УДК 551.311.23+517.946

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ СТРАТИГРАФИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

С. Н. Антонцев, Ж. Ганье*, Г. Валлет*

Университет Beira Interior, 6201-001 Ковилья, Португалия
* Университет По, 64000 По, Франция

Исследуются модели литологической диффузии, применяемые для стратиграфического моделирования бассейна при крупномасштабном процессе отложения осадочных пород. Такие модели описывают процессы отложения эрозионных осадков и учитывают ограниченное выветривание через нестандартные односторонние условия. Представлены различные теоретические результаты, примеры и численные решения в случае монолитологической колонны. Формулируется новый закон сохранения, используемый для моделирования, и излагаются математические методы решения задачи.

Ключевые слова: стратиграфические модели, ограниченное выветривание, некорректные задачи, обратные задачи, вырожденные параболически-гиперболические законы сохранения.

Введение. Стратиграфические модели, разработанные недавно в Институте нефти Франции, приводят к математическим вопросам, на которые трудно ответить в рамках некорректных и обратных задач. Основными процессами в формировании осадочного бассейна являются эрозия, механизм смещения отложений и вертикальное уплотнение. При больших временных и пространственных масштабах подходы динамического спуска обычно являются более предпочтительными, чем реологические модели (см. [1, 2]).

Модель, предложенная в [1, 3–5], описывает сопряжение моделей эрозии ограниченного выветривания и нелинейной литологической диффузии: процесс ограниченного выветривания моделируется ограничениями в виде неравенств на частную производную по времени от толщины отложения и введением новой неизвестной функции — ограничителя потока. Сопряжение обеих моделей достигается либо наложением односторонних условий на ограничитель потока и ограничивающих неравенств на скорость эрозии, либо нахождением максимального ограничителя.

Предлагаемая модель не учитывает явления уплотнения [6].

1. Моделирование. Рассмотрим осадочный бассейн с основанием Ω. Пусть $Q =]0,T[\, \times \Omega$ для любого положительного T.

Физическое моделирование основано на трех предположениях.

Предположение 1. Выветривание предполагается ограниченным, т. е. скорость эрозии имеет нижнюю оценку в виде неотрицательной ограниченной измеримой функции E в Q: $\partial_t h \geqslant -E$, где h — высота отложений (топография).

Предположение 2. Односторонние ограничения на выходной границе Γ_e имеют вид $\lambda\partial_n h + f \geqslant 0$, $\partial_t h + E \geqslant 0$, $(\lambda\partial_N h + f)(\partial_t h + E) = 0$, где f — заданная ограниченная измеримая функция на Σ.

Для того чтобы совместить предположения 1, 2 с законом сохранения массы, используется

Предположение 3. Поток вещества $\boldsymbol{q}$ пропорционален ∇h, т. е. $\boldsymbol{q} = \lambda\nabla h$ в Q, где $\lambda = \lambda(t,x)$ — ограничитель потока массы, априори находящийся в интервале $[0,1]$.

Таким образом приходим к математической модели, включающей:
— уравнение баланса массы осадка

$$\partial_t h - \operatorname{div}(\lambda \nabla h) = 0 \qquad \text{в} \quad Q; \tag{1}$$

— граничные условия на $\partial\Omega = \overline{\Gamma_e} \cup \overline{\Gamma_s}$:

$$-\lambda \partial_n h = f \qquad \text{на} \quad]0, T[\times \Gamma_s; \tag{2}$$

$$\lambda \partial_n h + f \geqslant 0, \quad \partial_t h + E \geqslant 0, \quad (\lambda \partial_n h + f)(\partial_t h + E) = 0 \quad \text{на} \quad]0, T[\times \Gamma_e; \tag{3}$$

— условия ограниченного выветривания

$$\partial_t h \geqslant -E \quad \text{в} \quad Q; \tag{4}$$

— начальные условия

$$h(0, x) = h_0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5}$$

Определение. Сильным решением задачи (1)–(5) называется пара (λ, h) в $L^\infty(Q) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$, такая что

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad \text{в } Q, \qquad h(0, x) = h_0 \quad \text{в } \Omega,$$
$$\partial_t h \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \qquad \partial_t h \geqslant -E \quad \text{на } \Gamma_s,$$

и $\forall v \in H^1(Q)$ и $t \in]0, T[$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega \partial_t h (v - \partial_t h)\, dx + \int\limits_\Omega \lambda \nabla h \nabla (v - \partial_t h)\, dx + \int\limits_\Gamma f (v - \partial_t h)\, d\sigma + \int\limits_{\Gamma_s} \chi_{\mathbb{R}^+}(v + E)\, d\sigma \geqslant 0,$$

где $\chi_{\mathbb{R}^+}(x) = 0$ при $x \geqslant 0$, $\chi_{\mathbb{R}^+}(x) = +\infty$ при $x < 0$.

