РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

2005, том 41, № 1

УДК 535.317.25

В. А. Удод
(Томск)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРА ОДНОМЕРНОГО ФИЛЬТРА ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

В одномерном варианте рассмотрены изображающие системы с модельной структурой: входное изображение – заданная искажающая линейная система – заданный аддитивный белый шум – заданный линейный фильтр с регулируемым параметром – выходное изображение. Установлена максимальная разрешающая способность таких систем, достигаемая при оптимальном выборе параметра фильтра. Приведен пример использования полученных результатов и показана возможность их применения в сканирующих изображающих системах.

Введение. Вопросам повышения пространственной разрешающей способности (РС) по Фуко различных изображающих систем (ИС) традиционно уделяется значительное внимание специалистов, занимающихся обработкой информации об исследуемых объектах, получаемой в форме изображений. Одним из методов повышения РС ИС, как известно [1–4], является фильтрация сформированных изображений. В [5] в двумерном варианте решена вариационная задача оптимальной по критерию максимума РС линейной фильтрации сформированных изображений. Между тем вполне актуальной является задача оптимизации (по данному критерию) параметра одномерного фильтра заданного вида, включенного в структурный состав ИС. Это, в частности, характерно для временной фильтрации сигналов изображений в сканирующих ИС [6].

Модель изображающей системы и ее разрешающая способность. Предположим по аналогии с [2], что в одномерном варианте математическая модель функционирования ИС удовлетворительно представлена соотношением вида

$$\hat{B}(x) \quad [B(x) \quad h(x) \quad (x)] \quad (x). \qquad (1)$$

Здесь $\hat{B}(x)$ – изображение на выходе ИС; $B(x)$ – изображение на входе ИС; $h(x)$ – импульсный отклик искажающей системы; (x) – стационарный шум с нулевым средним значением; $B(x) \quad h(x) \quad (x)$ – сформированное (искаженное) изображение; (x) – импульсный отклик фильтра; символ означает одномерную свертку. Относительно функций $h(x)$ и (x) предполагается, что они удовлетворяют условию нормировки

$$h(x)\,dx \qquad (x)\,dx \quad 1. \tag{2}$$

Предположим также, что пороговый контраст K обусловлен преимущественно зашумленностью выходного изображения, т. е. (см. [7])

$$K \quad \frac{M_{\text{пор}}}{k_0}, \tag{3}$$

где $M_{\text{пор}}$ – пороговое отношение сигнал/шум; $/B_{\text{ф}}$ – относительное среднеквадратическое значение шума на выходе ИС (– среднеквадратическое значение шума на выходе ИС, $B_{\text{ф}}$ – яркость фона выходного изображения); k_0 – исходный контраст. Тогда в одномерном варианте общее выражение для разрешающей способности R может быть представлено согласно [8] в следующем виде:

$$R \quad \begin{matrix} \sup\{\bar{\ }\,|\,0 \quad \bar{\ } \quad R_0,\ {}_0\inf\_G(\ ) \quad K\}, & 0 \quad K \quad 1; \\ 0, & K \quad 1. \end{matrix} \tag{4}$$

Здесь $\ ,\bar{\ }$ – пространственные частоты;

$$R_0 \quad \sup\{\bar{\ }\,|\,\bar{\ } \quad 0,\ {}_0\inf\_G(\ ) \quad 0\} \tag{5}$$

– предельная РС; $G(\ )$ – частотно-контрастная характеристика ИС.

Применительно к ИС, представленной моделью (1), с учетом (2) будем иметь

$$G(\ ) \quad \left|\tilde{h}(\ )\right|\left|\tilde{\ }(\ )\right|, \tag{6}$$

$$^{2} \qquad S(\ )\left|\tilde{\ }(\ )\right|^{2} d\ , \tag{7}$$

где $\tilde{h}(\ )$, $\tilde{\ }(\ )$ – передаточная функция искажающей системы и фильтра соответственно (преобразование Фурье от $h(x)$ и (x) соответственно); $S(\ )$ – спектральная плотность шума.

