

Для численной реализации вариационного уравнения (6) можно воспользоваться методами [3, 4].

Поступила 10 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Дегтярев И. С. О разрывах напряжений и экстремальных теоремах для сжимаемого пластического тела.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
2. Дегтярев И. С. Вариационный принцип в статике сжимаемого пластического тела.— В кн.: Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Вып. 2. Тула, изд. Тульск. политехн. ин-та, 1974.
3. Одинокое В. И. О приближенном методе решения задач пластичности.— ПМТФ, 1974, № 1.
4. Качанов Л. М. О вариационных методах решения задач теорий пластичности.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.

УДК 539.3745

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА, НАГРУЖЕННОГО ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

А. В. Скаченко, А. Н. Спорыхин

(Воронеж)

Исследованию устойчивости идеально пластических, упругоупругоупругих и упрочняющихся упруговязкоупругих тел при больших докритических деформациях посвящены работы [1—4]. Решенные в указанных работах задачи относятся к устойчивости систем, в которых однородные поля напряжений и деформаций возникают в начальном состоянии. В [5] исследована устойчивость упругой толстостенной сферической оболочки, нагруженной внешним давлением при больших докритических деформациях.

Ниже рассмотрена устойчивость осесимметричного шара из упругоупругоупругого материала, подвергающегося большому пластическому деформациям.

Система уравнений для описания поведения упругоупругоупругого тела при конечных деформациях принимается в виде [4].

Для сферы с внешним давлением q связь между геометрическими размерами в докритическом состоянии с учетом несжимаемости аналогична связи, принятой в работе [5]:

$$(1) \quad a = \lambda_a^0; \quad a^{03} - a^3 = b^{03} - b^3; \quad Q(r) = \frac{r^0}{r} = \left[1 + (1 - \lambda)^3 \left(\frac{a^0}{r} \right)^3 \right]^{1/3},$$

$$2\hat{\varepsilon}_1^4 = 1 - Q^{-4}; \quad 2\hat{\varepsilon}_2^2 = 2\hat{\varepsilon}_3^2 = 1 - Q^2;$$

$$\varepsilon_j^i = 0; \quad i \neq j,$$

где a^0 , b^0 , r^0 , a , b , r — размеры сферы, полости и произвольного радиуса внутри тела до и после деформации; $\hat{\varepsilon}_i^j$ — компоненты тензора полных деформаций.

Амплитудные значения напряжений σ_j^i и перемещений w^i в сферической системе координат (r, θ, φ) связаны зависимостями [4]

$$(2) \quad \sigma_j^i = g_j^i a_{j\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha w'_\alpha + (1 - g_j^i) G_{ji} g^{ii} (\nabla_i w'_j + \nabla_j w'_i);$$

$$(3) \quad a_{kj} = \left(r_{kj} - \frac{1}{3} \alpha_j r_{kn} \right) \mu_j; \quad \|r_{in}\| = \|d_{in}\|^{-1}; \quad \mu_i = 1 - 2\varepsilon_i^i;$$

$$d_{kj} = \left[\frac{3}{2E_c} + \frac{1}{E} \frac{1+\kappa}{E} \right] g_k^j + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E_c} \right) \frac{e_k^h e_j^h}{e_{II}^2} + \\ + \frac{2(1+\kappa)}{E} \varepsilon_j^i - \frac{\kappa}{E} (1 - 2e_k^k) - \frac{1}{2E_c};$$

$$E_c = \frac{\sigma_{II}}{e_{II}}; \quad E_k = \frac{\sigma_k}{de_{II}}; \quad G_{ij} = \mu_i \left(\frac{3}{2E_c} + \frac{2(1+\kappa)}{E} \mu_i \right), \quad \alpha_k = 1 - \mu_{k+1} \mu_{k-1},$$

где g^{ij} — компоненты метрического тензора; e_i^j — девиатор тензора деформаций; e_{II} , σ_{II} — интенсивность тензора деформаций и напряжений; E — модуль Юнга; κ — коэффициент Пуассона.