2. Сильное решение вспомогательной задачи. Рассмотрим вспомогательную задачу (1)–(3), (5) (без условия (4)).

2.1. *Существование сильного решения.* Справедлива

Теорема 1. *Предположим, что E и f — регулярные функции, такие что $\lambda \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$ при $0 < a \leqslant \lambda \leqslant 1$, и существует неотрицательная функция $g \in L^2(\Omega)$, такая что для любого $v \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_\Omega [g - E(0)] v\, dx + \int\limits_\Omega \lambda(0) \nabla h_0 \nabla v\, dx + \int\limits_\Gamma f(0) v\, d\sigma = 0. \tag{6}$$

Тогда существует единственное сильное решение h вспомогательной задачи (1)–(3), (5).

Приведем краткое доказательство (подробнее см. [4, 7]).

1. С помощью метода Галеркина можно доказать, что $\forall \varepsilon, \eta > 0$ существует решение $h_{\varepsilon,\eta} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, такое что

$$\partial_t h_{\varepsilon,\eta} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \qquad \partial_t^2 h_{\varepsilon,\eta} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$
$$h_{\varepsilon,\eta}(0, x) = h_{0,\eta}, \qquad \partial_t h_{\varepsilon,\eta}(0) = g_\eta - E,$$

где g_η — неотрицательная последовательность функций из $H^1(\Omega)$, которая сходится к g в $L^2(\Omega)$; $h_{0,\eta}$ — решение (6), и $\forall v \in H^1(\Omega)$ и $t \in]0, T[$ выполняется равенство

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \partial_t^2 h_{\varepsilon,\eta} v\, dx + \int\limits_\Omega \partial_t h_{\varepsilon,\eta} v\, dx + \int\limits_\Omega \lambda \nabla h_{\varepsilon,\eta} \nabla v\, dx + \int\limits_\Gamma f v\, d\sigma - \int\limits_{\Gamma_s} \beta_\eta(\partial_t h_{\varepsilon,\eta} + E) v\, d\sigma = 0,$$

где $\beta_\eta(x) = -(x/\eta) I_{]-\infty,-1]} + (x/\eta)(x^2 + 2) I_{]-1,0]}$; $I_A(x) = 1$ при $x \in A$, $I_A(x) = 0$ при $x \notin A$.

В [4] доказано, что существуют положительные постоянные M и M'_η (зависящие от η), такие что для любого t

$$\|h_{\eta,\varepsilon}(t)\|_V + \|\partial_t h_{\eta,\varepsilon}(t)\|_H + \|\partial_t h_{\eta,\varepsilon}\|_{L^2(0,t;V)} + \|\eta^{-1}G[\partial_t h_{\eta,\varepsilon} + E]\|_{L^1(0,t;H)} \leqslant M(1+\sqrt{\varepsilon}),$$
$$\|\sqrt{\varepsilon}\,\partial_t^2 h_{\eta,\varepsilon}(t)\|_H + \|\partial_t^2 h_{\eta,\varepsilon}\|_{L^2(0,t;H)} + \|\partial_t h_{\eta,\varepsilon}(t)\|_V \leqslant M'_\eta$$

$(G(x) = -\beta(x)x)$.

2. Используя теоремы о компактности, можно убедиться, что $\forall\eta > 0\ \exists h_\eta \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, такое что

$$\partial_t h_\eta \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \qquad \partial_t^2 h_\eta \in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]'),$$
$$h_\eta(0,\,x\,) = h_{0,\eta}, \qquad \partial_t h_\eta(0) = g_\eta - E,$$

и $\forall v \in H^1(\Omega)$ и $t \in]\,0,T\,[$ выполняется равенство

$$\int\limits_\Omega \partial_t h_\eta v\,dx + \int\limits_\Omega \lambda\nabla h_\eta \nabla v\,dx + \int\limits_\Gamma f v\,d\sigma - \int\limits_{\Gamma_s} \beta_\eta(\partial_t h_\eta + E)v\,d\sigma = 0.$$

Более того, существует положительная постоянная M, такая что

$$\|h_\eta\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\eta^{-1}G[\partial_t h_\eta + E]\|_{L^1(Q)} + \|\partial_t h_\eta\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant M,$$

и $\|\partial_t^2 h_\eta\|_{L^2(0,T;V_0')} \leqslant M$. Здесь $V_0 = \{v \in V\colon v = 0 \text{ на } \Gamma_s\}$.

