

AMS subject classification: 65G30, 65G40

Нетрадиционные интервалы и их использование. Какие из них действительно имеют смысл?

С.П. Шарый^{1,2}

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090

E-mail: shary@ict.nsc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 16, 2023.

Шарый С.П. Нетрадиционные интервалы и их использование. Какие из них действительно имеют смысл? // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 2. — С. 215–234.

В статье рассматривается вопрос о том, почему интервалы, являющиеся основным объектом интервального анализа, имеют именно тот вид, который мы хорошо знаем и привычно используем, а не какой-то другой. В частности, мы исследуем, почему традиционные интервалы замкнуты, т. е. содержат свои концы, а также чем плох пустой интервал. Второй вопрос, рассматриваемый в работе, заключается в том, насколько целесообразно расширять набор традиционных интервалов некоторыми другими объектами. Мы показываем, что неправильные (“вывернутые”) интервалы и арифметика таких интервалов (полная интервальная арифметика Каухера) очень полезны с самых различных точек зрения.

DOI: 10.15372/SJNM20230208

Ключевые слова: *интервальный анализ, интервал, нетрадиционные интервалы, классическая интервальная арифметика, интервальная арифметика Каухера.*

Shary S.P. Non-traditional intervals and their use. Which ones really make sense? // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 2. — P. 215–234.

The paper discusses the question of why intervals, which are the main object of Interval Analysis, have exactly the form that we know well and habitually use, and not some other. In particular, we investigate why traditional intervals are closed, i. e. contain their endpoints, and also what is wrong with an empty interval. A second question considered in the work is how expedient it is to expand the set of traditional intervals by some other objects. We show that improper (“reversed”) intervals and the arithmetic of such intervals (the Kaucher complete interval arithmetic) are very useful from many different points of view.

Keywords: *interval analysis, interval, non-traditional intervals, classical interval arithmetic, Kaucher interval arithmetic.*

1. Введение

В статье рассматривается один из базовых объектов интервального анализа, а именно понятие интервала. Напомним, что классические интервалы — это замкнутые связные и ограниченные подмножества вещественной оси $\mathbb{R}$, т. е. множества вида

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \quad (1)$$

(см. [1, 3, 14, 28, 30, 31] и другие книги по интервальному анализу). Множество всех интервалов (обычно с арифметическими операциями над ними) обозначается $\mathbb{IR}$. Многомерные интервалы являются их обобщениями в том или ином смысле.

Обсуждаемые ниже вопросы были подняты в ходе дискуссии на форуме специалистов по интервальному анализу `reliable_computing-mailing list` (см. [40]), которая состоялась весной 2018 года. Её отправной точкой был вопрос о целесообразности введения и дальнейшего использования открытых и полуоткрытых интервалов, таких как $[a, b[$, $]a, b]$, в дополнение к существующим замкнутым интервалам (1) (мы обозначаем различные типы интервалов в стиле Н. Бурбаки). Автор имел опыт работы с подобными объектами и поэтому принял активное участие в развернувшейся дискуссии. Краткое изложение мнений по всем этим темам составляет основу данной статьи. Ранее некоторые из представленных идей были опубликованы в книге [1, раздел 1.11].

В дальнейшем под “традиционными интервалами” мы будем понимать обычные интервалы вида (1), которые образуют классическую интервальную арифметику $\mathbb{IR}$, а “нетрадиционные” интервалы, рассматриваемые в пункте 3, — это открытые и полуоткрытые интервалы. Далее в п. 4 в качестве нетрадиционных интервалов мы рассмотрим неправильные (“вывернутые”) интервалы из интервальной арифметики Каухера $\mathbb{KR}$ (которая является алгебраическим и порядковым пополнением $\mathbb{IR}$). В п. 5 кратко обсуждается польза особого “пустого интервала”. Наши обозначения соответствуют неофициальному международному стандарту [23].

В дополнение к традиционной “поконцевой форме” интервалов (1) есть и другие их эквивалентные представления. Например, форма “середина-радиус” для интервалов:

$$[m, r] = m + r[-1, 1], \quad \text{где } m = \frac{1}{2}(a + b), \quad r = \frac{1}{2}(b - a),$$

которая очень популярна в различных приложениях. Однако в нашей работе мы не будем рассматривать другие формы представления интервалов, кроме как каноническую (1), так как на окончательные теоретические выводы это никак не влияет.

Бесконечные и полубесконечные интервалы вида $[-\infty, p]$, $[q, \infty]$ и $[-\infty, p] \cap [q, \infty]$ также можно считать нетрадиционными. Впервые они были рассмотрены У. Кэхэном [17] и составляют так называемую интервальную арифметику Кэхэна (подробности см. в [1, 22, 25]). За прошедшие годы такие интервалы получили многочисленные применения в интервальном анализе и, как следствие, не нуждаются в дополнительном обосновании с нашей стороны. Поэтому мы не рассматриваем в статье эти нетрадиционные интервалы.

2. Почему в интервальном анализе интервалы замкнуты?

Интервалы в том виде, как они были предложены в работах основоположников интервального анализа — Т. Сунаги [48], Р.Э. Мура [29], Л.В. Канторовича [18] и др., — являются замкнутыми сегментами числовой оси. Но один из популярных мифов об интервальном анализе и интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ (распространённый как среди начинающих, так и среди профессионалов) заключается в том, что использование в ней только тех интервалов, которые содержат свои концы, является её недостатком и недоработкой. Это якобы делает невозможным выполнение некоторых теоретико-множественных операций над ними (типа дополнения), уменьшает их выразительность, ограничивает арифметические операции и т. д., и т. п.

Но являются ли отсутствие открытых концов и замкнутость интервалов в самом деле их недостатками?? Или, напротив, мы не понимаем каких-то глубинных причин конструкции $\mathbb{IR}$?

Такого рода вопросы задавал У. Кэхэн более полувека назад (см. [17]), и он первым предложил ввести незамкнутые интервалы (хотя и не реализовал свою идею до конца). Те же проблемы обсуждались специалистами в 1998 году, а затем в 2018 году.

Конечно, при практическом применении интервального анализа эти вопросы не столь актуальны, поскольку все встречающиеся на практике численные значения непрерывно меняющихся величин являются приближёнными, все измерения выполняются с ненулевой погрешностью и т. д. Поэтому почти невозможно установить различие между какой-либо точкой и другими значениями, бесконечно мало отличающимися от неё. Как следствие, для инженерной практики тот факт, что интервалы открыты или замкнуты, представляется довольно абстрактным и не очень важным. Однако этот вопрос важен как для теории, так и при вычислениях с интервалами.

Имеются аргументы в пользу использования нетрадиционных открытых и полуоткрытых интервалов в вычислениях и вообще в наших рассуждениях в пользу придания им “гражданских прав” в интервальном анализе. Иногда кажется, что такие интервалы значительно расширяют наши возможности. Например, пусть $[0, 1]$ — традиционный замкнутый интервал и пусть $]0, 1]$ — интервал полуоткрытый в нуле. Тогда

$$\frac{[0, 1]}{[0, 1]} = [-\infty, \infty], \quad \text{но} \quad \frac{[0, 1]}{]0, 1]} = [0, \infty], \quad (2)$$

поскольку первая дробь должна содержать результат деления $0/0$, а для второй дроби это не так.