В случае несжимаемости материала ($g^0 g^{-1} = 1$) для приращений имеет место соотношение

$$(4) \quad \nabla_k w'^k = 0.$$

Тогда связь между вариациями напряжений и перемещений представим в виде

$$(5) \quad \sigma_i^j = g_i^j \bar{a}_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha w'_\alpha + (1 - g_i^j) \bar{G}_{ij} g^{jj} (\nabla_i w'_j + \nabla_j w'_i) + g_i^j \bar{b}_i p';$$

$$\bar{a}_{kj} = \left(\bar{r}_{kj} - \frac{1}{3} \bar{r}_{km} \right) \mu_j; \quad \|\bar{r}_{in}\| = \|\bar{d}_{in}\|^{-1}; \quad \bar{b}_k = r_{km} \bar{B}_m;$$

$$\bar{d}_{mk} = \bar{B}_m g_k^m + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E_c} \right) \frac{e_k^m e_m^k}{e_{II}^2} + \frac{\varepsilon_k^k}{E}; \quad \bar{G}_{ij} = \frac{\mu_i}{2\bar{B}_i}; \quad \bar{B}_i = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_c} + \frac{1}{E} \mu_i \right);$$

где p' — гидростатическое давление.

Так как задача (1) осесимметрична, то из (3) можно установить

$$(6) \quad a_{12} = a_{13}; \quad a_{22} = a_{33}; \quad a_{21} = a_{31}; \quad a_{32} = a_{23}; \quad G_{12} = G_{13}; \\ G_{21} = G_{31} = G_{23} = G_{32}; \quad 2G_{32} = a_{33} - a_{32}; \quad \bar{b}_2 = \bar{b}_3.$$

Равенства (6) имеют силу, если их рассматривать со значком —.

Подставляя соотношения (2) в уравнения равновесия [5] в возмущениях, приходим к системе трех дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях $w_1 = u$, $w_2 = v$, $w_3 = w$:

$$(7) \quad a_{11} r^2 u_{,rr} + G_{12} u_{,\theta\theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} u_{,\varphi\varphi} + L_1 r u_{,r} - G_{12} \operatorname{tg} \theta u_{,\theta} + 2L_5 u + \\ + F_{12} v_{,r\theta} - F_{12} \operatorname{tg} \theta v_{,r} + \frac{1}{r} L_2 v_{,\theta} - \frac{1}{r} L_2 \operatorname{tg} \theta v + \frac{1}{\cos^2 \theta} F_{12} w_{,r\varphi} + \\ + \frac{1}{r \cos^2 \theta} L_2 w_{,\varphi} = r^2 \rho \ddot{u};$$

$$(8) \quad F_{21} r^2 u_{,r\theta} + L_4 r u_{,\theta} + G_{21} r^2 v_{,rr} + a_{22} v_{,\theta\theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} G_{21} v_{,\varphi\varphi} + \\ + L_3 r v_{,r} - a_{22} \operatorname{tg} \theta v_{,\theta} - (2L_3 + 2G_{21} - a_{23} + a_{22} \operatorname{tg}^2 \theta) v + \\ + \frac{1}{\cos^2 \theta} F_{23} \dot{w}_{,\varphi\theta} + \frac{2}{\cos^2 \theta} a_{22} \operatorname{tg} \theta w_{,\varphi} = r^2 \rho \ddot{v};$$

$$(9) \quad F_{21}r^2u_{,r\varphi} + L_4ru_{,\varphi} + F_{23}v_{,\varphi\theta} - F_{22} \operatorname{tg} \theta v_{,\varphi} + G_{21}r^2w_{,rr} + \\ + G_{21}w_{,\theta\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} a_{33}w_{,\varphi\varphi} + L_3rw_{,r} + G_{21} \operatorname{tg} \theta w_{,\theta} - 2L_3w = r^2\rho\ddot{w};$$

$$(10) \quad L_1 = ra_{11,r} + 2(a_{11} + a_{12} - a_{21} + \sigma); \quad L_2 = ra_{12,r} - (2G_{12} + a_{22} + \\ + a_{32} + 2\sigma); \quad L_3 = rG_{21,r} + G_{12} - G_{21} + \sigma; \quad L_4 = L_3 + 2G_{21} + \\ + a_{22} + a_{23}; \quad L_5 = L_2 + F_{12} + G_{12}; \quad F_{ij} = a_{ij} + G_{ij} + \sigma_i^i - \sigma_j^j; \quad \sigma = \sigma_1^1 - \sigma_2^2.$$

В случае несжимаемости материала аналогичным образом из (4), (5) получим систему четырех дифференциальных уравнений относительно неизвестных u, v, w, p . Вид трех дифференциальных уравнений равновесия аналогичен (7) — (10), если заменить в них a_{ij} на \bar{a}_{ij} , G_{ij} на \bar{G}_{ij} и к левой части уравнений (7) — (9) прибавить соответственно слагаемые

$$\bar{b}_1r^2p'_{,r} + [2(\bar{b}_1 - \bar{b}_2)r + r^2\bar{b}_{1,r}]p'; \quad \bar{b}_2r^2p'_{,\theta}; \quad \bar{b}_3r^2p'_{,\varphi},$$

а четвертое уравнение (условие несжимаемости) имеет вид

$$r^2u_{,r} + v_{,\theta} + (1/\cos^2\theta)w_{,\varphi} + 2ru - \operatorname{tg} \theta v = 0.$$

Граничные условия записываются в виде

$$(11) \quad \sigma_k^i = 0 \quad \text{при} \quad r = a; \quad b \quad (k = 1, 2, 3).$$

В целях упрощения рассмотрим статическую постановку задачи. Состояние, соответствующее потере устойчивости, рассмотрим как состояние, при котором, помимо тривиального решения задачи (7) — (9), (11), существует и нетривиальное.