3. Существование решения доказывается с помощью стандартных рассуждений о компактности и выпуклости, а также весового интегрирования по времени.

4. Единственность решения доказывается с использованием метода монотонности.

2.2. *Условие ограниченного выветривания.* Приведем одно из достаточных условий ограниченного выветривания.

Теорема 2. *Предположим, что λ, E, f удовлетворяют неравенствам*

$$\operatorname{div}(\partial_t\lambda\nabla h) + \partial_t E - \operatorname{div}(\lambda\nabla h) \geqslant 0 \quad \text{в } Q,$$
$$\partial_t f - \partial_t\lambda\nabla h\cdot \boldsymbol{n}_{ext} + \lambda\nabla E\boldsymbol{n}_{ext} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad]0,T[\,\times\Gamma_e.$$

Тогда h удовлетворяет неравенству $\partial_t h + E \geqslant 0$ в Q.

Доказательство основано на принципе максимума для функции $\partial_t h$.

Пример 1. Предположим, что $E(t,x) = E_0$, $f(t,x) = f(x)$ и $\lambda(t,x) = \lambda(x)$, тогда $\partial_t h + E \geqslant 0$ в Q.

3. Определение параметра λ. Обозначим через Λ_{ad} допустимый набор параметров:

$$\Lambda_{ad} = \{\lambda \in L^\infty(Q)\colon \exists h, \text{ где } (\lambda,h) \text{ — решение (1)–(5)}\}.$$

Пример 2. Предположим, что $E = a \geqslant 0$, $f = 0$ и $h_0 = c > 0$. Тогда для любого измеримого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ пара (λ, h_0) есть решение задачи (1)–(5) и $\lambda \in \Lambda_{ad}$. Следовательно, задача имеет неединственное решение и для определения λ необходимы дополнительные предположения.

Модель 1. *Выбор максимального значения λ.* Будем предполагать, что значение λ максимально в Λ_{ad}, т. е.:

1) $\lambda \in \Lambda_{ad}$;
2) $\forall\mu \in \Lambda_{ad}\quad \mu \leqslant \lambda$ в Q.

Модель 2. *Одностороннее ограничение на выветривание.* Предполагается, что при $\lambda < 1$ условие выветривания является эффективным, т. е.:

1) $\lambda \in \Lambda_{ad}$;
2) $(1-\lambda)(\partial_t h + E) = 0$ в Q.

Иными словами, если максимальная скорость эрозии не достигается, то $\lambda = 1$, если максимальная скорость эрозии достигается, то $\lambda < 1$.

3.1. *Эвристический подход и некорректность моделей.* Приведем некоторые примеры.

Пример 3. Предположим, что $E = a \geqslant 0$, $f = 0$ и $h_0 = c > 0$. Тогда:

1) пара $(1, h_0)$ есть единственное решение модели 1;

2) пара $(1, h_0)$ есть решение модели 2.

Следует отметить, что если $a = 0$, то для любого измеримого $\lambda \in [0, 1]$ пара (λ, h_0) есть решение модели 2. Следовательно, модель 2 некорректна.

Пример 4. Пусть

$$\Omega =]0,1[, \quad E = 0, \quad f = 0, \quad h_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i I_{[a_i, a_{i+1}[} + \alpha_n I_{[a_{n-1}, a_n]}, \quad \alpha_i > 0.$$

Тогда:

1) для любого непрерывного λ, такого что $\lambda(\alpha_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, пара (λ, h_0) является решением модели 2;

2) если в модели 1 решение существует, то с учетом предыдущих замечаний необходимо $\lambda = 1$ и $1 \in \Lambda_{ad}$. Следовательно, существует h^*, такое что пара $(1, h^*)$ является решением модели 1, т. е. $\Delta h_0 \geqslant 0$ в $D'(\Omega)$ (в силу слабой непрерывности Δh_0 при $t = 0$ и непрерывности производной $\partial_t h$ в $D'(\Omega)$). Такое условие невозможно (Δh_0 не является мерой Радона), и, следовательно, модель 1 некорректна.

Следует отметить, что исследование ведется в предположении наличия совместных и достаточно гладких данных задачи.