Другими словами, выгода от того, что знаменатель в (2) открыт в одном из своих концов, составляет половину вещественной оси! Это соображение с успехом может использоваться в интервальном методе Ньютона для локализации нулей функций. Его итерации определяются формулой

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}'(\mathbf{X})} \quad (4)$$

есть интервальный оператор Ньютона (см., например, [1, 14, 28, 30, 31]). Если в дроби (4) числитель и знаменатель являются такими же, как в (2), то результат итерации (3) значительно улучшается (сужается). Как следствие, использование интервального метода Ньютона с этой модификацией арифметики позволяет гораздо быстрее находить решения уравнений, лучше отсеивать области, не содержащие решений и т. д.

Аналогичная ситуация может возникнуть при использовании интервального метода Гаусса-Зейделя для интервальных систем линейных уравнений (см., например, [1, 14, 22, 30, 31]). В нём необходимо делить на интервал, а потом результат пересекать с другим интервалом, и в этом случае мы снова можем получить такое же существенное улучшение конечного результата.

Более 20 лет назад я работал в новосибирской компании “УниПро”, разрабатывавшей программное обеспечение и выполнявшей тогда заказы для Sun Microsystems, Inc. Наша

команда занималась реализацией интервального Фортрана-95 для Sun [50], языка программирования со встроенным интервальным типом данных и операциями над ним. В то время наш руководитель проекта Билл Уолстер из Sun Microsystems вместе с Э. Хансеном писал книгу [14], которая посвящена интервальным методам глобальной оптимизации и решения уравнений. Приведённое выше соображение о пользе незамкнутых интервалов в интервальном методе Ньютона произвело на него очень большое впечатление. В связи с этим было решено реализовать что-то вроде открытых или полуоткрытых интервалов хотя бы частично, поскольку знак нуля, который используется в компьютерной арифметике с плавающей точкой в соответствии со стандартами IEEE 754/854, позволял легко представлять открытые и замкнутые нулевые концы интервалов.

Дело в том, что в компьютере интервал $[a, b]$ обычно представляется в виде пары действительных чисел (a, b) и для нулевых концов, с учётом наличия знака нуля, мы можем принять, что

$$\begin{aligned} (a, +0) &\text{ означает } [a, 0], & (a, -0) &\text{ означает } [a, 0[&& \text{для } a < 0, \\ (-0, b) &\text{ означает } [0, b], & (+0, b) &\text{ означает }]0, b] && \text{для } b > 0. \end{aligned}$$

Примерно то же самое предлагал для реализации незамкнутых в нуле интервалов У. Кэхэн в своей работе [17]. Возможность такой естественной реализации была очень заманчивой, и тогда модифицированное деление в (2) казалось возможным. Поэтому Билл Уолстер сразу же ухватился за эту идею.

В нашей команде я отвечал за семантическое тестирование и общее математическое консультирование проекта, поэтому мне пришлось задуматься о последствиях введения в язык новой конструкции. Изучая этот вопрос, я понял, что реализация открытых интервалов, даже частичная, вряд ли возможна и не имеет большого смысла. Оказалось, что существуют очень важные и даже фундаментальные математические причины того, что интервалы должны быть замкнуты. Дело в том, что по своим математическим свойствам ограниченные замкнутые интервалы существенно отличаются от незамкнутых, открытых и полуоткрытых интервалов. Именно об этом я сообщил Биллу Уолстеру, и реализация незамкнутых интервалов в Фортране-95 не состоялась.

Затем дискуссия в нашей команде приобрела более широкий контекст, и её члены начали обсуждать вопрос, нужны ли вообще какие-либо другие интервалы, кроме классических. Нужно ли вводить пустое множество в наши алгебраические системы интервалов? Эти темы обсуждаются в п. 4 и п. 5 данной работы, но далее мы постараемся понять, чем хороши замкнутые интервалы.

3. Замкнутые интервалы — это компактные множества, полные решетки и полные метрические пространства

Напомним, что подмножество S топологического пространства X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия S можно выбрать его конечное подмножество, которое всё равно покрывает S [9, 41, 47]. Фактически, понятие компактности формализует идею о том, что множество можно исчерпать конечным числом сколь угодно малых открытых множеств. Ограниченные замкнутые интервалы — это компактные множества в $\mathbb{R}$, а открытые и полуоткрытые интервалы некомпактны со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Рассматриваемые как метрические пространства, т. е. множества с абстрактным расстоянием (метрикой), незамкнутые интервалы не являются *полными пространствами*

(см. [9, 41]): фундаментальные последовательности (также называемые *последовательностями Коши*) элементов из таких незамкнутых интервалов не обязательно сходятся к какому-то пределу внутри этих интервалов. Например, последовательность чисел $1/k$, $k = 1, 2, \dots$, не имеет предела в полуоткрытом интервале $]0, 1]$.

Частично упорядоченное множество, в котором для каждой пары элементов мы можем свободно брать их точную верхнюю грань (супремум) и точную нижнюю грань (инфимум), называется *решёткой* [6]. Частично упорядоченное множество называется *полной решёткой*, если любое его подмножество имеет супремум и инфимум. Незамкнутые интервалы не являются полными решётками по отношению к стандартному порядку “ $\leq$ ” на вещественной оси, т. е. нельзя брать инфимумы и супремумы по отношению к порядку “ $\leq$ ” для каждого подмножества незамкнутого интервала. Примером является та же последовательность чисел $1/k$, $k = 1, 2, \dots$, в полуоткрытом интервале $]0, 1]$.

С точки зрения теории и практики вычислений перечисленные выше факты могут иметь много неблагоприятных последствий, которые мы рассматриваем ниже.

Некомпактность. На компактных замкнутых интервалах непрерывные функции достигают своих экстремумов, т. е. минимальных и максимальных значений (теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях). Но на некомпактных, открытых и полуоткрытых, интервалах непрерывные функции могут не достигать своих экстремальных значений.

Теорема Брауэра и теорема Банаха о неподвижных точках. Согласно теореме Брауэра о неподвижной точке (см., к примеру, [11, 34, 51]), для любой непрерывной функции ϕ , отображающей компактное выпуклое множество из $\mathbb{R}^n$ в себя, существует такая точка $\tilde{x}$, что $\tilde{x} = \phi(\tilde{x})$ (“неподвижная точка”, которая остается неизменной). Этот результат, полученный в 1909–1912 годах, стал одним из краеугольных камней вычислительного интервального анализа, поскольку интервалы в $\mathbb{R}$ и их многомерные аналоги являются выпуклыми компактными множествами. Взяв уравнение $f(x) = 0$, мы всегда можем привести его к рекуррентному виду $x = \phi(x)$, а затем действовать следующим образом. Если с помощью интервальных методов внешнего оценивания областей значений функций мы проверим выполнение теоремы Брауэра о неподвижной точке на интервале X для отображения ϕ , т. е. что включение $\phi(X) \subseteq X$ верно, то тем самым будет строго доказано существование решения уравнения $x = \phi(x)$ в X .

Представленный выше метод конструктивного доказательства решений уравнений является неотъемлемой частью важных интервальных методов, в частности, метода Кравчика, интервального метода Ньютона и метода Хансена–Сенгупты (см., например, [1, 14, 22, 28, 30, 31]).