При подстановке (3), (6), (7) в (4), (5) получаем

$$R \quad \begin{matrix} \sup\ \bar{\ }\,|\,0 \quad \bar{\ } \quad R_0,\ {}_0\inf\_H(\ ) \quad (\ ) \quad C \quad S(\ ) \quad (\ )d \quad , \\ \text{если } 0 \quad C \quad S(\ ) \quad (\ )d \quad 1; \\ 0, \qquad \text{если } C \quad S(\ ) \quad (\ )d \quad 1, \end{matrix} \tag{8}$$

где

$$R_0 \quad \sup\{\bar{\ } \,|\, \bar{\ } \quad 0, \ {}_0\inf\_ H(\ ) \quad (\ ) \quad 0\};$$

$$H(\ ) \quad \left|\tilde{h}(\ )\right|^2; \qquad (\ ) \quad \left|\tilde{\ }(\ )\right|^2; \qquad C \quad \frac{M_{\text{пор}}}{k_0 B_{\text{ф}}}^{2}.$$

Постановка задачи. Предположим теперь, что шум белый, т. е.

$$S(\ ) \quad S, \tag{9}$$

а фильтр задан с точностью до параметра a ($a \quad 0$), и при этом

$$(\ ) \qquad (\ ;a) \quad W(a\ ), \tag{10}$$

где $W(x)$ – некоторая заданная функция, причем $0 \qquad W(x)\,dx \qquad .$

Подставив (9), (10) в (8), получим

$$R \quad R(a) \quad \begin{cases} \sup \ \bar{\ } \,|\, \bar{\ } \quad 0, \ {}_0\inf\_[H(\ )W(a\ )] \quad \frac{L}{a}, & a \quad L; \\ 0, & 0 \quad a \quad L, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$L \quad CS \quad W(x)\,dx \quad \text{const} \quad 0. \tag{12}$$

Заметим, что в полученном выражении для РС $R(a)$ неравенство $\bar{\ } \quad R_0$ опущено в силу положительности L.

В предлагаемой работе оптимизационную задачу будем решать в следующей математической постановке: требуется найти максимум функции $R(a)$ ($a \quad 0$), определяемой равенством (11), в предположении, что функции $W(x)$ и $H(\ )$ удовлетворяют условиям:

1а) $W(x)$ определена и неотрицательна для всех $x \quad (\quad , \quad)$;
1б) $H(\ )$ определена и неотрицательна для всех $\quad (\quad , \quad)$;
2а) $W(x)$ четная;
2б) $H(\ )$ четная;
3а) $W(0) \quad 1$;
3б) $H(0) \quad 1$;
4а) $W(x)$ непрерывна в нуле;
4б) $H(\ )$ непрерывна в нуле;
5) для любого $a \quad L$ справедливо равенство

$${}_0\inf\_[H(\ )W(a\ )] \quad {}_0\inf\_ H(\ ) \ {}_0\inf\_ W(a\ ) \quad \text{для всех} \ \bar{\ } \quad 0; \tag{13}$$

6) существует

$$\max_{x \quad 0}[x \ {}_0\inf_{y \quad x} W(y)].$$

Следует заметить, что условия 1–4 по существу являются «естественными» (следуют из свойств модуля одномерного преобразования Фурье [9] и соотношения (2)) и поэтому не ограничивают сколько-нибудь значительно общность постановки данной задачи.

Решение задачи. Решение сформулированной выше оптимизационной задачи представим в виде утверждения.

Утверждение. Максимум функции $R(a)$, определяемой (11), при условиях 1–6 есть

$$R_{\max} \quad \sup_{a \quad 0} R(a) \quad \sup\{\bar{\ } \mid \bar{\ } \quad 0, \quad {}_{0}\inf \_ H(\ ) \quad L\bar{\ } \tag{14}$$

и достигается при

$$a_{\text{opt}} \quad x_0 / R_{\max}, \tag{15}$$

где x_0 – произвольная точка наибольшего значения функции $x \inf_{0 \ y \ x} W(y)$ на промежутке $[0, \quad)$; L – постоянная, определяемая равенством (12).

(Доказательство утверждения приведено в приложении.)