3.2. *Обратная задача.* Другой важной задачей в геологии является обратная задача: можно ли найти для данной топографии h соответствующий множитель — ограничитель λ? Тогда задача формулируется следуюшим образом: определить функцию λ, удовлетворяющую уравнению

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla h) = \partial_t h \quad \text{в} \quad Q$$

и граничным условиям

$$-\lambda \partial_n h = f \quad \text{на} \quad]0, T[\times \Gamma_s,$$

$$\lambda \partial_n h + f \geqslant 0, \quad (\lambda \partial_n h + f)(\partial_t h + E) = 0 \quad \text{на} \quad]0, T[\times \Gamma_e.$$

При этом требуется найти $\lambda = \lambda(h)$ такое, чтобы ограничитель λ был максимальным для заданного h, т. е.

$$1 - \lambda \geqslant 0, \quad \partial_t h + E \geqslant 0, \quad (1 - \lambda)(\partial_t h + E) = 0 \quad \text{в} \quad Q.$$

3.3. *Анализ предложенных моделей.* Рассмотренные примеры показывают, что в общем случае модели 1, 2 являются некорректными (решение либо не существует, либо неединственно). Эти модели могут быть корректными лишь для особого семейства начальных данных.

Прежде чем решать обратную задачу, необходимо сформулировать корректную прямую задачу.

4. Новый подход к анализу модели 2. Рассмотрим новый подход к анализу модели 2. Обозначим через H максимальный монотонный граф функции Хевисайда, т. е. $H(x) = 0$ при $x < 0$, $H(x) = 1$ при $x > 0$ и $H(0) \in [0, 1]$. Тогда формально пара (λ, h) есть решение модели 2, если $\lambda \in H(\partial_t h + E)$ в Q и выполнено уравнение

$$\partial_t h - \operatorname{div}(\lambda \nabla h) = 0 \quad \text{в } Q \tag{7}$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Действительно:

1. По построению (λ, h) — решение (1)–(3), (5).

2. Если $\partial_t h + E < 0$ в $\omega \subset Q$, $\omega \neq \emptyset$, то $\lambda = 0$ и $\partial_t h = 0$ в ω. Поскольку E неотрицательно, то и $\partial_t h + E$ неотрицательно в ω, т. е. возникает противоречие. Таким образом, $\partial_t h + E \geqslant 0$ в $Q \setminus Q_0$, $Q_0 = \emptyset$.

3. Если $\lambda \in [0,1]$ и $\lambda < 1$, то $\partial_t h + E \leqslant 0$. Таким образом, $(1-\lambda)(\partial_t h + E) = 0$ в $Q \setminus Q_0$, $Q_0 = \emptyset$.

Введем аппроксимацию функции Хевисайда H кусочно-линейной непрерывной функцией H_ε и будем рассматривать уравнение

$$\partial_t h_\varepsilon - \operatorname{div}(H_\varepsilon(\partial_t h_\varepsilon + E)\nabla h_\varepsilon) = 0 \quad \text{в } Q$$

с соответствующими граничными и начальными условиями, опуская для удобства индекс ε.

4.1. *Замечание о типе регуляризованного уравнения.* Рассмотрим уравнение

$$\partial_t u - \operatorname{div}(\lambda(\partial_t u)\nabla u) = 0,$$

являющееся гиперболическим вырождающимся уравнением. Действительно, вычисляя производные, получаем

$$\partial_t u = \operatorname{div}(\lambda(\partial_t u)\nabla u) = \lambda(\partial_t u)\Delta u + \lambda'(\partial_t u)\nabla\partial_t u \nabla u.$$

В случае одной пространственной переменной для $\Omega =]0,1[$ дискриминант этого уравнения определяется формулой

$$\Delta_u = -|\lambda'(\partial_t u)\partial_x u|^2/4 \leqslant 0.$$

Вводя новую функцию

$$w = \lambda(\partial_t u)\partial_x u, \qquad \partial_x w = \partial_x(\lambda(\partial_t u)\partial_x u) = \partial_t u,$$

получим вырождающееся гиперболическое уравнение

$$\lambda(\partial_x w)\partial_t w = \lambda'(\partial_x w)\partial_{xt} w + \lambda^2(\partial_x w)\partial_{xx} w$$

с дискриминантом $\Delta_w = -|\lambda'(\partial_x w)|^2/4 \leqslant 0$. Отметим, что уравнение такого типа описывает одномерное нестационарное вертикальное фильтрационное течение в неоднородном многослойном грунте (см. [8, 9]). В этом случае давление $\psi(z,t)$ и влажность $\theta(\psi)$ удовлетворяют уравнению

$$\partial_t \theta - \partial_z(K(\theta, z)(\partial_z \psi - 1)) = f(\theta, z, t) = 0 \quad \text{в} \quad Q = \Omega \times]0, T[. \tag{8}$$

Для коэффициента влагопроводности обычно используется следующая формула:

$$K(\theta, z) = \begin{cases} K_s((\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r))^n, & \theta_r < \theta \leqslant \theta_s, \\ 0, & \theta \leqslant \theta_r. \end{cases}$$