Согласно теореме Банаха о неподвижной точке (также известной как *теорема о сжимающем отображении*; см., например, [11, 34, 51]), сжимающее отображение $\phi : X \rightarrow X$ полного метрического пространства X имеет единственную неподвижную точку $\tilde{x}$, т. е. такую, что $\tilde{x} = \phi(\tilde{x})$. Этот результат тоже является важным инструментом вычислительного интервального анализа, поскольку традиционные интервалы являются полными метрическими пространствами, и, следовательно, теорема Банаха о неподвижной точке позволяет доказать существование решений уравнений и даже их единственность. Отметим, что в вычислительном интервальном анализе для этих же целей часто используется теорема Шрёдера о неподвижной точке [8, 31].

Для незамкнутых интервалов и их многомерных аналогов теорему Брауэра о неподвижной точке, теорему Банаха о неподвижной точке, а также теорему Шрёдера о неподвижной точке использовать нельзя. Поэтому интервальные критерии существования

решений уравнений и систем уравнений, т. е. интервальный метод Ньютона, метод Кравчика, метод Хансена–Сенгупты, не работают в полной мере для незамкнутых интервалов.

Таким образом, в случае незамкнутых интервалов вычислительный интервальный анализ не может использовать свои наиболее мощные инструменты, широко применяемые при решении уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, а также при глобальной оптимизации.

Принцип вложенных интервалов. Это один из популярных инструментов в теории и в доказательных интервальных вычислениях. Напомним его формулировку (см. [1, 3, 30, 31]): *всякая вложенная последовательность интервалов $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. такая что $X_{k+1} \subseteq X_k$ для всех k , сходится и имеет предел $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$.*

В приведенной выше формулировке X_k могут быть либо одномерными интервалами, либо интервальными брусами в $\mathbb{R}^n$.

Этот результат в общем случае неверен для нетрадиционных интервалов. Последовательность вложенных открытых или полуоткрытых интервалов не обязательно сходится и может иметь пустое пересечение. Например,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}]0, \frac{1}{k}] = \emptyset.$$

Это большая потеря. Напомним, что принцип вложенных интервалов лежит в основе теории интервального интеграла и используется в интервальном оценивании интеграла вещественной функции [7, 38].

Наиболее практичные и эффективные интервальные методы решения операторных уравнений (интегральных и дифференциальных) основаны на принципе вложенных интервалов и на некоторых теоремах о неподвижной точке, в частности, теореме Банаха о неподвижной точке и теореме Шрёдера о неподвижной точке [8, 31]. Они также не могут использоваться, поскольку незамкнутые интервалы не являются полными топологическими пространствами.

Теорема Биркгофа–Тарского и лемма Канторовича. Это популярные теоремы о неподвижной точке для частично упорядоченных множеств, аналоги топологических теорем о неподвижной точке, которые мы рассмотрели выше. Согласно теореме Биркгофа–Тарского (также называемой принципом Кнастера–Тарского [6, 11, 49]), если X — полная решетка и $\phi : X \rightarrow X$ — изотонная (сохраняющая порядок) функция, то ϕ имеет неподвижную точку $\tilde{x} \in X$, т. е. такую что $\tilde{x} = \phi(\tilde{x})$. Особенностью этого результата является отсутствие специальных требований к непрерывности функции ϕ , виду множества X и его топологическим свойствам.

Теорема Биркгофа–Тарского неверна для незамкнутых интервалов, которые не являются полными решётками относительно стандартного порядка “ $\leq$ ” на $\mathbb{R}$ и относительно порядка по включению между интервалами.

Лемма Канторовича [34, раздел 13.2] — такой же полезный результат, который представляет собой теорему о неподвижной точке для изотонных отображений. Она также не может использоваться для незамкнутых интервалов.

Расстояние между интервалами различных типов. Каким считать расстояние между $[\alpha, \beta[$ и $[\alpha, \beta]$, т. е. между двумя интервалами, которые отличаются только одним концом?

В математике расстояние между объектами (их отклонение друг от друга) обычно определяется с помощью *метрики*, т. е. функции, которая даёт расстояние между каждой парой элементов множества. Метрика задаётся аксиоматически как неотрицательная

функция, удовлетворяющая трём аксиомам: тождественности неразличимых элементов, аксиоме симметричности и неравенству треугольника (подробности см., например, в книгах [8–10]).

Расстояние между традиционными интервалами, как известно, определяется следующим образом [1, 3, 28, 30, 31]:

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\bar{a} - \bar{b}|\}.$$

Оно должно быть равно нулю для $\mathbf{a} = [\alpha, \beta[$ и $\mathbf{b} = [\alpha, \beta]$. Таким образом, при этом не достигается одна из основных целей расстояния — различать элементы множества, не совпадающие друг с другом. Кроме того, оказывается, что принципиально невозможно ввести метрику (расстояние) на множестве всех замкнутых и незамкнутых интервалов, т. е. это множество неметризуемо как топологическое пространство.

Согласно известной теореме Архангельского о метризации (см., к примеру, [10]), топология пространства может быть определена метрикой, если и только если это пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости (так называемой T1-аксиоме) и имеет счётное фундаментальное семейство открытых окрестностей. T1-аксиома является самой слабой аксиомой отделимости. Она требует, чтобы любая из двух точек пространства имела окрестность, не содержащую другую точку. Легко видеть, что множество всех замкнутых и незамкнутых интервалов не удовлетворяет даже этой самой слабой аксиоме: полуоткрытый интервал $[\alpha, \beta[$ и его замыкание $[\alpha, \beta]$ не могут быть окружены такими окрестностями.

Невыполнение T1-аксиомы является очень серьёзным свидетельством того, что рассматриваемое топологическое пространство является весьма экзотичным или даже патологическим. В интервальном анализе это означает, что разумное исчисление на множестве замкнутых и незамкнутых интервалов, скорее всего, никогда не будет создано. Это, конечно, не исключает отдельных эпизодических применений незамкнутых интервалов в тех или иных конкретных ситуациях. Но в общем случае, увы . . .

4. Могут ли другие нетрадиционные интервалы быть полезными в интервальном анализе?

Рассмотрим теперь другие виды нетрадиционных интервалов, такие как неправильные (“вывернутые”) интервалы, например $[2.3, 1.4]$, $[1.05, -2.5]$ и т. д.

Некоторое время тому назад А. Ноймайер в [32] сделал обзор свойств и применений некоторых нетрадиционных интервальных арифметик (он назвал их неудачным термином “нестандартные арифметики”, как будто существует какой-то стандарт на различные типы интервалов). Но так как сам А. Ноймайер — пессимист и мало верит в полезность этих арифметик, то и его обзор применений также получился пессимистичным, почти как некролог. Ниже мы попытаемся дать ещё один обзор возможностей неправильных интервалов с более общей точки зрения и показать, что рано или поздно они займут достойное место среди математических инструментов в естественных и социальных науках.

4.1. Алгебра I

В предыдущем пункте мы рассмотрели интервалы с точки зрения науки топологии. Посмотрим теперь на множества интервалов, точнее различные интервальные арифметики, с точки зрения другой великой науки — алгебры. Её часто называют “наукой об

алгебраических системах”, т. е. наукой, изучающей множества с определёнными на них операциями и отношениями. Рассмотрим операции, существующие на множестве интервалов.

С точки зрения алгебры операции могут быть разными. Если на множестве некоторых элементов определена ассоциативная бинарная операция, то это множество называется полугруппой, моноидом или группой в зависимости от свойств этой операции. Строго говоря, интервальная арифметика — это алгебраическая система, на которой существует более одной операции, но для нашего анализа достаточно рассматривать эти операции по отдельности.

