

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВУМЕРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. П. Реутов  
(Горький)

Переход к турбулентности в пограничном слое, как правило, связан с нарастанием двумерных волн [1—4]. Поэтому важная роль в создании теории перехода принадлежит исследованию нелинейной стадии развития двумерной неустойчивости. Методы теории слабой нелинейности позволяют рассчитать коэффициенты в динамическом уравнении для амплитуды слабой волны, предложенном Ландау [5, 6]. Однако при тех значениях параметров течения, которые обычно реализуются в области перехода, приближение слабой нелинейности описывает лишь начальную стадию усиления волны. В данной работе рассматриваются существенно нелинейные структуры, возникающие в пограничном слое в результате ограничения двумерной неустойчивости.

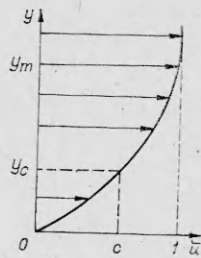
Механизм неустойчивости пограничного слоя в случае бесконечно малых возмущений изучен давно (см., например, [1, 7]). Известно, что возникновение вязкого пристеночного слоя (ВПС) приводит к дестабилизации волны, а резонансное взаимодействие волна — течение может ослабить либо полностью подавить эту неустойчивость. В том случае, когда толщина области резонансного взаимодействия течения с волной — критического слоя (КС) — достаточно мала, появляется возможность для аналитического исследования существенно нелинейного этапа развития неустойчивости [8—12]. Упрощение задачи связано с локализацией нелинейности в пределах тонкого КС. Стационарные (в системе отсчета волны) КС подробно изучены в [8, 9]. В этих работах рассматривались также собственные волны в пограничном слое с нелинейным КС. Однако в [8] не учитывалось образование ВПС (ставились условия проскальзывания на стенке). В [9] при определении структуры ВПС не принимался во внимание сдвиг скорости первичного течения вблизи стенки, что оправдано лишь при очень больших числах Рейнольдса. Кроме того, из решения нестационарной задачи [12] следует, что построенные в [9] собственные волны соответствуют порогу жесткого возникновения неустойчивости (а не ее ограничению). Ниже решается задача о стационарных волнах, возникающих при умеренно больших числах Рейнольдса, характерных для основной части петли нейтральной кривой пограничного слоя. Анализ строится в рамках теории КС и основывается на наглядных представлениях о структуре КС и механизме неустойчивости. С формальной точки зрения предлагаемую процедуру решения можно рассматривать как обобщение метода Толлмина, используемого для построения нейтральной кривой в линейной теории гидродинамической неустойчивости [1]. Результаты расчетов сопоставляются с известными экспериментальными данными.

**1. Обход резонансной точки.** В качестве исходных воспользуемся уравнениями переноса вихря в вязкой несжимаемой жидкости [1]. Введем нормированные переменные, принимая масштабы длины и скорости равными какой-либо характерной толщине пограничного слоя  $\delta$  и скорости потока на бесконечности  $u_\infty$  соответственно. Ось  $x$  прямоугольной системы координат направим вниз по течению, ось  $y$  — по нормали к поверхности. Тогда уравнения для двумерного течения принимают вид

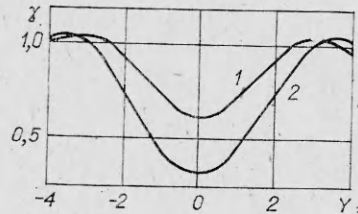
$$(1.1a) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \zeta;$$

$$(1.1b) \quad \Delta \Psi = -\zeta \left( u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right),$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ;  $\zeta$  — завихренность течения;  $\Psi$  — функция тока;  $u$  и  $v$  — продольная и поперечная компоненты скорости соответственно;  $\text{Re} = u_\infty \delta / \nu$  — число Рейнольдса, предполагаемое большим ( $\nu$  — кинематическая вязкость среды). Профиль скорости параллельного течения в пограничном слое  $\bar{u}(y)$  показан на фиг. 1. Будем искать решения (1.1) в виде стационарных волн, когда  $\Psi$  и  $\zeta$  зависят только от двух переменных:  $y$  и  $\xi = x - ct$  ( $c$  — фазовая скорость волны). Представляя функцию тока в виде  $\Psi = \int \bar{u}(y) dy + \psi$ , рассмотрим линейное уравнение для  $\psi$ , следующее из (1.1) в предельном случае невязкой среды. При этом для профиля гармонических волновых возмущений получается уравнение Рэлея [4, 7], которое, как известно, содержит особенность в резонансной точке  $y = y_c$ , где  $\bar{u}(y_c) = c$  (см. фиг. 1). В качестве базисных функций