Здесь K_s, θ_r, θ_s, $n > 1$ — постоянные. Функция $f(\theta, z, t)$ определяет интенсивность извлечения воды из грунта. Зависимость влажности θ от давления ψ с учетом ее гистерезиса определяется как некоторая модификация формулы Гарднера. При $\psi \geqslant 0$ получаем $\theta = \theta_s$, при $\psi < 0$ имеем

$$\theta = \theta_0 + (\theta_s - \theta_0)(1 + (1-p)|a\psi|^m)/(1 + |a\psi|^m), \qquad \partial_t \psi > 0,$$
$$\theta = \theta_0 - p(\theta_s - \theta_0)/(1 + |b\psi|^m), \qquad \partial_t \psi \leqslant 0.$$

Здесь параметр p постоянен в том интервале изменения t, в котором $\partial_t \psi$ сохраняет знак ($-1 \leqslant p < 0$ при $\partial_t \psi \leqslant 0$ и $0 \leqslant p \leqslant 1$ при $\partial_t \psi$). В точках, где производная $\partial_t \psi$ меняет знак, новое значение параметра p определяется из условия непрерывности ψ и θ

$$\psi\big|_{t\pm 0} = \psi\big|_{t\mp 0}, \qquad -p/(1 + |b\psi|^m)\big|_{t\pm 0} = (1 + (1-p)|a\psi|^m)/(1 + |a\psi|^m)\big|_{t\mp 0}$$

при $\partial_t\psi\big|_{t\pm0} \leqslant 0$ и $\partial_t\psi\big|_{t\mp0} > 0$. В начальный момент $t = 0$ должно быть задано распределение $p(z)$. Параметры K_s, θ_r, θ_s, θ_0, n, m, a, b зависят от типа грунта. При условиях, указанных выше, уравнение (8) можно представить в форме

$$\partial_t u - \partial_z(\lambda(z,u,u_t)\partial_z u) = \tilde f \quad \text{в} \quad Q = \Omega\times]0,T[,$$

где $u = \theta$; $\tilde f = f + \partial_z K(\theta, z)$.

Гиперболичность рассматриваемого уравнения $\partial_t u - \operatorname{div}(\lambda(\partial_t u)\nabla u) = 0$ оправдывает поиск решения типа бегущих волн.

4.2. *Решение типа бегущих волн.* Предположим, что выполнены условия

$$\Omega =]0,1[, \qquad \Gamma_e = \{0\}, \qquad \Gamma_s = \{1\},$$

$$E^* > E \geqslant 0, \qquad \xi = \mu x + t \quad (\mu > 0), \qquad 0 < \xi_0 < \xi_1,$$

$$E(\xi) = EI_{[0,\xi_0[}(\xi) + E^* I_{]\xi_0,+\infty]}(\xi),$$

и будем искать специальное решение

$$h(t,x) = h(\xi), \qquad \lambda(t,x) = \lambda(\xi).$$

Пример 5. При $(\xi_1 - \xi_0)/\mu^2 + E/E^* \leqslant 1$ пара (h,λ), определяемая уравнениями

$$h(x,t) = \mu^2 E\,\mathrm{e}^{-\xi_0/\mu^2}[1 - \mathrm{e}^{\xi/\mu^2}] + h_0(0), \qquad \lambda(x,t) = 1, \qquad 0 < \xi \leqslant \xi_0,$$

$$h(x,t) = E^*(\xi_0 - \xi) + h_0(0) - \mu^2 E(1 - \mathrm{e}^{-\xi_0/\mu^2}), \qquad \lambda(x,t) = (\xi - \xi_0)/\mu^2 + E/E^*, \qquad \xi_0 < \xi \leqslant \xi_1,$$

является решением модели 2.

Пример 6. При $E \leqslant E^*\,\mathrm{e}^{(\xi_0-\xi_1)/\mu^2}$ пара (h,λ), определяемая уравнениями

$$h(x,t) = -E\xi + h_0(0), \quad \lambda(x,t) = (\xi - \xi_0)/\mu^2 + 1, \qquad 0 < \xi \leqslant \xi_0,$$

$$h(x,t) = \mu^2 E(1 - \mathrm{e}^{(\xi-\xi_0)/\mu^2}) - E\xi_0 + h_0(0), \qquad \lambda(x,t) = 1, \qquad \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1,$$

является решением модели 2.