Полугруппа — самое слабое образование, где от бинарной ассоциативной операции между элементами почти ничего не требуется.

Моноид — полугруппа с нейтральным элементом. Напоминание: нейтральный элемент или единичный элемент — это элемент особого типа по отношению к бинарной операции на этом множестве, который оставляет другие элементы неизменными при взаимодействии с ним.

Группа — это алгебраическая система, где рассматриваемая операция обратима, т. е. для любого элемента существует элемент, обратный по отношению к этой операции. Выполнение операции между элементом и обратным к нему элементом даёт в результате нейтральный элемент.

В целом, математически работать в группе гораздо комфортнее, чем в моноиде или полугруппе. В последние тысячелетия неявное осознание этого факта было одной из причин распространения популярных и известных алгебраических систем. Вспомним, что именно поэтому простейшие натуральные числа когда-то были расширены до целых чисел, затем до рациональных чисел, а затем до действительных и комплексных чисел и так далее (хотя этот процесс не был линейным).

Почему группа лучше? Дело в том, что операция в группе “предсказуема” по своим результатам и “обратима”. В ряде случаев мы можем восстановить операнды из результата операции. Выполнение алгебраических манипуляций в группе проще и имеет меньше ограничений. Другими словами, мы имеем более богатый набор математических инструментов в группе, чем в полугруппе или моноиде.

В частности, если в группе с операцией “*” имеется равенство

$$a * c = b * c,$$

то мы можем сделать вывод, что

$$a = b.$$

И если

$$a * b = c,$$

то

$$a = b^{-1} * c,$$

где b^{-1} является обратным к b относительно операции “*”. Кроме того, в группе мы можем решать уравнения, что в общем случае нельзя делать в полугруппах и моноидах.

Нужны ли нам такие возможности в интервальном анализе? Мой ответ — однозначное “да”. Автору этой работы, например, они нужны, и он наверняка знает, что многим другим тоже. Вышесказанное особенно важно при решении так называемых обратных задач, когда по значению интересующей нас функции нужно восстановить её аргумент (прообраз). Частный случай обратных задач — это известная задача решения уравнений и систем уравнений.

Если мы не можем восстановить прообраз в элементарных интервальных операциях, то у нас нет адекватных инструментов для решения “обратных интервальных задач” вообще.

Есть еще один очевидный пример, где вышеперечисленные алгебраические свойства оказываются незаменимыми — это метрология и теория измерений. Одним из фундаментальных понятий этих теорий является понятие *погрешности измерения*. Напомним, что по определению погрешность — это разница между приближённым значением величины и её точным (идеальным) значением. В естественных и технических науках под ним обычно понимается так называемое *истинное значение* физической величины, т. е. значение, идеально отражающее рассматриваемую величину или явление в рамках модели (теории), принятой для её описания. Так или иначе, в приведённом выше определении погрешности “разница” означает алгебраическую разность, т. е. сложение с элементом, противоположным относительно сложения. Если результат измерения и/или истинное значение величины имеют интервальный тип, то погрешность невозможно найти в классической интервальной арифметике, так как в ней нет ни алгебраического вычитания, ни элементов, противоположных правильным интервалам относительно сложения.

В аналогичной ситуации в геометрии, когда рассматривается сумма множеств по Минковскому и требуется её “обратить”, была введена так называемая разность Хукухары [15] по следующему правилу:

$$A \ominus B = C \quad \Leftrightarrow \quad A = B + C.$$

Что касается классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$, лучше не ограничиваться частичным обращением операций, а коренным образом исправить ситуацию, выполнив алгебраическое пополнение $\mathbb{IR}$.

4.2. Алгебра II

Рассмотрим дальнейшие факты из алгебры. Даже если алгебраическая система с ассоциативной бинарной операцией не является группой, мы можем судить о том, насколько хороша или плоха эта операция с точки зрения ее “обратимости”. Условие

$$a * c = b * c \quad \Rightarrow \quad a = b \tag{5}$$

называется *законом сокращения*. Если он выполняется в полугруппе или моноиде, то это означает, что операция “*” обладает хорошими “свойствами обратимости”, и они почти такие же, как и в группе. Более того, такую полугруппу часто можно расширить до группы, или, другими словами, эту полугруппу можно изоморфно вложить в некоторую группу.

Соответствующий результат из алгебры формулируется следующим образом:

Теорема. *Всякая абелева (коммутативная) полугруппа, удовлетворяющая закону сокращения, может быть изоморфно вложена в абелеву группу.*

Конструктивное доказательство и более подробную информацию можно найти, например, в книге [24, глава 2, §5].

А как обстоят дела с нашей интервальной арифметикой $\mathbb{IR}$? Это абелева (коммутативная) полугруппа как по сложению, так и по умножению. Из определения интервального сложения легко вывести, что для него закон сокращения выполняется. Но для интервального умножения он выполняется лишь частично, только для интервалов, не

содержащих нуля. В общем же случае закон сокращения для умножения неверен, что видно из следующего примера:

$$[-1, 2] \cdot [2, 3] = [-3, 6] = [-1, 2] \cdot [1, 3].$$

Как следствие, мы можем включить интервальную арифметику в более широкую алгебраическую систему, в которой каждый элемент имеет аддитивный обратный (противоположный по сложению) элемент, а любой интервал, не содержащий нуля, имеет мультипликативный обратный, т. е. обратный по умножению.

Этой алгебраической системой является известная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$, разработанная в докторской диссертации Эдгара Каухера [19] под руководством профессора Ульриха Кулиша. Её защита состоялась в Карлсруэ, Германия, в 1973 году. Основные результаты этой диссертации вошли в статьи [20, 21]. Несколько ранее идея алгебраического расширения и пополнения классической интервальной арифметики была также реализована в малодоступном препринте Х.-Ю. Ортольфа [35], хотя подробно она и не была описана. Интересный альтернативный взгляд на эту арифметику можно увидеть в работе [26].

Операция, обратная сложению в $\mathbb{KR}$, так называемое “алгебраическое вычитание”, является аналогом разности Хукухары [15] и обычно обозначается тем же самым символом “ $\ominus$ ”. Таким образом, в примере с интервальной погрешностью измерений, представленном в предыдущем подпункте, мы можем определить её как алгебраическую разность $\tilde{x} \ominus x^*$ между измеренным значением $\tilde{x}$ и истинным значением x^* физической величины.

В арифметике Каухера $\mathbb{KR}$ “порядок по включению”, который играет такую важную роль в интервальном анализе, естественным образом продолжает обычный теоретико-множественный порядок по включению. В математических терминах

$$a \subseteq b \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a} \geq \underline{b} \text{ и } \bar{a} \leq \bar{b},$$

причём $\mathbb{KR}$ представляет собой решётку относительно выписанного выше отношения “включения”. Более точно, в $\mathbb{KR}$ для интервалов a и b инфимум “ $\wedge$ ” и супремум “ $\vee$ ” по включению, определяемые как

$$\begin{aligned} a \wedge b &= [\max\{\underline{a}, \underline{b}\}, \min\{\bar{a}, \bar{b}\}], \\ a \vee b &= [\min\{\underline{a}, \underline{b}\}, \max\{\bar{a}, \bar{b}\}], \end{aligned}$$

всегда существуют. В частности, если интервалы a и b не пересекаются, их инфимум является “неправильным интервалом”.