Решение уравнений (7) — (9), (11) будем искать в виде рядов по сферическим функциям $Y_{nj}(\theta, \varphi)$

$$(12) \quad u = \sum_{n=j}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(r) Y_{nj}(\theta, \varphi); \quad v = \sum_{n=j}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{nj}(r) \frac{D}{D\theta} Y_{nj}(\theta, \varphi); \\ w = \sum_{n=j}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj}(r) \frac{D}{D\varphi} Y_{nj}(\theta, \varphi); \quad p' = \sum_{n=j}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{nj}(r) Y_{nj}(\theta, \varphi).$$

Из уравнений (8), (9) с учетом (12) можно установить аналогично [5] равенства $B_{nj}(r) = C_{nj}(r)$. Последнее также верно при замене величин a_{ij} на \bar{a}_{ij} и G_{ij} на \bar{G}_{ij} . Краевые задачи можно записать в терминах функций A_{nj}, B_{nj}, D_{nj} . Из системы уравнений (7) — (9) получим два дифференциальных уравнения второго порядка относительно функций A_{nj} и B_{nj} (индексы n и j опущены)

$$(13) \quad a_{11}r^2A_{,rr} + L_1rA_{,r} + (2L_5 - NG_{12})A - NF_{12}rB_{,r} - NL_2B = 0;$$

$$(14) \quad F_{21}r^2A_{,r} + L_4rA + G_{21}r^2B_{,rr} + L_3rB_{,r} - (2L_3 + Na_{22})B = 0,$$

$$N = n + n^2$$

с граничными условиями

$$(15) \quad a_{11}r^2A_{,rr} + 2a_{12}rA + Na_{12}B = 0; \quad rA + rB = 0 \quad \text{при} \quad r = a; \quad b.$$

Для сжимаемого тела, исключая функции B_{nj} и D_{nj} , приходим к дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функций $A_{nj}(r)$

$$(16) \quad \sum_{i=1}^4 P_i \frac{d^i A}{dr^i} + P_0 A = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
 P_i &= \kappa_i + \beta_i + \gamma_i \quad (i = 0, \dots, 4); \quad \beta_4 = \bar{b}_1 a_3^1; \quad \beta_0 = \bar{b}_1 a_0^1; \\
 \beta_i &= \bar{b}_1 (a_1^1 r + a_{i-1}) \quad (i = 1, 2, 3); \quad \kappa_i = a_i^1 \left[\bar{b}_{1,r} + \frac{2}{r} (\bar{b}_1 - \bar{b}_2) \right] \\
 &\quad (i = 0, \dots, 4); \\
 \gamma_3 &= \gamma_4 = 0; \quad \gamma_2 = -N (\bar{a}_{11} - \bar{F}_{12}); \quad \gamma_1 = -N \frac{1}{r} (\bar{L}_1 - \bar{L}_2 - 4\bar{F}_{12}); \\
 \gamma_0 &= N (N - 2) \bar{G}_{12} \frac{1}{r^2}; \quad a_4^1 = 0; \quad a_3^1 = r^2 \bar{b}_3^{-1} \bar{G}_{21}; \\
 a_2^1 &= r (\bar{L}_3 + 6\bar{G}_{21}) / \bar{b}_3; \\
 a_1^1 &= [N (\bar{F}_{21} - \bar{a}_{22}) + 2\bar{L}_3 + 6\bar{G}_{21}] / \bar{b}_3; \quad a_0^1 = \bar{L}_3 (N - 2) / \bar{b}_3,
 \end{aligned}$$