Пример 7. Рассмотрим переменную $\xi = x + \mu t$. Тогда, если $\xi_1 = \xi_0 + \min\{\mu(h_0(0) - E/\mu^2)/E^*, (E^* - E)/(\mu E^*)\}$, то пара (h,λ), определяемая уравнениями

$$h(x,t) = E\,\mathrm{e}^{-\mu\xi_0}(1 - \mathrm{e}^{\mu\xi})/\mu^2 + h_0(0), \qquad \lambda(x,t) = 1, \qquad 0 < \xi \leqslant \xi_0,$$

$$h(x,t) = E^*(\xi_0 - \xi)/\mu + h_0(0) - E(1 - \mathrm{e}^{-\mu\xi_0})/\mu^2, \qquad \lambda(x,t) = \mu(\xi - \xi_0) + E/E^*, \qquad \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1,$$

является решением модели 2.

Расчет данных примеров и некоторые графики приведены в [4].

5. Новый закон сохранения. Аппроксимационные задачи. Исследуем упрощенные законы сохранения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(H(\partial_t u)\nabla u) \ni 0 \quad \text{или} \quad \partial_t u - \operatorname{div}(H_\varepsilon(\partial_t u)\nabla u) = 0 \quad \text{в } Q,$$

где H — максимальный монотонный граф функции Хевисайда в случае $E = 0$; H_ε — соответствующая регуляризация H.

5.1. *Вспомогательная аппроксимационная задача.* Рассмотрим следующую задачу. Найти пару (χ, U), такую что

$$\chi \in L^\infty(Q), \qquad \chi \in H(\partial_t u),$$

$$\partial_t u - \operatorname{div}(\chi\nabla u) = 0 \qquad \text{в} \quad Q,$$

$$\chi\partial_n u + f = 0 \qquad \text{на} \quad]0,T[\times\Gamma_e,$$

$$\chi\partial_n u + f \geqslant 0, \qquad \partial_t u \geqslant 0, \qquad (\chi\partial_n u + f)\partial_t u = 0 \quad \text{на} \quad]0,T[\times\Gamma_s,$$
$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{в} \quad \Omega,$$

где f неположительно на $]0,T[\times\Gamma_s$ и $u_0 \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ при $u_0 \geqslant 0$. В данном пункте предложен некоторый математический инструмент для получения сверхслабого решения. Такие решения являются пределом в $C([0,T],L^2(\Omega))$ аппроксимирующих решений, полученных с помощью неявных схем дискретизации по времени [10]. Таким образом, получаются аппроксимирующие формулы для численных методов.

Пусть ε, h — положительные действительные числа. Для любого x введем функции

$$H_\varepsilon(x) = \max\,[\varepsilon, \min\,(x/\varepsilon) + \varepsilon, 1], \qquad F_\varepsilon(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{H_\varepsilon(t)}\,dt.$$

Тогда можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Существует единственная последовательность $u_\varepsilon^k \in H^1(\Omega)$, такая что $u_\varepsilon^0 = u_0$ и $\forall v \in H^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ на Γ_s выполнено неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h}\Big(v - \frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h}\Big)\,dx + \int\limits_\Omega H_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h}\Big)\nabla u_\varepsilon^k\cdot\nabla\Big(v - \frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h}\Big)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Gamma_s} f_k\Big(v - \frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h}\Big)\,d\sigma, \qquad f_k = \frac{1}{h}\int\limits_{kh}^{(k+1)h} f(s)\,ds.$$

Кроме того, $0 \leqslant u_\varepsilon^k \leqslant \sup\limits_\Omega u_0$ в Ω, $u_\varepsilon^k \geqslant u_\varepsilon^{k-1}$ на Γ_s.

Доказательство. Неравенство $0 \leqslant u_\varepsilon^k \leqslant \sup\limits_\Omega u_0$ следует из принципа максимума. Для доказательства существования u_ε^k необходимо использовать теорему Шаудера — Тихонова о фиксированной точке с адаптированным штрафом для ограничений $u_\varepsilon^k \geqslant u_\varepsilon^{k-1}$ на Γ_s. Единственность следует из известных методов сжимающих полугрупп.

5.2. *Некоторые оценки решений.* На основании указанных выше свойств приходим к следующим утверждениям.

Лемма 1. *Последовательность u_ε^k ограничена в $L^\infty(\Omega)$ независимо от ε и h.*

Лемма 2. *Для любого целого числа N имеет место оценка*

$$\frac{2}{h}\sum_{k=1}^N \|u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_\varepsilon^N\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \sum_{k=1}^N \|\nabla(u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1})\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \leqslant \|\nabla u_0\|^2_{(L^2(\Omega))^n}.$$

Доказательство. Для доказательства лемм 1, 2 достаточно использовать функцию $v = (u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1})/h - \varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1})/h$ в качестве тестовой и заметить, что

$$h\int\limits_\Omega (u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1})F_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h}\Big)\,dx \geqslant \|u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)},$$
$$h\int\limits_\Omega H_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h}\Big)\nabla u_\varepsilon^k\cdot\nabla F_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h}\Big)\,dx = \int\limits_\Omega \nabla u_\varepsilon^k\cdot\nabla u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}\,dx.$$