Большое количество информации по интервальной арифметике Каухера присутствует в стандарте IEEE 1788-2015 на реализацию интервальных арифметик на цифровых компьютерах [16], хотя сама эта арифметика пока ещё не стала повседневным рабочим инструментом для тех, кто использует интервальные вычисления.

Необходимо отметить, что работа Э. Каухера [19] была весьма нетривиальной, так как он расширял интервальное умножение, исходя не только из одних алгебраических соображений. В связи с отсутствием, в общем случае, мультипликативного закона сокращения Э. Каухеру пришлось опираться также на отношение порядка по включению. Это обстоятельство приводит к тому, что интервальная арифметика Каухера имеет некоторые “странные” особенности, такие как, например, наличие нетривиальных делителей нуля:

$$[-1, 1] \cdot [2, -3] = 0,$$

что легко можно объяснить и интерпретировать с более продвинутой точки зрения. А именно,

$$[-1, 1] \cdot [2, -3] = \bigvee_{x \in [-1, 1]} \bigwedge_{y \in [-3, 2]} (x \cdot y) = 0,$$

в соответствии с минимаксным определением арифметических операций в интервальной арифметике Каухера [1, 19, 45].

Более того, как это часто бывает в науке, прогресс в одной области немедленно приводит к прогрессу в других связанных с ней областях. Для интервалов в новой алгебраически расширенной интервальной арифметике возможны новые логические интерпретации арифметических операций. Они были обнаружены в работах испанских исследователей 70–90-х годов XX века, и их обзор можно найти в книге [42]. Альтернативная (и в чём-то более ясная) точка зрения на эту теорию содержится в работах [12, 13].

В любом случае в завершение этого пункта следует отметить решающую роль закона сокращения в полугруппах. Как мы уже отмечали, это признак частичной “обратимости” исследуемой операции, который значительно упрощает решение различных обратных задач в конкретных полугруппах.

4.3. Алгебра и не только

Мы можем представить аргументы предыдущих подпунктов в несколько ином контексте, рассмотрев предмет с другой точки зрения.

Уже несколько тысяч лет существует общий и очень мощный метод решения различных математических задач, который можно назвать “методом уравнений”. Его суть состоит в том, что

искмое значение неизвестной величины обозначают каким-то специальным символом, называемым обычно “неизвестной переменной”,

а затем,

согласно условиям решаемой задачи выписывают условия, обычно в виде равенств с неизвестной переменной, которым она должна удовлетворять.

Равенство с неизвестной переменной, значение которой мы должны найти, называется *уравнением*. Далее, для решения исходной задачи необходимо решить полученное уравнение, т. е. найти тем или иным способом значение неизвестной переменной (которая может быть числом, функцией и т. п.), удовлетворяющее этому уравнению или системе уравнений.

Удобство и общность этого метода заключается в том, что уравнение может быть “очень неявным” по отношению к неизвестной величине. Кроме того, способы поиска его решения не обязательно должны всегда иметь значимый содержательный смысл в отношении неизвестной переменной. Вместо этого они могут быть очень формальными манипуляциями, которые носят абстрактный математический характер. Важно только, чтобы полученное решение удовлетворяло исходному уравнению и имело практический смысл. С помощью какой математической техники мы его получили — уже не столь важно.

Нетривиальный факт, который некоторые из читателей (и даже специалисты по интервальному анализу) могут не осознавать, — в интервальном анализе также полезно решать уравнения, а именно, интервальные уравнения. Полезно находить решения интервальных уравнений в описанном выше общематематическом смысле. Мы называем их

“формальными решениями”, поскольку характер операций, используемых в уравнении, может не обязательно быть алгебраическим или арифметическим. В любом случае делать это, конечно, лучше всего в алгебраически пополненной интервальной арифметике, т. е. в $\mathbb{KR}$.

“Формальные решения” интервальных уравнений впервые были рассмотрены в 1969 году в работе румынского математика С. Берти [5], где им не было дано никакого названия. С. Берти изучал интервальное квадратное уравнение и просто обратил внимание на то, что такое понятие как “решения интервального уравнения” вполне осмысленно. Затем Х. Рачек и В. Зауэр [39] изучали такие решения одиночных линейных уравнений и использовали термин “алгебраическое решение”. В работе [33] К. Никель рассматривал формальные решения интервальных линейных систем уравнений в комплексной интервальной арифметике, но не назвал их каким-то специальным образом. И сам автор этой статьи, и другие исследователи ранее также использовали термин “алгебраические решения” [27, 37, 43, 44, 52], но сейчас мы настоятельно рекомендуем использовать вместо него термин “формальные решения” (см. [42, 45, 46] и многие другие работы).

Например, интервал $[0, 1]$ является формальным решением интервального квадратного уравнения

$$[1, 2]x^2 + [-1, 1]x = [-1, 3].$$

Интервальная функция $\mathbf{x}(t) = 10.5 \cdot [e^t, e^{2t}]$ действительного аргумента t является формальным решением интервального дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = [1, 2]x(t).$$

Интервальная функция $\mathbf{x}(t) = [0, 2t]$ на $[0, 1]$ является формальным решением интервального интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) + \int_0^1 (1.5s + t)x(s)ds = [0, 3t + 1].$$

Два последних (чисто иллюстративных) примера демонстрируют главный недостаток термина “алгебраическое решение”: он подчеркивает алгебраический характер операций, которые образуют рассматриваемое интервальное уравнение, так что говорить об “алгебраическом” решении интервальных дифференциальных, интегральных и им подобных уравнений как минимум некорректно.

Напомним некоторые результаты, полученные в 60–90-х годах прошлого века, которые показывают полезность “формальных решений”.

Внешнее оценивание объединённого множества решений. Пусть задана интервальная система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с интервальной $m \times n$ -матрицей $\mathbf{A}$ и интервальным m -вектором правой части $\mathbf{b}$. Её объединённым множеством решений называют множество

$$\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ для некоторых } A \in \mathbf{A} \text{ и } b \in \mathbf{b}\},$$

образованное решениями всех точечных систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$. Интервальное оценивание объединённого множества решений является важной практической задачей, которая также является одной из классических задач интервального анализа. Ей посвящены сотни статей, начиная с 60-х годов прошлого века по настоящее время.

Нетрудно показать, что объединённое множество решений интервальной системы уравнений с квадратной матрицей $\mathbf{A}$ совпадает с объединённым множеством решений системы в рекуррентном виде

$$x = (I - \mathbf{A})x + \mathbf{b},$$

где I — единичная матрица. Далее, формальное решение выписанной выше интервальной системы в рекуррентном виде даёт внешнюю интервальную оценку (объемлющий интервальный брус) для объединённого множества решений, если спектральный радиус матрицы $|I - \mathbf{A}|$, составленный из модулей элементов из $(I - \mathbf{A})$, меньше 1. Это известный результат Апостолатоса и Кулиша [4], полученный в 1968 году, который мы переформулируем в новых, удобных для наших целей, терминах. Его можно также найти в [3, начало главы 12].

Внутреннее оценивание объединённого множества решений. Если дана интервальная система линейных уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, то правильное формальное решение интервальной системы

$$(\text{dual } \mathbf{A})x = \mathbf{b},$$

где dual — операция дуализации в арифметике Каухера (переворачивания концов интервалов), даёт внутреннюю интервальную оценку объединённого множества решений. Можно показать, что этот внутренний брус почти всегда является максимальным по включению (т. е. касается границ объединённого множества решений, см. [1]).