Следствие. Если в ИС отсутствуют (пренебрежимо малы) систематические искажения, т. е. $\tilde{h}(\ ) \quad H(\ ) \quad 1$, то согласно (14) и (15) будем иметь

$$R_{\max} \quad /L; \qquad a_{\text{opt}} \quad x_0(L/\ ).$$

Пример оптимизации параметра фильтра. Рассмотрим применение утверждения:

– импульсный отклик искажающей системы есть функция вида

$$h(x) \quad \begin{matrix} 1/b, & |x| \quad b/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{matrix} \tag{16}$$

где параметр b ($b \quad 0$) означает длину промежутка усреднения;

– импульсный отклик фильтра есть функция вида

$$(x) \quad \begin{matrix} (1/a)\exp(\quad x/a), & x \quad 0; \\ 0, & x \quad 0. \end{matrix} \tag{17}$$

Тогда

$$\tilde{h}(\ ) \quad \frac{\sin \quad b}{b}; \qquad \tilde{\ }(\ ) \quad \frac{1}{1 \quad 2 \ i \ a}. \tag{18}$$

Отсюда

$$H(\ ) \quad \frac{\sin^2 \quad b}{(\quad b)^2}, \tag{19}$$

$$(\ ) \quad \frac{1}{1 \quad 4 \ ^2 \ ^2 a^2}. \tag{20}$$

Из (10) и (20) следует, что в данном случае

$$W(x) \quad \frac{1}{1 \quad 4 \quad {}^2 x^2}, \tag{21}$$

и при этом согласно (12)

$$L \quad CS/2. \tag{22}$$

Заметим, что функция (18) (а значит, и функция (19)) считается доопределенной в точке $\quad 0$ значением 1. Это следует из определения одномерного преобразования Фурье и того, что функция (16) удовлетворяет условию нормировки (2). С учетом такого замечания нетрудно видеть, что функции (19) и (21) удовлетворяют условиям 1–4. Далее, поскольку функция (19) монотонно убывает на отрезке $[0, 1/b]$, где $\quad 1/b$ есть ее первый положительный нуль, а функция (20) монотонно убывает на промежутке $[0, \quad)$, то для всех $\bar{} \quad 0$ будут верны следующие равенства:

$$\inf_{0 \quad \bar{}} \frac{\sin^2 \quad b}{(\quad b)^2} \frac{1}{1 \quad 4 \quad {}^2 \quad {}^2 a^2} \quad \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \bar{} b}{(\bar{} b)^2} \dfrac{1}{1 \quad 4 \quad {}^2 \bar{}^2 a^2}, & 0 \quad \bar{} \quad 1/b; \\ 0, & \bar{} \quad 1/b, \end{cases} \tag{23}$$

$$\inf_{0 \quad \bar{}} \frac{\sin^2 \quad b}{(\quad b)^2} \quad \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \bar{} b}{(\bar{} b)^2}, & 0 \quad \bar{} \quad 1/b; \\ 0, & \bar{} \quad 1/b, \end{cases} \tag{24}$$

$$\inf_{0 \quad \bar{}} \frac{1}{1 \quad 4 \quad {}^2 \quad {}^2 a^2} \quad \frac{1}{1 \quad 4 \quad {}^2 \bar{}^2 a^2}. \tag{25}$$

Из (23)–(25) следует, что функции (19) и (21) удовлетворяют равенству (13) для любого $a \quad 0$, а значит, для этих функций условие 5 выполняется. Наконец, поскольку функция (21) монотонно убывает на промежутке $[0, \quad)$, то для всех $x \quad 0$ будет верно равенство

$$\inf_{0 \quad y \quad x} W(y) \quad W(x) \quad \frac{1}{1 \quad 4 \quad {}^2 x^2}.$$

Следовательно,

$$\max_{x \quad 0} \; x \inf_{0 \quad y \quad x} W(y) \quad \frac{1}{4}, \tag{26}$$

и при этом (единственная) точка максимума

$$x_0 \quad 1/(2 \quad). \tag{27}$$

Отсюда вытекает, что для функции (21) выполняется условие 6.

$b/(CS)$	$CSR_{\max}$	$a_{\mathrm{opt}}/(CS)$
0,1	0,50	1,00
1,0	0,46	1,09
3,0	0,35	1,43
5,0	0,27	1,85
10,0	0,17	2,94

Таким образом, функции (19) и (21) удовлетворяют всем условиям утверждения. Тогда при подстановке (19), (22) и (26) в (14) получим для максимума РС рассматриваемой ИС согласно утверждению следующее выражение:

$$R_{\max} \quad \sup \quad {}^{-}|^{-} \quad 0,\ \frac{1}{4}\ {}_{0}\ \inf_{-} \frac{\sin^{2} \quad b}{(\quad b)^{2}} \quad \frac{CS}{2} - \quad . \tag{28}$$