Введем функцию

$$\hat u_{\varepsilon,h}(t,x) = \begin{cases} (u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1})(t-kh)/h + u_\varepsilon^{k-1}, & t\in[kh;(k+1)h],\\ u_0(x), & t\in[0;h].\end{cases}$$

Тогда можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Независимо от* ε *и* h *последовательность* $\hat{u}_{\varepsilon,h}$ *является ограниченной в* $H^1(Q) \cap L^\infty(Q) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$. *Следовательно, последовательность* $\hat{u}_{\varepsilon,h}$ *относительно компактна в* $C([0,T],L^2(\Omega))$ *в соответствии с леммой Асколи.*

5.3. *Предел последовательности по* $h \to O$ *при фиксированном* ε. Отметим, что $\forall v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ и $v \geqslant 0$ на $]0,T[\times\Gamma_s$ справедливо неравенство

$$\int_Q \partial_t \hat{u}_{\varepsilon,h} v\,dx\,dt + \int_Q a_\varepsilon(\partial_t \hat{u}_{\varepsilon,h}) \nabla \hat{u}_{\varepsilon,h} \cdot \nabla v\,dx\,dt \geqslant \int_{]0,T[\times\Gamma_s} fv\,d\sigma\,dt + O(h).$$

Наличие двух слабых сходящихся членов $a_\varepsilon(\partial_t \hat{u}_{\varepsilon,h})$ и $\nabla \hat{u}_{\varepsilon,h}$ не позволяет перейти к пределу по временному шагу $h \to O$ и получить решение дифференциального уравнения с частными производными в смысле распределений. Чтобы совершить такой предельный переход, можно использовать теорию меры Юнга. Напомним свойства векторных мер Юнга, предложенных в [11].

Теорема 5. *Пусть* Q — *ограниченное открытое множество* $\mathbb{R}^d$ *и* $\boldsymbol{u}_n$ — *ограниченная последовательность в* $[L^2(Q)]^d$. *Тогда существует векторная мера Юнга* ν *в* $L^\infty_w(Q,\mathbb{R}^d)$, *такая что*

$$\forall f \in C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \quad \exists c > 0 \quad \text{и} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad |f(\boldsymbol{u})| \leqslant c(1+|\xi|),$$

и, следовательно,

$$\forall v \in L^2(Q) \qquad \int_Q f(\boldsymbol{u}_n) v\,dx \to \int_{Q\times\mathbb{R}^d} f(\xi) v(x)\,d\nu_x(\xi)\,dx.$$

Поскольку $0 \leqslant a_\varepsilon \leqslant 1$, то в соответствии с предыдущими априорными оценками существуют u^ε в $H^1(Q)$ и векторная мера Юнга ν^ε в $L^\infty_w(Q,\mathbb{R}^{N+1})$, такие что

$$\partial_t u^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \xi_0\,d\nu^\varepsilon_{(t,x)}(\xi), \qquad \partial_{x_i} u^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \xi_i\,d\nu_{(t,x)}\varepsilon(\xi),$$

где $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, и выполнено неравенство

$$\int_Q \partial_t u^\varepsilon v\,dx\,dt + \sum_{i=1}^N \int_{Q\times\mathbb{R}}^{N+1} a_\varepsilon(\xi_0)\xi_i\,\partial_{x_i} v\,d\nu^\varepsilon_{(t,x)}(\xi)\,dx\,dt \geqslant \int_{]0,T[\times\Gamma_s} fv\,d\sigma\,dt$$

$\forall v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ и $v \geqslant 0$ на $]0,T[\times\Gamma_s$. Отсюда, в частности, следует

$$\partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}\Big[\int_{\mathbb{R}^{N+1}} a_\varepsilon(\xi_0)\xi_i\,d\nu^\varepsilon_{(t,x)}(\xi)\Big] = 0.$$

5.4. *Переход к пределу по* $\varepsilon \to O$ *при фиксированном* h. Предположим, что h фиксировано. Тогда справедлива

Теорема 6. *Существует последовательность пар* u^k, χ_k *в* $H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, *такая что* $u^0_\varepsilon = u_0$, $\chi_k \in H((u^k - u^{k-1})/h))$ *и* $\forall v \in H^1(\Omega)$ *и* $v \geqslant 0$ *на* Γ_s *выполняется неравенство*

$$\int_\Omega \frac{u^k - u^{k-1}}{h}\Big(v - \frac{u^k - u^{k-1}}{h}\Big)\,dx + \int_\Omega \chi_k \nabla u^k \cdot \nabla\Big(v - \frac{u^k - u^{k-1}}{h}\Big)\,dx \geqslant \int_{\Gamma_s} f_k\Big(v - \frac{u^k - u^{k-1}}{h}\Big)\,d\sigma.$$

Кроме того, $0 \leqslant u^k \leqslant \sup\limits_\Omega u_0$ *в* Ω *и* $u^k \geqslant u^{k-1}$ *на* Γ_s.