Ф и г. 1



Ф и г. 2

уравнения Рэлея возьмем функции Толлмина [8—10], которые при  $\eta = y - y_c \rightarrow 0$  имеют вид  $\varphi_a = \eta + O(\eta^2)$ ,  $\varphi_b = 1 + O(\eta^2) + (\bar{u}_c''/\bar{u}_c')\varphi_a \ln|\eta|(\bar{u}_c' - d\bar{u}/dy_c)$ ,  $\bar{u}_c'' = d^2\bar{u}/dy_c^2$ . В результате получим для  $\psi$  выражение вида

$$(1.2) \quad \psi = A_{\pm}\varphi_a(y) + B_{\pm}\varphi_b(y)e^{i\alpha\zeta} + \text{к. с.},$$

где  $\alpha$  — волновое число;  $A_{\pm}$  и  $B_{\pm}$  — постоянные; знаки  $+$  и  $-$  относятся к областям  $y > y_c$  и  $y < y_c$  соответственно; к. с. означает комплексно-сопряженное выражение. Из (1.2) видно, что при  $y \rightarrow y_c$  неограниченно растут пульсации завихренности и нелинейность\*. Таким образом, в окрестности резонансной точки нельзя пренебречь одновременно вязкостью и нелинейностью. В более общей постановке (с учетом нестационарности возмущений) затронутая здесь проблема обхода резонансной точки аналогична известной для волн в бесстолкновительной плазме. Известно, что даже в случае идеальной жидкости наличие резонанса приводит к поглощению гидродинамических волн, которое можно рассматривать как аналог затухания Ландау в плазме [13]. В линейной теории проблема обхода особенности сводится к проблеме выбора ветви многозначной функции при переходе через резонансную точку. Для вывода правила обхода в случае нелинейных волн необходим анализ структуры КС. В [9] показано, что правило обхода вязкого нелинейного КС, так же как и в линейной теории, можно выразить через скачок фазы логарифма, входящего в определение  $\varphi_b$ . Однако теперь этот скачок фазы зависит от амплитуды волн. В записи через коэффициенты (1.2) правило обхода вязкого нелинейного КС принимает вид

$$(1.3) \quad B_+ = B_- \equiv B, \quad A_+ - A_- = -i\Phi \frac{\bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} B,$$

где  $\Phi$  — увеличение фазы логарифма при переходе от  $y_c + 0$  к  $y_c - 0$ . Если особенность устраняется вязкостью, характерная толщина КС равна [1]  $d_l = (\alpha|\bar{u}_c'| \text{Re})^{-1/3}$ ; если же вязкость отсутствует, но сохранена нелинейность, получим масштаб нелинейного КС [9]  $d_n = (B_m/|\bar{u}_c'|)^{1/2}$ , где  $B_m = 2|B|$  — амплитуда колебаний функции тока в КС. Для вязкого и нелинейного КС введем обобщенный масштаб  $d_c = \max(d_l, d_n)$ . Подчеркнем, что эти выводы справедливы только для течений с тонким КС, когда  $\bar{u}$ ,  $\bar{u}'$ ,  $\bar{u}''$  мало меняются на масштабе КС.

Наглядный способ вычисления скачка фазы логарифма  $\Phi$  дает вихревая трактовка гидродинамического движения. Поскольку КС представляет собой тонкий вихревой слой, уравнение (1.16) заменим на одномерное

$$(1.4) \quad \Psi'' = -\zeta$$

(штрихами обозначены производные по  $y$ ). Можно показать, что возмущения завихренности в тонком КС создаются полем скоростей, которое явно

\* Параметрами нелинейности при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  являются отношения  $(u - \bar{u})/(\bar{u} - c)$  и  $v/(\bar{u} - c)$ .