При этом согласно (15) и (27) оптимальный параметр фильтра

$$a_{\mathrm{opt}} \quad 1/(2 \;\; R_{\max}). \tag{29}$$

Из (24) следует, что множество в фигурных скобках в (28) будет отрезком $[0, \hat{\ }]$, где $\hat{\ }$ – решение уравнения

$$\frac{\sin^{2} \quad {}^{-}b}{(\quad {}^{-}b)^{2}} \quad 2 \;\; CS^{-} \tag{30}$$

относительно $^{-}$ на отрезке $[0,\ 1/b]$. А поскольку $\sup[0, \hat{\ }] \quad \hat{\ }$, то с учетом (28) окончательно получаем, что максимум РС равен решению уравнения (30) относительно $^{-}$ на отрезке $[0,\ 1/b]$.

Результаты численного решения уравнения (30) для различных значений параметра b искажающей системы представлены в таблице. Там же для удобства приведены соответствующие значения оптимального параметра фильтра, рассчитанного по формуле (29).

Заключение. Выражение (8) может быть интерпретировано для двумерного случая как продольная (вдоль оси O_x) РС ИС, импульсный отклик $_0(x, y)$ фильтра которой представим в виде

$$_0(x, y) \qquad (x) \;\; (y), \tag{31}$$

где (y) – -функция Дирака. При этом функции $H(\ )$ и $(\ )$ могут быть интерпретированы как квадраты продольной частотно-контрастной характеристики искажающей системы и фильтра соответственно, а функция $S(\ )$ будет представлять собой спектральную плотность шума, проинтегрированную по переменной $_y$ (пространственной частоте вдоль оси O_y) в пределах от до .

В частности, равенство (31) будет верно для ИС, в которых осуществляется непрерывное сканирование входных изображений вдоль оси O_x со скоростью , а возникающие при этом (на выходе искажающей системы) сигналы подвергаются временной фильтрации [6]. При этом импульсному отклику $\ _B(t)$ временного фильтра будет соответствовать функция

$$(x) \quad \frac{1}{\ } \quad _B \ \frac{x}{\ } \ .$$

В рассмотренном выше примере функция (17) соответствует импульсному отклику временного RC-фильтра с постоянной времени $a/ \ $.

Конкретными примерами ИС, где выполняется соотношение (31), могут служить некоторые типы сканирующих систем цифровой рентгенографии [10, 11]. Это позволяет использовать полученные в предлагаемой работе результаты (утверждение, следствие) для соответствующей оптимизации параметров временных фильтров, применяемых в данных системах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. При подстановке (13) в (11) получим

$$R(a) \quad \sup \ \bar{\ } | \bar{\ } \quad 0, \ _0\inf \ \_H(\ ) \ _0\inf \ \_W(a \ ) \quad \frac{L}{a} \ , \ a \quad L. \tag{П1}$$

Таким образом, стоящая перед нами задача заключается в отыскании максимума функции (П1) при условиях 1–4, 6.

Обозначим множество в правой части (П1)

$$X(a) \quad \bar{\ } | \bar{\ } \quad 0, \ _0\inf \ \_H(\ ) \ _0\inf \ \_W(a \ ) \quad \frac{L}{a} \quad (a \quad L) \tag{П2}$$

и множество в правой части (14)

$$X \quad \{\bar{\ } | \bar{\ } \quad 0, \quad _0\inf \ \_H(\ ) \quad L\bar{\ }\}. \tag{П3}$$

Принимая во внимание условия 3а и 3б, нетрудно убедиться, что система неравенств

$$\bar{\ } \quad 0, \ _0\inf \ \_H(\ ) \ _0\inf \ \_W(a \ ) \quad \frac{L}{a}, \tag{П4}$$

определяющих множество $X(a)$ в (П2), будет эквивалентна системе неравенств

$$\bar{\ } \quad 0, \ _0\inf \ \_H(\ )a\bar{\ } \ _0\inf \ \_W(a \ ) \quad L\bar{\ }. \tag{П5}$$