Внутреннее оценивание допускового множества решений. Допусковым множеством решений для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ называется, как известно, множество

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in \mathbf{b} \text{ для любого } A \in \mathbf{A} \},$$

образованное всеми векторами x , для которых произведение Ax попадает в интервальную правую часть $\mathbf{b}$ для любого $A \in \mathbf{A}$. Это второе по важности множество решений интервальных систем уравнений.

Любое правильное формальное решение интервальной системы

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

(имеющей тот же вид, что и исходная интервальная система) даёт внутренний брус для множества допусковых решений. В большинстве случаев он также максимален по включению [1].

Внешнее оценивание допускового множества решений. Любое правильное формальное решение интервальной системы

$$x = (I - (\text{dual } \mathbf{A}))x + \mathbf{b}$$

даёт внешнюю интервальную оценку допускового множества решений, если спектральный радиус матрицы $|I - \mathbf{A}|$ меньше 1 (см. [1]).

И так далее. Перечень действительно очень большой, и мы могли бы легко продолжить его, но для нашей краткой статьи достаточно указанного выше. Естественно, имеются обобщения приведённых выше результатов на нелинейные системы (см., например, [42]).

В заключение следует отметить, что краткий термин “решение” применительно к интервальным уравнениям исторически приобрёл несколько иной смысл, чем для традиционных неинтервальных уравнений. С начала 60-х годов прошлого века, говоря о *решении* интервального уравнения, имеют в виду решение некоторой расширенной постановки задачи, связанной с этим уравнением. Например, при этом часто требуется “найти интервальную внешнюю оценку для объединённого множества решений интервального уравнения” (см. [36], где встречается типичный пример использования этой терминологии), или “найти внутренний интервальный брус для множества допусковых решений” (это так называемая интервальная задача о допусках). И так далее. Другими словами, ситуация здесь аналогична той, что сложилась в теории дифференциальных уравнений, где обычно не говорят о “решении” отдельных дифференциальных уравнений как таковых. Обычно формулируется какая-либо связанная с рассматриваемым дифференциальным уравнением задача (задача Коши, краевая задача и т. п.), которая накладывает на искомое решение дополнительные условия, без которых постановка была бы неполной и двусмысленной. Затем рассматриваются решения для этой расширенной постановки задачи, а не для самого исходного уравнения. То же самое верно и для постановок задач интервального анализа.

5. Пустые интервалы

Пустые интервалы могут использоваться в некоторых случаях, в основном в классической интервальной арифметике, дополненной теоретико-множественными операциями. Обычно пустой интервал появляется в результате пересечения, например,

$$[1, 2] \cap [3, 4] = \emptyset.$$

В интервальной арифметике Каухера иногда желательно вместо пересечения использовать инфимум (точную нижнюю грань) относительно включения. Взятие инфимума по включению — это операция, цель которой такая же, что и у пересечения, но она “более дружественна”, например,

$$[1, 2] \wedge [3, 4] = [3, 2],$$

и таким образом, мы получаем “непустой” результат, который может привести к нетривиальным выводам в дальнейших рассуждениях.

Что произойдет, если мы добавим пустое множество (“пустой интервал”) к интервальной арифметике? Тогда получим

$$\begin{aligned} a + \emptyset &= \emptyset + a = \emptyset, \\ a - \emptyset &= \emptyset - a = \emptyset, \\ a \cdot \emptyset &= \emptyset \cdot a = \emptyset, \\ a/\emptyset &= \emptyset/a = \emptyset, \end{aligned} \tag{6}$$

и закон сокращения (5) не выполняется как для сложения, так и для умножения в интервальной арифметике.

Во время дискуссии 2018 года один из участников, Джон Густафсон, сравнил пустой интервал с нулем, т. е. с 0. Это неверная метафора: в отличие от “благородных” нейтральных элементов, таких как 0 и 1, пустой интервал является своего рода “вампиром” в алгебраическом смысле, если судить по равенствам (6). Если промежуточным

результатом вычислений получился пустой интервал, то все последующие результаты тоже будут пустыми.

В целом, имеем отсутствие обратимости операций. Невозможность вложения в большую и более полную алгебраическую систему. Интервальная арифметика с пустым множеством подходит для решения главным образом “прямых задач” и выполнения цепочек вычислений в прямом направлении.

Ясно также, что ввиду перечисленных причин интервальная арифметика Каухера не может использоваться с пустыми интервалами.

6. Выводы

Цель нашей статьи состояла в том, чтобы показать, что некоторые виды интервалов обладают неблагоприятными математическими свойствами, тогда как другие виды интервалов, наоборот, очень полезны в теории и на практике. В частности, автор попытался показать, что добавление открытых и полуоткрытых интервалов к традиционным замкнутым интервалам является сложным и противоречивым предприятием. Его реализация обесценит большинство численных методов, которые делают интервальные вычисления успешными, и таким образом, несмотря на некоторые преимущества, не принесёт пользу интервальному анализу и его применениям. Тем не менее выводы, сделанные в работе, не следует считать окончательным “вердиктом”, ставящим крест на использовании открытых и полуоткрытых интервалов в вычислениях и математике вообще.

Различные применения открытых и полуоткрытых интервалов, как и пустых интервалов, можно и нужно развивать в тех ситуациях, где они значительно помогают нам в моделировании действительности и решении различных практических задач. Например, использование полуоткрытых интервалов оказывается полезным для формализации, на основе методов теории нечётких множеств, некоторых аспектов человеческого мышления, на что указал автору один из рецензентов. Соответствующая методика описана, например, в [2, раздел 8].

Благодарности. Автор благодарит Бейкера Р. Кирфотта за предложение переработать результаты онлайн-обсуждения в настоящий текст, а также рецензентов за полезные комментарии, которые способствовали улучшению статьи.

Литература

1. **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. — Новосибирск: Изд-во “XYZ”, 2022. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
2. **Afravi M., Akinola K., Ayivor F. et al.** Towards foundations of interval and fuzzy uncertainty // J. of Uncertain Systems. — 2018. — Vol. 12, № 3. — P. 164–170.
3. **Alefeld G., Herzberger J.** Introduction to Interval Computations. — New York, London: Academic Press, 1983.
4. **Apostolatos N., Kulisch U.** Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // Electron. Rechenanl. — 1968. — Vol. 10. — P. 73–83.
5. **Berti S.** The solution of an interval equation // Mathematica. — 1969. — Vol. 11(34), № 2. — P. 189–194.
6. **Birkhoff G.** Lattice Theory. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1967.