Доказательство. Данное утверждение следует из предыдущих априорных оценок и тождества

$$H_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u^{k-1}}{h}\Big)\nabla u_\varepsilon^k = hH_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u^{k-1}}{h}\Big)\nabla\frac{u_\varepsilon^k - u^{k-1}}{h} - H_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u^{k-1}}{h}\Big)\nabla u^{k-1} =$$
$$= h\nabla A_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u^{k-1}}{h}\Big) - H_\varepsilon\Big(\frac{u_\varepsilon^k - u^{k-1}}{h}\Big)\nabla u^{k-1},$$

где $A'_\varepsilon = H_\varepsilon$.

Введем функцию

$$\hat{u}_h(t,x) = \begin{cases} (u^k - u^{k-1})(t-kh)/h + u^{k-1}, & t \in [kh;(k+1)h], \\ u_0(x), & t \in [0;h]. \end{cases}$$

Тогда справедлива

Теорема 7. *Независимо от временного шага h последовательность $\hat{u}_h$ является ограниченной в $H^1(Q) \cap L^\infty(Q) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ и, следовательно, относительно компактной в $C([0,T],L^2(\Omega))$. Кроме того, $\chi_h = \sum_{k\geqslant 0} \chi_k I_{[kh,(k+1)h[} \in H(\partial_t \hat{u}_h)$, $\partial_t \hat{u}_h \geqslant 0$ в Q.*

Полученные выше результаты могут быть доказаны также для следующей задачи: найти (χ, u), такое что

$$\chi \in L^\infty(Q), \qquad \chi \in H(\partial_t u + E),$$
$$\partial_t u - \operatorname{div}(\chi\nabla u) = 0 \qquad \text{в } Q,$$
$$\partial_n u = 0 \quad \text{на} \quad]0,T[\times\Gamma_e, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad]0,T[\times\Gamma_s,$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega,$$

где E — неотрицательная функция переменной t; $u_0 \geqslant 0$ принадлежит $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Eymard R., Gallouët T., Granjeon D., et al.** Multi-lithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint // Intern. J. Numer. Methods Engng. (Submitted.)
2. **Granjeon D., Huy Tran Q., Masson R., Glowinski R.** Modèle stratigraphique multi-lithologique sous contrainte de taux d'érosion maximum. Rueil-Malmaison: Inst. Français du Pétrole, 2000.
3. **Antontsev S. N., Gagneux G.** Quelques remarques sur la recherche de la solution maximale d'un problème inverse en géologie. Pau, 2000. (Univ. de Pau; N 17: Analyse non linéaire).
4. **Antontsev S. N., Gagneux G., Vallet G.** Analyse mathématique d'un modèle d'asservissement stratigraphique. Pau, 2001. (Univ. de Pau; N 23: Analyse non linéaire).
5. **Antontsev S. N., Gagneux G., Vallet G.** On some stratigraphic control problems // Abstr. of the Intern. conf. "Ill-posed and inverse problems" dedicated to Prof. M. M. Lavrentiev on the occasion of his 70th anniversary, Novosibirsk, Aug. 5–9, 2002. Novosibirsk: Sobolev Inst. of math., 2002. P. 12.
6. **Gagneux G., Masson R., Plouvier-Debaigt A., et al.** Vertical compaction in a faulted sedimentary basin // Math. Model. Numer. Analys. 2003. V. 37, N 2. P. 373–388.
7. **Duvaut G., Lions J.-L.** Les inéquations en mécanique et en physique. Paris: Dunod, 1972.
8. **Mualem Y., Dagan G.** Dependent domain model of capillary hysteresis // Water Resour. Res. 1975. V. 11, N 3. P. 452–460.

9. **Poulovassilis A., Childs E. C.** The hysteresis of pore water: the non-independence of domains. Soil Sci. 1971. V. 112, N 5. P. 301–312.
10. **Lions J. L.** Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lin'eaires. Paris: Dunod, 1969.
11. **Málek J., Nečas J., Rokyta M., Růžička M.** Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDE's. L.: Chapman and Hall, 1996.

Поступила в редакцию 28/III 2003 г.,
в окончательном варианте — 1/VII 2003 г.