Из условий 1а и 1б следует согласно [12], что точные нижние границы $_0\inf \ \_H(\ )$ и $_0\inf \ \_W(a \ )$ как функции от аргумента $\bar{\ }$ будут определены и неотрицательны для всех $\bar{\ } \quad 0$. Учитывая это и равенство

$$\{a\bar{\ } | a \quad L, \bar{\ } \quad 0\} \quad [0, \quad),$$

оценим сверху левую часть во втором неравенстве (П5):

$$\inf_{0} {}_{-}H(\ )\bar{a}\inf_{0} {}_{-}W(a\ )\quad \inf_{0} {}_{-}H(\ )\sup_{\substack{a \quad L \\ - \quad 0}}[\bar{a}\inf_{0} {}_{-}W(a\ )]$$

$$\inf_{0} {}_{-}H(\ )\sup_{\bar{a}\quad 0}[\bar{a}\inf_{0\ a\quad \bar{a}} W(a\ )]\quad \inf_{0} {}_{-}H(\ )\sup_{x\quad 0}[x\inf_{0\ y\quad x} W(y)]$$

$$\inf_{0} {}_{-}H(\ )\max_{x\quad 0}[x\inf_{0\ y\quad x} W(y)]\qquad \inf_{0} {}_{-}H(\ ).\qquad (П6)$$

Из (П6) следует, что для любого $a\quad L$ система неравенств (П5) или система неравенств (П4), что то же самое, повлечет за собой систему неравенств

$$\bar{\ }\quad 0,\quad \inf_{0} {}_{-}H(\ )\quad \bar{L},$$

а значит, согласно (П2) и (П3) будет верно включение

$$X(a)\quad X \text{ для всех } a\quad L.\qquad (П7)$$

Из (П7) вытекает (см. [13])

$$R(a)\quad \sup X(a)\quad \sup X\quad \hat{R} \text{ для всех } a\quad L.\qquad (П8)$$

Таким образом мы нашли верхнюю границу $\hat{R}$ функции $R(a)$ из (П1). Покажем теперь, что

$$\hat{R}\quad 0.\qquad (П9)$$

Из условий 3а и 4а следует, что для $\quad 1/2$ существует $\quad 0$ такое, что

$$1/2\quad W(x)\quad 3/2, \text{ если } x\quad (\quad,\ ).$$

Отсюда

$$W(x)\quad 1/2 \text{ для всех } x\quad [0,\ /2],$$

а значит, (см. [12])

$$\inf_{x\quad [0,\ /2]} W(x)\quad 1/2,$$

откуда получаем

$$\max_{x\quad 0}[x\inf_{0\ y\quad x} W(y)]\quad \frac{}{2}\inf_{0\ y\quad /2} W(y)\quad \frac{}{2}\frac{1}{2}\quad 0.\qquad (П10)$$

Далее, из условий 3б и 4б следует, что для $\quad 1/2$ существует $\quad 0$ такое, что

$$1/2\quad H(\ )\quad 3/2, \text{ если }\quad (\quad,\ ).$$

Отсюда

$$H(\ )\quad 1/2 \text{ для всех }\quad [0,\ /2].$$

Следовательно, (см. [12])

$$\inf_{[0,\ \ /2]} H(\ )\quad 1/2,$$

а значит, (см. [13])

$$_0\inf\ _{-}H(\ )\quad 1/2 \text{ для всех } ^{-}\quad [0,\quad /2]$$

или в силу положительности

$$_0\inf\ _{-}H(\ )\qquad /2 \text{ для всех } ^{-}\quad [0,\ \ /2], \tag{П11}$$

что то же самое. Далее, из непрерывности функции L^{-} в нуле имеем, что для $/2$ (0 по доказанному выше) существует $_0$ 0 такое, что $|L^{-}|$ $/2$, если $^{-}$ ($_0$, $_0$). Отсюда

$$L^{-}\qquad /2 \text{ для всех } ^{-}\quad [0,\quad _0/2]. \tag{П12}$$

Из (П11) и (П12) получаем

$$_0\inf\ _{-}H(\ )\quad L^{-} \text{ для всех } ^{-}\quad [0,\quad _1],$$

где $_1$ $\frac{1}{2}\min\{\ _0,\ \}$. Отсюда и из (П3) следует, что $[0,\ \ _1]$ X, а значит, (см. [13])

$$\hat{R}\quad \sup X\quad \sup[0,\ \ _1]\qquad _1\quad 0,$$

что и доказывает справедливость неравенства (П9).