не зависит от них самих. Продольная скорость задается первичным течением, поперечная — определяется возмущениями завихренности за пределами КС и находится из линейного внешнего решения (1.2):  $\bar{u} - c \approx \approx \bar{u}'_c \eta$ ,  $v = -2 \operatorname{Re} [i\alpha B \exp(i\alpha\xi)]^*$ . Однако скачок амплитуды пульсаций продольной скорости, индуцированный возмущениями завихренности в КС, оказывает существенное влияние на профиль пульсаций скорости во внешних (по отношению к КС) областях течения, что и выражается вторым условием (1.3). Именно этот скачок определяет поток энергии и импульса от КС к внешним областям. Первое условие (1.3) соответствует малому приращению поперечной скорости при переходе через тонкий вихревой слой.

Ограничиваясь случаем течения с монотонным возрастанием скорости ( $\bar{u}'(y) > 0$ ) и представляя завихренность КС в виде  $\zeta = -\bar{u}'_c + + (-\bar{u}''_c \eta + \zeta_i)$ , введем нормированные переменные

$$X = d\xi, \quad Y = (y - y_c)/d_l, \quad \Omega = \zeta_i/\bar{u}''_c d_l, \quad s = d_n^2/d_l^2,$$

где  $s$  — нормированная амплитуда волны (при  $s \sim 1$  эффекты вязкости и нелинейности в КС выравниваются). Поскольку далее случай больших  $s$  не рассматривается, нормировки сделаны через толщину вязкого КС  $d_l$ . Без ущерба общности можно считать амплитуду  $B$  действительной и положительной. Тогда из (1.1а) следует уравнение вида

$$(1.5) \quad \partial^2 \Omega / \partial Y^2 - Y \partial \Omega / \partial X - s \sin X \partial \Omega / \partial Y = -s \sin X.$$

Оно отличается от аналогичного уравнения, полученного в [9] методом сращиваемых асимптотических разложений, только формой записи (см. уравнение (3.20) в [9]). Искомые решения (1.5) должны описывать затухание осцилляций завихренности при  $|Y| \gg 1$ . Асимптотики таких решений (1.5) можно представить в виде разложения по степеням  $1/Y$ :

$$(1.6) \quad \Omega \rightarrow C \pm (1/2)H - (s/Y) \cos X + (s^2/4Y^3) \cos 2X + \dots,$$

где  $C$  — произвольная постоянная;  $H$  — скачок средней завихренности, индуцированный нелинейным КС. Необходимость включения  $H$  в (1.6) становится очевидной после усреднения (1.5) по периоду волны и интегрирования полученного уравнения по  $Y$  (подробнее см. [9]). Используя (1.2) и (1.4), можно связать скачок фазы логарифма  $\Phi$  с решением краевой задачи (1.5), (1.6):

$$(1.7) \quad \Phi = - (2/s) \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Omega \sin X \rangle dY,$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает среднее по периоду волны. Зависимость  $\Phi$  от параметра  $\lambda_c = d_l^3/d_n^3 \equiv s^{-2/3}$  построена в [9]. В [12] для нее предложена простая аналитическая аппроксимация  $\Phi = -\pi/(1 + 0,68s^2)^{3/4}$ . На фиг. 2 показана нормированная кривизна профиля средней скорости в КС  $\gamma = = \langle u \rangle''/\bar{u}''_c \equiv 1 - d\langle \Omega \rangle/dY$  (кривые 1, 2 соответствуют  $s = 1$  и 2). Видно, что при увеличении амплитуды волны профиль средней скорости в КС стремится к линейному\*\*.

**2. Учет влияния стенки.** Для использования правила обхода (1.3) при наличии стенки необходимо потребовать, чтобы решение (1.5) выходило на асимптотики (1.6) до пересечения с уровнем стенки. Это условие изолированности КС от стенки в общем виде можно записать как  $y_c/d_c \gg 1$ . Кроме того, из-за прилипания жидкости к стенке возмущения

\* Убедиться в этом можно, используя решение (1.2) при  $|\eta| \geq d_c$  и оценивая приращение скоростей в слое  $|\eta| < d_c$  из (1.4) и условия  $\zeta(\eta) \sim \zeta|_{\eta=\pm d_c}$ .

