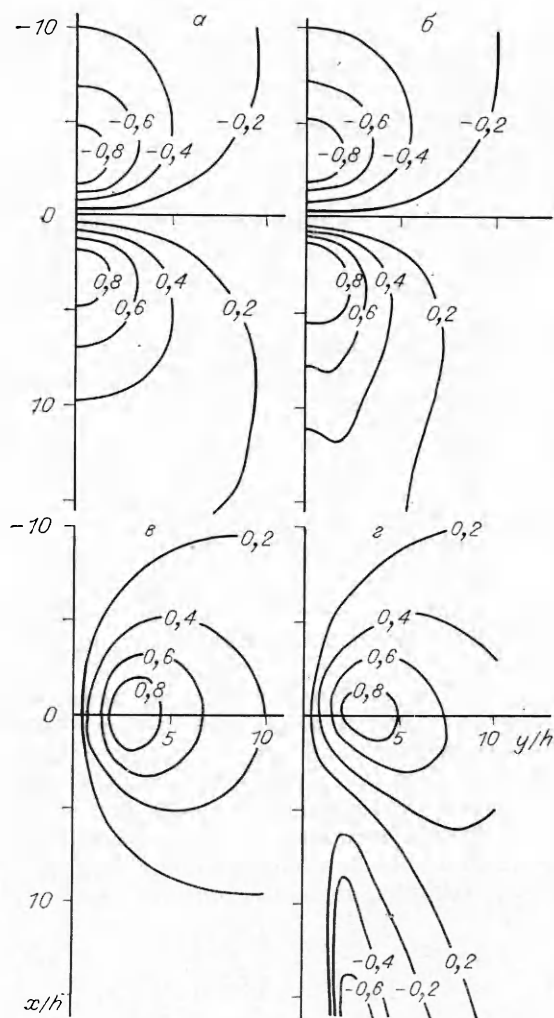
Поскольку $c_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$, то число ненулевых членов в ряде при R^{-1} конечно. Из асимптотик собственных значений и собственных нормированных функций задачи Штурма — Лиувилля выводится, что при $n \rightarrow \infty$

$$\beta_n = O(n^2), \quad \lambda_n = O(n^{-2}), \quad \varphi_n = O(n^2), \quad \beta_n'(\lambda_n) = O(1).$$

Используя эти оценки, можно проверить, что величины членов ряда при $R^{-(2m+1)}$ ($m \geq 1$) есть $O(n^{-2m})$. Отсюда следует сходимость соответствующих рядов. В отношении же вкладов стационарных точек заметим, что при $n \rightarrow \infty$ основные волновые возмущения n -й моды сосредоточены в области $|\gamma| < \gamma_n$, $\gamma_n = \arcsin(c_n/c)$, поэтому в фиксированной точке (x, y) , $y \neq 0$ вклады стационарных точек имеют лишь конечное число мод.

3. Анализ особенностей вычисления характеристик горизонтальных скоростей в ближнем поле проведем для случаев однородной и равномерно стратифицированной жидкости, используя приближение Буссинеска и условие «твердой крышки» на поверхности жидкости. При $\rho_0 = \text{const}$ выражение (1.13) приводится к виду

$$(3.1) \quad u_0 = \frac{g}{2\pi} \frac{R}{R^2 h} \left\{ 1 + \frac{2\pi R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos \frac{\pi n z}{h} \cos \frac{\pi n h_0}{h} K_1 \left(\frac{\pi n R}{h} \right) \right\}$$



В случае $N^2 = \text{const}$ выражение (1.13) приводится к виду

$$(3.4) \quad \mathbf{u} = \frac{q}{2\pi h} \left\{ \frac{\mathbf{R}}{R^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n z}{h} \cos \frac{\pi n h_0}{h} \left[\frac{\mathbf{R}}{R^2} - \frac{\pi n^2}{h^2} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{v}(\theta) \beta_n^{-1/2} F[-\beta_n^{1/2} \mu(\theta)] d\theta \right] \right\}, \quad \beta_n = N^2 \lambda - (\pi n/h)^2.$$

Сопоставление (3.1), (3.3) и (3.4) показывает, что члены рядов (3.1) и (3.4) имеют одинаковые особенности при $R \rightarrow 0$. Учитывая это, составим следующее выражение для \mathbf{u} :

$$(3.5) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0),$$

где первое слагаемое вычисляется по формуле (3.2), а второе представляет собой суммирование почленных разностей (3.4) и (3.1), при этом все члены ряда (3.5) конечны при $R \rightarrow 0$.