Покажем теперь, что

$$\hat{R}\qquad . \tag{П13}$$

Из условия 3б и свойства точной нижней границы имеем

$$_0\inf\ _{-}H(\ )\quad H(0)\quad 1 \text{ для всех } ^{-}\quad 0.$$

Из этого вытекает, что система неравенств

$$^{-}\quad 0,\qquad _0\inf\ _{-}H(\ )\quad L^{-},$$

определяющая множество X, повлечет за собой систему неравенств $^{-}$ 0, L^{-}. Следовательно, будет справедливо включение

$$X\quad \{^{-}|^{-}\quad 0,\qquad L^{-}\}\quad \{^{-}|0\quad ^{-}\qquad /L\}\quad [0,\ \ /L],$$

а значит, (см. [13])

$$\hat{R}\quad \sup X\quad \sup[0,\ \ /L]\qquad /L,$$

что в силу положительности и L и доказывает справедливость неравенства (П13).

Докажем теперь справедливость включения

$$X \quad [0, \hat{R}). \qquad (П14)$$

Действительно, из условия 1б согласно [12] следует, что точная нижняя граница $_0 \inf_{\_} H(\ )$ как функция от аргумента $^{-}$ будет определена, неотрицательна и будет невозрастающей при $^{-} \quad 0,$ а значит, с учетом положительности и L и функция $f(^{-}) \quad _0 \inf_{\_} H(\ ) \quad L^{-}$ будет определена и невозрастающей при $^{-} \quad 0.$ Отсюда и из (П3) имеем

$$X \quad \{^{-} | ^{-} \quad 0,\ f(^{-}) \quad 0\}. \qquad (П15)$$

Так как функция $f(^{-})$ определена и не возрастает при $^{-} \quad 0,$ то множество X в виде (П15) может быть согласно [14, 15] только одним из множеств вида $[0, \ _0),$ где $0 \quad _0 \quad ,$ или $[0, \ _0],$ где $0 \quad _0 \quad .$ Отсюда с учетом соотношений $\sup X \quad \hat{R} \quad 0$ вытекает справедливость включения (П14).

Докажем теперь справедливость неравенства

$$x_0 / \hat{R} \quad L. \qquad (П16)$$

Доказано, что $X \quad [0, \hat{R}).$ Тогда отсюда и из (П3) имеем

$$_0 \inf_{\_} H(\ ) \quad L^{-} \ \text{ для всех } ^{-} \quad [0, \hat{R}) \qquad (П17)$$

или

$$L^{-} \quad _0 \inf_{\_} H(\ ) \quad 0 \ \text{ для всех } ^{-} \quad [0, \hat{R}), \qquad (П18)$$

что то же самое.

При доказательстве включения (П14) было отмечено, что функция $f(^{-}) \quad _0 \inf_{\_} H(\ ) \quad L^{-}$ определена и не возрастает при $^{-} \quad 0.$ Следовательно, противоположная ей по знаку функция $g(^{-}) \quad f(^{-}),$ стоящая в левой части неравенства (П18), будет определена и неубывающей при $^{-} \quad 0,$ а значит, и на промежутке $[0, \hat{R}).$ Кроме того, согласно (П18) функция $g(^{-})$ ограничена сверху нулем на промежутке $[0, \hat{R}).$ Таким образом, согласно теореме о пределе монотонной функции [12] при $^{-} \quad \hat{R} \quad 0$ функция $g(^{-})$ имеет конечный левый предел, причем

$$\lim_{\_ \ \hat{R} \ 0} g(^{-}) \quad \lim_{\_ \ \hat{R} \ 0} [L^{-} \quad _0 \inf_{\_} H(\ )] \quad \sup_{\_ \ [0, \hat{R})} [L^{-} \quad _0 \inf_{\_} H(\ )]. \qquad (П19)$$

Далее, как было отмечено при доказательстве включения (П14), функция $_0 \inf_{\_} H(\ )$ от аргумента $^{-}$ определена, неотрицательна и не возрастает при $^{-} \quad 0.$ Значит, в силу положительности функция $_0 \inf_{\_} H(\ )$ от аргумента $^{-}$ будет определена, неубывающая и ограничена сверху нулем на промежутке $[0,\hat{R})$. Отсюда по теореме о пределе монотонной функции [12] вытекает, что при $^{-} \quad \hat{R} \quad 0$ функция $_{0}\inf{}_{-} H(\ )$ имеет конечный левый предел, причем

$$\lim_{-\ \hat{R}\ \ 0} [\ \ _{0}\inf{}_{-} H(\ )] \quad \sup_{-\ [0,\hat{R})} [\ \ _{0}\inf{}_{-} H(\ )]. \qquad (\Pi 20)$$