\*\* Для определения структуры КС задача (1.5), (1.6) решалась численно. Решение представлялось в виде отрезка комплексного ряда Фурье (аналогично см. п. 2). При этом было получено хорошее совпадение значений  $\Phi$  с приведенными в [9].

невязкого типа (1.2) порождают вязкие вихревые возмущения, которые быстро затухают в направлении от стенки — возникает вязкий пристеночный слой. В [7] подчеркивалось, что при умеренно больших числах Рейнольдса сильное влияние на форму нейтральной кривой оказывает процесс трансформации вязких возмущений при их прохождении через КС. Этот процесс существен даже при  $y_c/d_1 \equiv z_c \gg 3$ , когда КС может рассматриваться как изолированный. Пренебрегая при определении структуры ВПС сдвигом скорости первичного течения и считая КС изолированным, можно получить лишь асимптоту верхней ветви нейтральной кривой при очень больших  $Re$  [9, 12]. Приближение изолированного КС с учетом трансформации вязких возмущений в КС фактически используется в линейной теории неустойчивости и позволяет построить основную часть петли нейтральной кривой пограничного слоя [1, 7, 14, 15].

Покажем, что аналогичное приближение может быть использовано и в случае нелинейного КС. Анализ нелинейной задачи усложняется тем, что среднее течение, обусловленное скачком завихренности на КС (см. п. 1), находится однозначно лишь с учетом непараллельности первичного течения. Соответственно асимптотические разложения должны содержать в качестве малого параметра отношение  $x/Re \ll 1$  [9]. Однако для отыскания собственных значений краевой задачи в главном приближении можно предложить простую схему, которая основывается на наглядных физических представлениях и является обобщением известного в линейной теории метода Толлмина [1].

В случае изолированного КС вязкие возмущения сильно затухают на пути от стенки до слоя совпадения\*. Поэтому они оказывают слабое влияние на поле скорости в КС (см. п. 1) и остается в силе уравнение (1.5). Видно, что уравнение (1.5) описывает не только процесс порождения вихревых возмущений на градиенте завихренности первичного течения, но и процесс распространения падающих на КС возмущений вязкого типа. Чтобы учесть вязкие возмущения, приходящие от стенки, положим  $\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$ , где  $\Omega^{(1)}$  — рассмотренное в п. 1 вынужденное решение (1.5),  $\Omega^{(2)}$  — решение однородного уравнения

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 \Omega^{(2)}}{\partial Y^2} - Y \frac{\partial \Omega^{(2)}}{\partial X} - s \sin X \frac{\partial \Omega^{(2)}}{\partial Y} = 0,$$

удовлетворяющее условию затухания возмущений завихренности над КС:  $\Omega^{(2)} \rightarrow \text{const}$  при  $Y \rightarrow +\infty$ . Можно показать, что характер асимптотического поведения  $\Omega^{(2)}$  при  $|Y| \rightarrow \infty$  определяется оператором, состоящим из первого и второго членов уравнения (2.1). В выражение для скачка фазы логарифма (1.7) войдет только компонента  $\Omega^{(1)}$ , определяющая сращивание невязких решений (1.2). Уравнение (2.1) можно использовать для описания вязких возмущений на всем интервале от стенки до КС. Действительно, при  $s = 0$  из него следует известное в линейной теории [1] уравнение для комплексной амплитуды гармонического ( $\sim \exp(iX)$ ) возмущения. Если же  $s \neq 0$ , вклад члена  $\sim s$  в (2.1) убывает при  $|Y| \rightarrow \infty$  как  $s/\sqrt{Y}$ . Таким образом, и в случае вязких возмущений нелинейность оказывается локализованной в КС. Поэтому отличие фиксированного поля поперечной скорости, использованного при выводе (1.5) и (2.1), от истинного распределения вблизи стенки (которое обращается на стенке в нуль) приводит в пределах применимости данного подхода к малой ошибке.