Представление о ближнем поле возмущений горизонтальной скорости дает рисунок, на котором изображены нормированные на $\max|\mathbf{u}|$ значения продольной (а, б) и поперечной (в, г) составляющих \mathbf{u} для однородной (а, в) и стратифицированной (б, г) жидкости. Расчеты выполнены для $z = 0$, $h_0 = 0,4h$, $c/c_1 = 2$, $c_1 = Nh/\pi$. Анализ расчетов показывает, что поле возмущений в однородной жидкости сосредоточено над источником и быстро затухает с удалением от него. Учет стратификации незначи-

($K_1(\tau)$ — модифицированная функция Бесселя). Еще одно представление для \mathbf{u}_0 выводится из известных формул для безграничной жидкости методом многократного отражения:

(3.2)

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\mathbf{u}_1(x, y, z - h_0 + 2\pi kh) + \mathbf{u}_1(x, y, z + h_0 + 2\pi kh)],$$

$$\mathbf{u}_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Ряды (3.1) и (3.2) можно преобразовать один в другой с помощью формулы суммирования Пуассона, как это описано в [6]. Там же отмечено, что ряды типа (3.1) быстрее сходятся при больших значениях R , чем при малых. Характер сходимости (3.1) следует из оценок

(3.3)

$$K_1(\tau) = \tau^{-1} + O(\tau \ln \tau) \quad (\tau \ll 1),$$

$$[K_1(\tau) = \sqrt{\pi/(2\tau)} e^{-\tau} [1 + O(\tau^{-1})] \quad (\tau \gg 1)].$$

Ряды типа (3.2) быстрее сходятся при малых R .

тельно изменяет возмущения течения впереди источника и определяет формирование волн за ним. Отметим, что вклад внутренних волн по амплитуде в ближней области за источником сравним с величинами возмущений в области над источником.

Итак, в поле возмущений скорости в стратифицированной жидкости можно выделить две области: вблизи от генератора волн доминируют эффекты, связанные с его обтеканием, как и в однородной жидкости, а с удалением от источника за ним поле возмущенных скоростей формируется внутренними волнами, обязанными своим существованием стратификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане. — Севастополь, 1983.
2. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). — М.: Наука, 1970.
3. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978.
4. Санников В. Ф. Дальнее поле установившихся волн, создаваемых локальными источниками возмущений в потоке стратифицированной жидкости // ПММ. — 1986. — Т. 50, вып. 6.
5. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
6. Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Дж. Келлера и Дж. Пападикаса. — М.: Мир, 1980.

г. Севастополь

Поступила 23/1 1989 г.

УДК 532.135

В. И. Найденов, А. Д. Полянин

О НЕКОТОРЫХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ

1. Известно, что динамическая вязкость жидкостей μ существенным образом зависит от температуры (чем больше T , тем меньше μ), а остальные параметры меняются слабо.

Для очень вязких жидкостей (типа глицерина) обычно используется экспоненциальная зависимость [1]

$$(1.1) \quad \mu = \mu_0 \exp \{-\beta(T - T_0)\}$$

(μ_0 , β , T_0 — эмпирические постоянные). Для обычных жидкостей (типа воды) кривая зависимости вязкости от температуры имеет более пологий характер и во многих случаях может быть описана степенной функцией [2]

$$(1.2) \quad \mu = \mu_0(T_0/T)^m, \quad m \geq 0.$$

Выражение (1.2) в определенных температурных диапазонах при соответствующих значениях показателя m хорошо аппроксимирует известную функцию Я. И. Френкеля [3].

Отметим, что неизотермические прямолинейные течения жидкости в трубах с учетом диссипативного нагрева и зависимости вязкости от температуры рассматривались в [4—6]. В этих задачах градиент температуры вдоль стенок и конвективный перенос тепла отсутствовали. В [7, 8] исследовались некоторые гидродинамические задачи с градиентом температуры вдоль стенок трубы, когда важную роль играет конвективный перенос тепла. При этом считалось, что вязкость экспоненциальным образом зависит от температуры.

Данная работа обобщает результаты [7, 8] по нескольким направлениям: во-первых, рассматриваются сразу обе зависимости (1.1) и (1.2); во-вторых, исследуются нееньютоновские жидкости, кажущаяся вязкость которых произвольным образом зависит от квадратичного инварианта тензора скоростей деформации; в-третьих, в модельной задаче о неизотермическом течении в пористой среде анализируется устойчивость полученного стационарного решения.

2. Движение жидкости в пористой среде. Простейшая модель медленного неизотермического течения несжимаемой жидкости в однород-