По доказанному $0 \quad \hat{R}$. В результате в силу непрерывности функции L^{-} получаем

$$\lim_{-\ \hat{R}\ \ 0} [L^{-}] \quad L\hat{R}. \qquad (\Pi 21)$$

Поскольку функции L^{-} и $_{0}\inf{}_{-} H(\ )$ имеют конечные односторонние пределы при $^{-} \quad \hat{R} \quad 0,$ то согласно [16] будем иметь

$$\lim_{-\ \hat{R}\ \ 0} [L^{-} \quad _{0}\inf{}_{-} H(\ )] \quad \lim_{-\ \hat{R}\ \ 0} [L^{-}] \quad \lim_{-\ \hat{R}\ \ 0} [\ \ _{0}\inf{}_{-} H(\ )]. \qquad (\Pi 22)$$

Подставляя теперь правые части равенств (П19)–(П21) в (П22), получим

$$\sup_{-\ [0,\hat{R})} [L^{-} \quad _{0}\inf{}_{-} H(\ )] \quad L\hat{R} \quad \sup_{-\ [0,\hat{R})} [\ \ _{0}\inf{}_{-} H(\ )]. \qquad (\Pi 23)$$

Из (П18) согласно [12] следует, что

$$\sup_{-\ [0,\hat{R})} [L^{-} \quad _{0}\inf{}_{-} H(\ )] \quad 0.$$

Отсюда и из (П23) имеем

$$L\hat{R} \quad \sup_{-\ [0,\hat{R})} [\ \ _{0}\inf{}_{-} H(\ )] \quad 0. \qquad (\Pi 24)$$

С другой стороны,

$$_{0}\inf{}_{-} H(\ ) \quad \sup_{-\ [0,\hat{R})} [\ \ _{0}\inf{}_{-} H(\ )] \text{ для всех } ^{-} \quad [0,\hat{R}). \qquad (\Pi 25)$$

Из (П24) и (П25) окончательно получаем

$$L\hat{R} \quad _{0}\inf{}_{-} H(\ ) \quad 0 \text{ для всех } ^{-} \quad [0,\hat{R})$$

или

$$_{0}\inf{}_{-} H(\ ) \quad L\hat{R} \text{ для всех } ^{-} \quad [0,\hat{R}), \qquad (\Pi 26)$$

что то же самое.

Пусть теперь x_0 – произвольная точка наибольшего значения функции $x \; {}_0\inf_{y \quad x} W(y)$ на промежутке $[0, \quad)$ (по условию 6 такая точка существует). Тогда

$$x_0 \; {}_0\inf_{y \quad x_0} W(y). \qquad (\text{П27})$$

Доказано, что $\quad 0$, следовательно, $x_0 \quad 0$. Подставляя (П27) в (П26), получим

$$x_0 \; {}_0\inf_{y \quad x_0} W(y) \; {}_0\inf \_ H(\;) \quad L\hat{R} \text{ для всех } \bar{} \quad [0, \hat{R}). \qquad (\text{П28})$$

Из условий 1а, 1б, 3а, 3б и положительности x_0 имеем

$$x_0 \; {}_0\inf_{y \quad x_0} W(y) \; {}_0\inf \_ H(\;) \quad x_0 \text{ для всех } \bar{} \quad [0, \hat{R}).$$

Отсюда и из (П28) получаем $x_0 \quad L\hat{R}$, что и доказывает с учетом положительности $\hat{R}$ справедливость (П16).

Докажем, наконец, что граница $\hat{R}$ достигается при

$$a \quad a_0 \quad x_0 / \hat{R}. \qquad (\text{П29})$$

Поскольку доказано, что $a_0 \quad L$, то при подстановке (П29) в (П2) с учетом положительности x_0 и $\hat{R}$ получим

$$X(a_0) \quad \bar{}|\bar{} \quad 0, {}_0\inf \_ H(\;) \; {}_0\inf \_ W(a_0 \;) \quad \frac{L}{a_0}$$

$$\bar{}|\bar{} \quad 0, {}_0\inf \_ H(\;) x_0 \; {}_0\inf \_ W \; \frac{x_0}{\hat{R}} \qquad L\hat{R}$$

$$\bar{}|\bar{} \quad 0, {}_0\inf \_ H(\;) x_0 \; {}_0\inf_{\frac{x_0}{\hat{R}} \quad \frac{x_0}{\hat{R}} -} W \; \frac{x_0}{\hat{R}} \qquad L\hat{R}$$

$$\bar{}|\bar{} \quad 0, {}_0\inf \_ H(\;) x_0 \; {}_0\inf_{y \quad \frac{x_0}{\hat{R}} -} W(y) \quad L\hat{R} \quad . \qquad (\text{П30})$$