Введем функцию тока для вязких возмущений  $\tilde{\psi}$  и перейдем от  $\Omega^{(2)}$  к завихренности в исходной нормировке  $\tilde{\zeta}$ . Поскольку между  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\zeta}$  также имеется связь (1.4), условие обращения продольной скорости на стенке

\* Для масштаба спада вязких возмущений по  $y$  — направлению вблизи стенки — можно получить оценку  $l_W \sim y_c \sqrt{2} (d_1/y_c)^{3/2} \ll y_c$ .

в нуль дает краевое условие для уравнения (2.1)

$$(2.2) \quad \int_{-\infty}^0 \tilde{\zeta}_\alpha dy = \psi'_\alpha|_{y=0},$$

где  $\alpha$  — комплексные амплитуды фурье-гармоник:  $\psi_\alpha = \langle \psi_{\text{exp}}(-i\alpha\xi) \rangle$  и т. п. Чтобы учесть обратное влияние вязких возмущений на возмущения невязкого типа (1.2), запишем условие равенства нулю нормальной составляющей скорости на стенке:

$$(2.3) \quad \psi_\alpha = \int_{-\infty}^0 dy_1 \int_{-\infty}^{y_1} dy_2 \tilde{\zeta}_\alpha(y_2)|_{y=0}.$$

Из (2.2) и (2.3) получим краевое условие для  $\psi_\alpha$  в виде

$$(2.4) \quad \psi_\alpha = -y_c F \psi'_\alpha|_{y=0},$$

$$F = - \int_{-\infty}^{-y_c} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\eta_1} d\eta_2 \tilde{\zeta}_\alpha / y_c \cdot \int_{-\infty}^{-y_c} d\eta_1 \tilde{\zeta}_\alpha$$

характеризует эффективную податливость границы для невязких возмущений.

Для расчета  $F$  приведем нормировку завихренности  $\tilde{\zeta}$  в соответствие с краевым условием (2.2), полагая  $\tilde{\Omega} = \tilde{\zeta}(2d_l/u_m)$ , где  $u_m = 2|\psi'_\alpha(0)|$  — амплитуда колебаний продольной скорости на стенке в невязком решении (1.2). Представляя  $\tilde{\Omega}$  в виде ряда Фурье

$$\tilde{\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}_n \exp(inX)$$

( $\tilde{\Omega}_0 = \langle \tilde{\Omega} \rangle$ ,  $\tilde{\Omega}_{-n} = \tilde{\Omega}_n^*$ ), получим систему уравнений для комплексных амплитуд гармоник в виде

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}_n}{\partial Y^2} - inY \tilde{\Omega}_n = \frac{1}{2} is \left( \frac{\partial \tilde{\Omega}_{n+1}}{\partial Y} - \frac{\partial \tilde{\Omega}_{n-1}}{\partial Y} \right).$$

Краевые условия для  $\tilde{\Omega}_n$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$  имеют вид

$$(2.6) \quad \int_{-\infty}^{-z_c} \tilde{\Omega}_n dY = E \delta_{1n}, \quad \tilde{\Omega}_n \rightarrow 0|_{Y \rightarrow \infty},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $E = \exp(i\theta)$ ;  $\theta = \arg[\psi'_\alpha(0)/\psi_\alpha(y_c)]$  — сдвиг между фазами колебаний функции тока в КС и продольной скорости на стенке в невязком решении (1.2). Учитывая, что при  $Y \rightarrow \infty$   $d\tilde{\Omega}_0/dY \rightarrow 0$ , из системы (2.5) можно исключить  $d\tilde{\Omega}_0/dY$  и получить замкнутую краевую задачу для  $\tilde{\Omega}_n$  с  $n = 1, 2, \dots$  Решение этой задачи представим в виде  $\tilde{\Omega}_n = \Omega_n^{(c)} \cos \theta + \Omega_n^{(s)} \sin \theta$ , где  $\Omega_n^{(c)}$  удовлетворяет (2.5), (2.6) при  $E = 1$ ,  $\Omega_n^{(s)}$  — решение (2.5), (2.6) при  $E = i$ . Соответственно для  $F$  получим выражение

$$F(z_c, s; \theta) = (F_c \cos \theta + F_s \sin \theta) e^{-i\theta},$$

$$F_a = - \frac{1}{z_c} \int_{-\infty}^{-z_c} dY_1 \int_{-\infty}^{Y_1} dY_2 \Omega_1^{(a)}(Y_2) \quad (a = c, s).$$