и граничным условиям вида

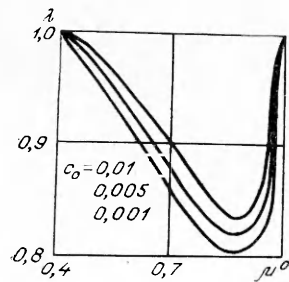
$$\begin{aligned}
 (17) \quad r^2 A_{,rr} + 2r A_{,r} + (N - 2) A &= 0, \quad a_3^1 A_{,rrr} + a_2^1 A_{,rr} + \\
 &+ \left(a_1^1 + N \frac{\bar{a}_{11} - \bar{a}_{12}}{\bar{b}_1} \right) A_{,r} + a_0^1 A = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, задача определения критической деформации свелась к решению двух дифференциальных уравнений второго порядка (13), (14) с граничными условиями (15), в случаях сжимаемого и несжимаемого материала — к решению дифференциального уравнения (16) при граничных условиях (17). Данные краевые задачи являются задачами на собственные значения. Коэффициенты дифференциальных уравнений зависят от параметров среды, конструкции, величины n и деформации. При фиксированных значениях параметров и числе n решение задачи даст искомое значение критической деформации.

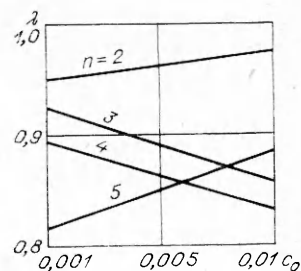
Численная реализация задачи была проведена для несжимаемого материала. При вычислениях использовался метод конечных разностей.

Как следует из фиг. 1, для сплошного шара ($b_0 \rightarrow 0$) потери устойчивости не наблюдается, что согласуется с общими физическими представлениями. При $b_0 = a_0$ (в случае пластической сферической пленки) потеря устойчивости возможна при минимальных деформациях. Вычисления проведены при $\sigma_r^0 = \sigma_T G^{-1} = -2_{10} - 3$, где σ_T — предел текучести, G — модуль сдвига, и различных значениях $c_0 = cG^{-1}$, c — коэффициент упрочнения. Связь между σ_{ii} и ϵ_{ii} выбиралась в виде $\sigma_{ii} = \sigma_T + c\epsilon_{ii}$.

На фиг. 2 показана зависимость величины критической деформации λ от коэффициента упрочнения c_0 при значениях предела текучести $\sigma_T^0 = -2_{10} - 3$ и $\mu^2 = b^0/a^0 = 0,5$. Очевидно, что минимальному значению



Фиг. 1



Фиг. 2

критической деформации (следовательно, и силы), когда происходит потеря устойчивости, соответствует $n = 2$.

Поступила 20 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Zahorski S. On plastic instability in some cases of simple flow.— «Bull. Acad. polon. sci.» Ser. sci. techn., 1964, vol. 12, N 12.
2. Zahorski S. Kinematic stability in the case of slow steady plastic flow.— «Arch. mech. stosowanej», 1964, vol. 16, N 6.
3. Спорыхин А. Н., Трофимов В. Г. О пластической неустойчивости в некоторых случаях простого течения.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
4. Скаченко А. В., Спорыхин А. Н. Устойчивость упругопластических тел при больших пластических деформациях.— ПМ, 1976, т. XII, № 5, с. 11—17.
5. Wesolowski Z. Stability of an elastic thickwalled spherical shell loaded by an external pressure.— «Arch. mech. stosowanej», 1967, vol. 19, N 1.

УДК 539.4.012.1

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА НАИБОЛЕЕ УСТОЙЧИВЫХ ПОД ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ АРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В. М. Павлов, Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

Задача об определении структуры армирования, обеспечивающей наибольшую устойчивость нагруженной внешним давлением цилиндрической оболочки, поставлена в работе [1]. На основе формулы, определяющей предел устойчивости безмоментного состояния шарнирно-опертой анизотропной круговой цилиндрической оболочки средней длины, в [1] получено ее численное решение для частного класса структур. В данной работе предел устойчивости определяется более точной формулой, не требующей ограничения длины оболочки, а оптимизация осуществляется в более широком классе структур.

1. Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины H , среднего радиуса R и длины L , изготовленная из волокнистого композиционного материала. Предполагается, что материал имеет регулярнослоистую структуру, так что в нем выделяется характерный слой, толщина которого мала по сравнению с толщиной оболочки; характерный слой имеет многонаправленное армирование, симметричное относительно произвольного осевого сечения оболочки; волокна всех направлений изготовлены из одного и того же линейно-упругого материала; связующий материал является линейно-упругим и изотропным.

Для описания напряженно-деформированного состояния характерного слоя используется механическая модель, предложенная в работе [2]. При сформулированных выше предположениях эта модель элементом армированного слоя статически эквивалентным ему элементом ортотропно-упругого однородного слоя, напряженно-деформированное состояние которого определяется в главной системе поверхностных координат симметричными плоскими тензорами осредненных напряжений σ_{ij} и