7. **Caprani O., Madsen K., Rall L.B.** Integration of interval functions // SIAM J. on Mathematical Analysis. — 1981. — Vol. 12, № 3. — P. 321–341.
8. **Collatz L.** Functional Analysis and Numerical Mathematics. — New York: Academic Press, 1966.
9. **Dieudonné J.** Foundations of Modern Analysis. — New York, London: Academic Press, 1960.
10. **Engelking R.** General Topology. — Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
11. **Granas A., Dugundji J.** Fixed-Point Theory. — New York: Springer, 2003.
12. **Goldsztein A.** Modal intervals revisited. Part 1: A generalized interval natural extension // Reliable Computing. — 2012. — Vol. 16. — P. 130–183. — URL: <https://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/volume-16/reliable-computing-16-pp-130-183.pdf>.
13. **Goldsztein A.** Modal intervals revisited. Part 2: A generalized interval mean value extension // Reliable Computing. — 2012. — Vol. 16. — P. 184–209. — URL: <https://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/volume-16/reliable-computing-16-pp-184-209.pdf>.
14. **Hansen E., Walster G.W.** Global Optimization Using Interval Analysis. — New York: Marcel Dekker, 2004.
15. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkcialaj Ekvacioj. — 1967. — Vol. 10. — P. 205–223.
16. IEEE 1788-2015 — IEEE Standard for Interval Arithmetic. — URL: <https://standards.ieee.org/standard/1788-2015.html>.
17. **Kahan W.** A More Complete Interval Arithmetic. — University of Toronto, Canada, 1968. — (Lect. Notes for a summer course at the University of Michigan, June 17–21, 1968). — URL: <https://interval.louisiana.edu/historical-preprints/1968-Kahan-a-more-complete-interval-arithmetic.pdf>.
18. **Kantorovich L.V.** Some new approaches to computational methods and the handling of observations // Siberian Mathematical J. — 1962. — Vol. 3, № 5. — P. 701–709. — (in Russian).
19. **Kaucher E.** Über Metrische und Algebraische Eigenschaften Einiger Beim Numerischen Rechnen Auftretender Räume: PhD thesis. — Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1973. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteDiss/Kaucher-disser-1973.pdf>.
20. **Kaucher E.** Algebraische erweiterungen der intervallrechnung unter erhaltung ordnungs- und verbandsstrukturen // Computing Supplementum / R. Albrecht, U. Kulisch, — Wien: Springer, 1977. — Vol. 1: Grundlagen der Computer-Arithmetic. — P. 65–79.
21. **Kaucher E.** Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$ // Computing Supplement. — Springer, 1980. — Vol. 2: Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis). — P. 33–49.
22. **Kearfott R.B.** Rigorous Global Search: Continuous Problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
23. **Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A. et al.** Standardized notation in interval analysis // Computational Technologies. — 2010. — Vol. 15, № 1. — P. 7–13. — URL: <http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1345>.
24. **Kurosh A.G.** Lectures in General Algebra. — Oxford: Pergamon Press, 1965.
25. **Laveuve S.E.** Definition einer Kahan-Arithmetic und ihre Implementierung // Interval Mathematics / K. Nickel. — Berlin: Springer-Verlag, 1975. — P. 236–245. — (Lect. Notes in Computer Science; 29).
26. **Markov S.** On directed interval arithmetic and its applications // J. of Universal Computer Science. — 1995. — Vol. 1, № 7. — P. 514–526.
27. **Markov S.** An iterative method for algebraic solution to interval equations // Applied Numerical Mathematics. — 1999. — Vol. 30, iss. 2-3. — P. 225–239.
28. **Mayer G.** Interval Analysis and Automatic Result Verification. — Berlin: Walter de Gruyter, 2017.

29. **Moore R.E.** Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing: PhD thesis. — Stanford, California: Stanford University, 1962. — (Applied Mathematics and Statistics Laboratories Technical Report; 25).
30. **Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J.** Introduction to Interval Analysis. — Philadelphia: SIAM, 2009.
31. **Neumaier A.** Interval Methods for Systems of Equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
32. **Neumaier A.** Computer Graphics, Linear Interpolation, and Nonstandard Intervals. — Wien: Universität Wien, 2009. — URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/ms/nonstandard.pdf>.
33. **Nickel K.** Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssystemen // Linear Algebra and its Applications. — 1982. — Vol. 44. — P. 19–40.
34. **Ortega J.M., Rheinboldt W.C.** Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — New York: Academic Press, 1970.
35. **Ortolf H.-J.** Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik / Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung. — Bonn, 1969. — № 11. — P. 1–71.
36. **Polyak B.T., Nazin S.A.** Interval solutions for interval algebraic equations // Mathematics and Computers in Simulation. — 2004. — Vol. 66, iss. 2-3. — P. 207–217.
37. **Popova E.D.** Algebraic solutions to a class of interval equations // J. of Universal Computer Science. — 1998. — Vol. 4, № 1. — P. 48–67.
38. **Rall L.B.** Integration of interval functions II. The finite case // SIAM J. on Mathematical Analysis. — 1982. — Vol. 13, № 4. — P. 690–697. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/Thematic/General/Rall82.pdf>.
39. **Ratschek H., Sauer W.** Linear interval equations // Computing. — 1982. — Vol. 28. — P. 105–115. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/Thematic/ILSystems/LinInEqs.pdf>.
40. Reliable Computing mailing list. — URL: https://lists.louisiana.edu/mailman/listinfo/reliable_computing.
41. **Rudin W.** Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. — New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1976.
42. **Sainz M.A., Armengol J., Calm R. et. al.** Modal Interval Analysis. New tools for numerical information. — Cham, Heidelberg, New York: Springer, 2014. — (Lect. Notes in Computer Science; 2091).
43. **Shary S.P.** Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance, and control problems, or one more application of Kaucher arithmetic // Reliable Computing. — 1996. — Vol. 2, iss. 1. — P. 3–33. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/OneMoreKaucher.pdf>.
44. **Shary S.P.** Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // Reliable Computing. — 1997. — Vol. 3, № 2. — P. 103–135.
45. **Shary S.P.** A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. — 2002. — Vol. 8, № 5. — P. 321–418. — URL: <http://www-sbras.nsc.ru/interval/Library/Surveys/ANewTech.pdf>.
46. **Shary S.P.** Numerical computation of formal solutions to interval linear systems of equations // Numer. Analysis. — 2019. — (arXiv: 1903.10272v1).
47. **Shilov G.E.** Elementary Real and Complex Analysis. — Mineola, New York: Dover, 1996.
48. **Sunaga T.** Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. — 1958. — Vol. 2. — P. 547–564.
49. **Tarski A.** A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications // Pacific J. Math. — 1955. — Vol. 5. — P. 285–309.

50. **Chiriaev D., Walster B.** Interval Arithmetic Specification. — 2000. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Programing/IASpecfn.pdf>.
51. **Zeidler E.** Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I: Fixed-point theorems. — Springer, 1986.
52. **Zyuzin V.S.** An interval arithmetic solution of a system of interval algebraic equations of the first order // Proc. Intern. Symposium on Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling (SCAN-90), Albena, Bulgaria, September 23–28, 1990. — Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1990. — P. 160–162.

Поступила в редакцию 08 февраля 2022 г.

После исправления 16 ноября 2022 г.