Так как x_0 и $\hat{R}$ положительны, то

$$0 \quad x_0 \frac{\bar{}}{\hat{R}} \quad x_0 \text{ для всех } \bar{} \quad [0, \hat{R}). \qquad (\text{П31})$$

Из условия 1а и положительности x_0 и $\hat{R}$ согласно [12] следует, что функция $F(\bar{}) \quad {}_0\inf_{y \quad \frac{x_0}{\hat{R}} -} W(y)$ будет определена, неотрицательна и будет невозрастающей при $^{-}$ 0. Отсюда и из (П31) получаем

$$\inf_{0 \quad y \quad \frac{x_0 -}{\hat{R}}} W(y) \qquad \inf_{0 \quad y \quad x_0} W(y) \quad \text{для всех} \ ^{-} \quad [0, \hat{R}). \qquad (\text{П32})$$

Как было отмечено выше, точная нижняя граница $_0 \inf_{\_} H(\ )$ как функция от аргумента $^{-}$ будет определена и неотрицательна при $^{-}$ 0. С учетом этого, неравенства (П32) и положительности x_0 будем иметь

$$_0 \inf_{\_} H(\ ) x_0 \inf_{0 \quad y \quad \frac{x_0 -}{\hat{R}}} W(y) \qquad _0 \inf_{\_} H(\ ) x_0 \inf_{0 \quad y \quad x_0} W(y) \quad \text{для всех} \ ^{-} \quad [0, \hat{R}). \qquad (\text{П33})$$

Из (П28) и (П33) следует

$$_0 \inf_{\_} H(\ ) x_0 \inf_{0 \quad y \quad \frac{x_0 -}{\hat{R}}} W(y) \quad L\hat{R} \quad \text{для всех} \ ^{-} \quad [0, \hat{R}).$$

Отсюда и из (П30) вытекает, что $[0, \hat{R}) \quad X(a_0)$. Но тогда [13]

$$\sup[0, \hat{R}) \quad \hat{R} \quad R(a_0) \quad \sup X(a_0).$$

Отсюда и из выражения (П8) получаем $R(a_0) \quad \hat{R}$. Учитывая равенство $\sup_{a \quad 0} R(a) \quad \sup_{a \quad L} R(a)$ согласно (11), окончательно имеем

$$\sup_{a \quad 0} R(a) \quad R(a_0) \quad \hat{R}.$$

Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979.
2. Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин: Пер. с англ. /Под ред. Г. Эндрюса, Л. Инло. М.: Мир, 1973.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. Кн. 2.
4. Обработка изображений и цифровая фильтрация: Пер. с англ. /Под ред. Г. Хуанга. М.: Мир, 1979.
5. Завьялкин Ф. М., Удод В. А. Максимальная разрешающая способность изображаю- щих систем, достигаемая при апостериорной линейной фильтрации изображений // Автометрия. 1992. № 3. С. 75.
6. Смирнов А. Я., Меньшиков Г. Г. Сканирующие приборы. Л.: Машиностроение, 1986.
7. Гурвич А. М. Квантовые флуктуации и их роль в прикладной рентгенолюминесценции // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. 46, № 5.
8. Удод В. А. Корректное формальное описание критерия пространственной разрешающей способности по Фуко // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2002. 9, вып. 2. С. 473.

9. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: Пер. с франц. М.: Мир, 1983. Т. 1.
10. Недавний О. И., Удод В. А. Современное состояние систем цифровой рентгенографии (обзор) // Дефектоскопия. 2001. № 8. С. 62.
11. Недавний О. И., Удод В. А. Математическая модель многоканальных сканирующих систем цифровой рентгенографии // Контроль. Диагностика. 2002. № 2. С. 27.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 1.
13. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
15. Рудин У. Основы математического анализа: Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
16. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.

Томский государственный университет,
E-mail: udod@ef.tsu.ru

Поступила в редакцию
21 марта 2003 г.