В предельном случае линейных волн ( $s \rightarrow 0$ ) выполняется соотношение  $\Omega_1^{(s)} = i\Omega_1^{(c)}$ . При этом  $F$  не зависит от  $s, \theta$  и совпадает с хорошо известной из линейной теории устойчивости функцией  $F(z_c)$  [14, 15]. При  $s \neq 0$  краевая задача (2.5), (2.6) решалась численно. Расчеты сделаны для

$s$	$\text{Re } F_c$	$\text{Im } F_c$	$\text{Re } F_s$	$\text{Im } F_s$
0	0,2036	0,3213	-0,3213	0,2036
0,4	0,2081	0,3012	-0,3216	0,2067
1,0	0,2430	0,2258	-0,3218	0,2171
1,5	0,3018	0,1564	-0,3176	0,2217
2	0,3738	0,0934	-0,3039	0,2172

$s \leq 2$  с удержанием в разложении Фурье первых четырех гармоник. Результаты вычисления  $F_c$  и  $F_s$  при  $z_c = 3,8$  представлены в таблице.

**3. Стационарные пульсации и установление автоколебаний.** Для замыкания краевой задачи воспользуемся стандартным условием на границе пограничного слоя  $y = y_m$  [1]:

$$(3.1) \quad \psi'_\alpha + \alpha \psi_\alpha = 0 \Big|_{y=y_m}.$$

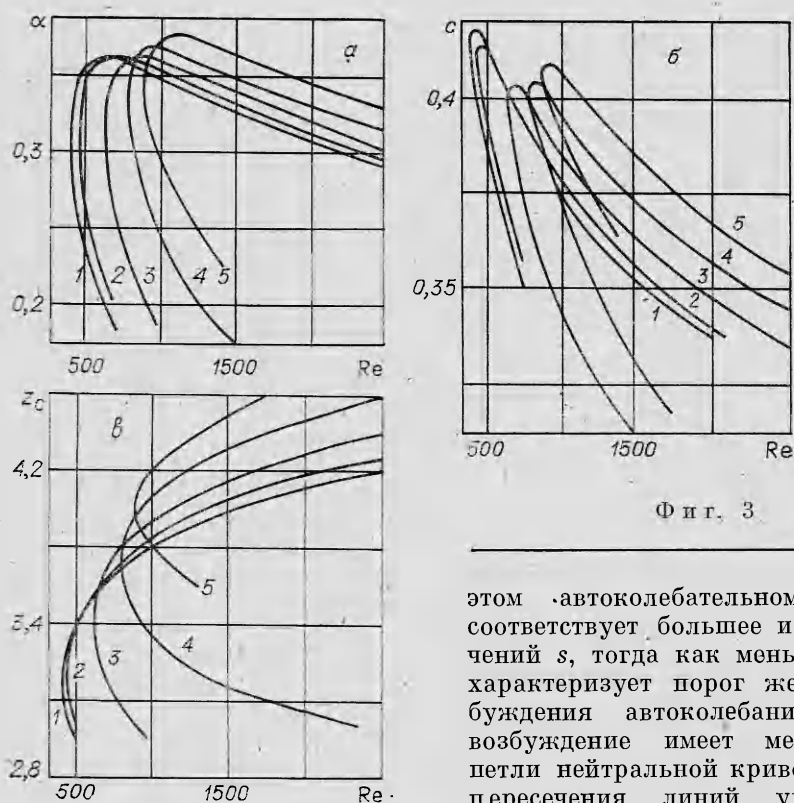
Подстановка (1.2) в (2.4) и в (3.1) приводит к следующему характеристическому уравнению для стационарных пульсаций:

$$(3.2) \quad F(z_c, s; \theta) = \frac{1}{y_c} \frac{\varphi_a(0) \Delta_b - \varphi_b(0) \Delta_a - i \Phi \frac{u_n}{u_c} \varphi_a(0) \Delta_a}{\varphi'_b(0) \Delta_a - \varphi'_a(0) \Delta_b + i \Phi \frac{u_c}{u_c} \varphi'_a(0) \Delta_a},$$