Принята к печати 30 января 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Shary S.P.** Konechnomernyi interval'nyi analiz. — Novosibirsk: Izd-vo “XYZ”, 2022. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
2. **Afravi M., Akinola K., Ayivor F. et al.** Towards foundations of interval and fuzzy uncertainty // J. of Uncertain Systems. — 2018. — Vol. 12, № 3. — P. 164–170.
3. **Alefeld G., Herzberger J.** Introduction to Interval Computations. — New York, London: Academic Press, 1983.
4. **Apostolatos N., Kulisch U.** Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // Electron. Rechenanl. — 1968. — Vol. 10. — P. 73–83.
5. **Berti S.** The solution of an interval equation // Mathematica. — 1969. — Vol. 11(34), № 2. — P. 189–194.
6. **Birkhoff G.** Lattice Theory. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1967.
7. **Caprani O., Madsen K., Rall L.B.** Integration of interval functions // SIAM J. on Mathematical Analysis. — 1981. — Vol. 12, № 3. — P. 321–341.
8. **Collatz L.** Functional Analysis and Numerical Mathematics. — New York: Academic Press, 1966.
9. **Dieudonné J.** Foundations of Modern Analysis. — New York, London: Academic Press, 1960.
10. **Engelking R.** General Topology. — Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
11. **Granas A., Dugundji J.** Fixed-Point Theory. — New York: Springer, 2003.
12. **Goldsztejn A.** Modal intervals revisited. Part 1: A generalized interval natural extension // Reliable Computing. — 2012. — Vol. 16. — P. 130–183. — URL: <https://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/volume-16/reliable-computing-16-pp-130-183.pdf>.
13. **Goldsztejn A.** Modal intervals revisited. Part 2: A generalized interval mean value extension // Reliable Computing. — 2012. — Vol. 16. — P. 184–209. — URL: <https://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/volume-16/reliable-computing-16-pp-184-209.pdf>.
14. **Hansen E., Walster G.W.** Global Optimization Using Interval Analysis. — New York: Marcel Dekker, 2004.
15. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkcialaj Ekvacioj. — 1967. — Vol. 10. — P. 205–223.
16. IEEE 1788-2015 — IEEE Standard for Interval Arithmetic. — URL: <https://standards.ieee.org/standard/1788-2015.html>.
17. **Kahan W.** A More Complete Interval Arithmetic. — University of Toronto, Canada, 1968. — (Lect. Notes for a summer course at the University of Michigan, June 17–21,

- 1968). — URL: <https://interval.louisiana.edu/historical-preprints/1968-Kahan-a-more-complete-interval-arithmetic.pdf>.
18. **Kantorovich L.V.** Some new approaches to computational methods and the handling of observations // *Siberian Mathematical J.* — 1962. — Vol. 3, № 5. — P. 701–709. — (in Russian).
 19. **Kaucher E.** Über Metrische und Algebraische Eigenschaften Einiger Beim Numerischen Rechnen Auftretender Räume: PhD thesis. — Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1973. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteDiss/Kaucher-disser-1973.pdf>.
 20. **Kaucher E.** Algebraische erweiterungen der intervallrechnung unter erhaltung ordnungs- und verbandsstrukturen // *Computing Supplementum* / R. Albrecht, U. Kulisch, — Wien: Springer, 1977. — Vol. 1: Grundlagen der Computer-Arithmetic. — P. 65–79.
 21. **Kaucher E.** Interval analysis in the extended interval space IR // *Computing Supplement.* — Springer, 1980. — Vol. 2: Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis). — P. 33–49.
 22. **Kearfott R.B.** Rigorous Global Search: Continuous Problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
 23. **Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A. et al.** Standardized notation in interval analysis // *Computational Technologies.* — 2010. — Vol. 15, № 1. — P. 7–13. — URL: <http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1345>.
 24. **Kurosh A.G.** Lectures in General Algebra. — Oxford: Pergamon Press, 1965.
 25. **Laveuve S.E.** Definition einer Kahan-Arithmetic und ihre Implementierung // *Interval Mathematics* / K. Nickel. — Berlin: Springer-Verlag, 1975. — P. 236–245. — (Lect. Notes in Computer Science; 29).
 26. **Markov S.** On directed interval arithmetic and its applications // *J. of Universal Computer Science.* — 1995. — Vol. 1, № 7. — P. 514–526.
 27. **Markov S.** An iterative method for algebraic solution to interval equations // *Applied Numerical Mathematics.* — 1999. — Vol. 30, iss. 2-3. — P. 225–239.
 28. **Mayer G.** Interval Analysis and Automatic Result Verification. — Berlin: Walter de Gruyter, 2017.
 29. **Moore R.E.** Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing: PhD thesis. — Stanford, California: Stanford University, 1962. — (Applied Mathematics and Statistics Laboratories Technical Report; 25).
 30. **Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J.** Introduction to Interval Analysis. — Philadelphia: SIAM, 2009.
 31. **Neumaier A.** Interval Methods for Systems of Equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
 32. **Neumaier A.** Computer Graphics, Linear Interpolation, and Nonstandard Intervals. — Wien: Universität Wien, 2009. — URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/ms/nonstandard.pdf>.
 33. **Nickel K.** Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssystemen // *Linear Algebra and its Applications.* — 1982. — Vol. 44. — P. 19–40.
 34. **Ortega J.M., Rheinboldt W.C.** Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — New York: Academic Press, 1970.
 35. **Ortolf H.-J.** Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetic / *Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung.* — Bonn, 1969. — № 11. — P. 1–71.
 36. **Polyak B.T., Nazin S.A.** Interval solutions for interval algebraic equations // *Mathematics and Computers in Simulation.* — 2004. — Vol. 66, iss. 2-3. — P. 207–217.
 37. **Popova E.D.** Algebraic solutions to a class of interval equations // *J. of Universal Computer Science.* — 1998. — Vol. 4, № 1. — P. 48–67.

38. **Rall L.B.** Integration of interval functions II. The finite case // SIAM J. on Mathematical Analysis. — 1982. — Vol. 13, № 4. — P. 690–697. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/Thematic/General/Rall82.pdf>.
39. **Ratschek H., Sauer W.** Linear interval equations // Computing. — 1982. — Vol. 28. — P. 105–115. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/Thematic/ILSystems/LinInEqs.pdf>.
40. Reliable Computing mailing list. — URL: https://lists.louisiana.edu/mailman/listinfo/reliable_computing.
41. **Rudin W.** Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. — New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1976.
42. **Sainz M.A., Armengol J., Calm R. et. al.** Modal Interval Analysis. New tools for numerical information. — Cham, Heidelberg, New York: Springer, 2014. — (Lect. Notes in Computer Science; 2091).
43. **Shary S.P.** Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance, and control problems, or one more application of Kaucher arithmetic // Reliable Computing. — 1996. — Vol. 2, iss. 1. — P. 3–33. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/OneMoreKaucher.pdf>.
44. **Shary S.P.** Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // Reliable Computing. — 1997. — Vol. 3, № 2. — P. 103–135.
45. **Shary S.P.** A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. — 2002. — Vol. 8, № 5. — P. 321–418. — URL: <http://www-sbras.nsc.ru/interval/Library/Surveys/ANewTech.pdf>.
46. **Shary S.P.** Numerical computation of formal solutions to interval linear systems of equations // Numer. Analysis. — 2019. — (arXiv: 1903.10272v1).
47. **Shilov G.E.** Elementary Real and Complex Analysis. — Mineola, New York: Dover, 1996.
48. **Sunaga T.** Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. — 1958. — Vol. 2. — P. 547–564.
49. **Tarski A.** A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications // Pacific J. Math. — 1955. — Vol. 5. — P. 285–309.
50. **Chiriaev D., Walster B.** Interval Arithmetic Specification. — 2000. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Programing/IASpecfn.pdf>.
51. **Zeidler E.** Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I: Fixed-point theorems. — Springer, 1986.
52. **Zyuzin V.S.** An interval arithmetic solution of a system of interval algebraic equations of the first order // Proc. Intern. Symposium on Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling (SCAN-90), Albena, Bulgaria, September 23–28, 1990. — Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1990. — P. 160–162.