где  $\Delta_{a,b} = \varphi'_{a,b} + \alpha \varphi_{a,b} \Big|_{y=y_m}$ . Можно показать, что при  $s \rightarrow 0$  (3.2) переходит в характеристическое уравнение линейной теории [1]. Отметим здесь также, что в том случае, когда резонансное взаимодействие волна — течение и образование ВПС, будучи учтенными порознь, дают слабое затухание (усиление) волны, амплитуда стационарных пульсаций может быть найдена из условия равенства инкремента усиления и декремента затухания [12, 16]. Однако это наглядное представление применимо лишь при достаточно малых  $\alpha$ , что выражается в значительном смещении точки потери устойчивости уже в предельном случае линейных волн [16].

Чтобы вычислить корни (3.2) при  $s \neq 0$ , необходимо определить  $\theta$  для «пробных» решений (1.2). Удобно взять  $\theta$  из решения (1.2), удовлетворяющего краевому условию (3.1) и правилу обхода резонансной точки (1.3). Система двух вещественных уравнений, следующих из комплексного уравнения (3.2), решалась численно относительно  $\alpha$  и  $s$  при фиксированных  $z_c$  и  $s$ . Функции  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$  искались путем численного интегрирования уравнения Рэлея (аналогично см. [8]). Расчеты были сделаны для пограничного слоя с профилем скорости Блазиуса. Толщина  $\delta$  (см. п. 1) принималась равной толщине вытеснения пограничного слоя, и соответственно полагалось  $y_m = 3$ . Профиль Блазиуса  $\bar{u}(y)$  аппроксимировался кусочно-линейной функцией, заданной в интервале  $0 \leq y \leq 3$  на 3000 одинаковых отрезках. Результаты вычислений представлены на фиг. 3,  $a - e$  в виде линий уровня амплитуды стационарных пульсаций на различных плоскостях параметров (кривые 1—5 соответствуют  $s = 0; 0,4; 1; 1,5; 2$ ).

Нейтральные кривые линейной теории, которым на фиг. 3 соответствуют линии  $s = 0$ , имеют точку потери устойчивости  $\text{Re}_n \approx 420$ , что согласуется с результатами расчетов при более грубой аппроксимации профиля скорости [17]. Точка пересечения линий  $s = \text{const}$  с нейтральной кривой смещается при уменьшении  $s$  к носикку нейтральной кривой. К такому же выводу приводит слабонелинейная теория, в которой предельное положение этой точки ( $\text{Re}_*$ ) соответствует обращению в нуль второго коэффициента в уравнении Ландау [6]. Поведение линий уровня амплитуды на плоскости  $(\text{Re}, \alpha)$  можно связать с развитием волны во времени, когда сохраняется волновое число  $\alpha$ . Естественно предположить, что в той области параметров  $\text{Re}, \alpha$ , где линии уровня пересекаются (она ограничена верхней ветвью нейтральной кривой линейной теории и огибающей семейства  $s = \text{const}$ ), реализуется жесткое возбуждение автоколебаний. При



Ф и г. 3

результатами решения нестационарной задачи в различных предельных случаях [6, 12, 16]. Подчеркнем, что автоколебательные режимы с малым уровнем нелинейности ( $s \ll 1$ ) возможны лишь вблизи прилегающей к предельной точке  $Re_*$  нижней части петли нейтральной кривой (мягкое возбуждение) и в малой окрестности этой точки (жесткое возбуждение).

Приближение изолированного КС теряет смысл для волн большой амплитуды, когда замкнутые линии тока поля скоростей в КС («кошачьи глаза» [8]) приближаются к стенке. Поскольку удаление границы «кошачьих глаз» от слоя совпадения  $y=y_c$  равно  $2d_n$ , получим ограничение на амплитуду волны в виде  $s < \frac{1}{4} z_c^2$ . Это условие выполняется для кривых, показанных на фиг. 3. Как видно из фиг. 3, амплитуда автоколебательных режимов быстро возрастает при движении по верхней ветви нейтральной кривой  $s = 0$  в сторону больших  $Re$ , что объясняется ослаблением влияния нелинейности КС на эффективность вязкого механизма дестабилизации волны. При очень больших числах Рейнольдса, когда вследствие быстрого затухания вязких возмущений на пути от стенки до КС вязкий механизм становится линейным, приближение изолированного КС дает лишь те волны, которые соответствуют порогу жесткого возникновения неустойчивости [9, 12]. Таким образом, в случае изолированного КС стабилизация двумерной неустойчивости связана с влиянием нелинейности КС как на эффективность резонансного взаимодействия волна — течение, так и на эффективность вязкого механизма дестабилизации волны.

Установление автоколебательного режима на двумерной стадии развития неустойчивости в пограничном слое на пластине наблюдалось в [18]. При этом амплитуда пульсаций продольной скорости в их максимуме на профиле волны, возникающем вблизи стенки, составляла приблизительно 2,8% от  $u_\infty$ . В развитой выше теории эта величина близка к амплитуде колебаний продольной скорости на стенке в невязком решении (1.2)  $u_m$  (см. п. 2). Для волны с амплитудой  $s = 1$  при  $Re \sim 800$ , соответству-

ющей, как и в [18], автоколебательному режиму в окрестности верхней ветви нейтральной кривой, вычисления дают  $u_m/B \approx 1,66$ . Отсюда получается значение  $u_m \approx 3,1\%$ , близкое к измеренному в [18].

В заключение отметим, что точность асимптотической теории, в духе которой построено характеристическое уравнение для нелинейных волн (3.1), позволяет проводить лишь грубое сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными. Как известно, даже в линейном приближении асимптотическая теория приводит к заметному количественному расхождению с результатами прямого численного интегрирования краевой задачи Орра — Зоммерфельда. Кроме того, при умеренно больших  $Re$  заметную роль играют поправки, связанные с непараллельностью течения [3]. В то же время асимптотический подход позволяет дать качественный анализ структуры волнового поля в целом. В данной работе с его помощью выяснен механизм ограничения двумерной неустойчивости, определен характер зависимости амплитуды автоколебаний и порога их жесткого возникновения от параметров волны и числа Рейнольдса. Проведенный анализ представляет интерес также для построения моделей трехмерных нелинейных структур, возникающих в области перехода.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
2. Бетчов Р. Переход.— В кн.: Турбулентность. Принципы и применения/Под ред. У. Фроста и Т. Моулдена. М.: Мир, 1980.
3. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.
4. Маслоу С. А. Неустойчивости в сдвиговых течениях и переход.— В кн.: Гидродинамическая неустойчивость и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984.
5. Рейнольдс У., Поттер М. С. Конечн-амплитудная неустойчивость параллельных сдвиговых потоков.— Сб. пер. Механика, 1968, вып. 2.
6. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость.— ДАН СССР, 1977, т. 234, № 6.
7. Бетчов Р., Криминалле В. Вопросы гидродинамической неустойчивости. М.: Наука, 1971.
8. Benney D. J., Bergeron R. F. A new class of nonlinear waves in parallel flows.— Stud. Appl. Math., 1969, v. 48, N 3.
9. Huberman R. Critical layers in parallel flows.— Stud. Appl. Math., 1972, v. 51, N 2.
10. Жигулев В. Н. Современное состояние проблемы устойчивости ламинарных течений.— В кн.: Механика турбулентных потоков. М.: Наука, 1980.
11. Зубцов А. В., Пономарев В. И. Об одном классе нестационарных волн в ламинарном пограничном слое несжимаемой жидкости.— В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976.
12. Реутов В. П. Нестационарный критический слой и нелинейная стадия неустойчивости в плоском течении Пуазейля.— ПМТФ, 1982, № 4.
13. Кейз К. М. Гидродинамическая неустойчивость как задача с начальными данными.— В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964.
14. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
15. Басин А. М., Короткин А. И., Козлов Л. Ф. Управление пограничным слоем судна. Л.: Судостроение, 1968.
16. Реутов В. П. Нелинейная стадия двумерной неустойчивости в пограничном слое. Препринт ИПФ АН СССР, № 57. Горький, 1982.
17. Кочин И. Е., Кибель М. А., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Гостехиздат, 1948.
18. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Нелинейное развитие волны в пограничном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3.

Поступила 24/IV 1984 г.