УДК 532.5.032

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ С ПОДВИЖНОЙ ЛИНИЕЙ КОНТАКТА

А. А. Алабужев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь, Россия
Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990 Пермь, Россия
E-mail: alabuzhev@icmm.ru

Исследуются вынужденные колебания цилиндрической капли невязкой жидкости, окруженной другой жидкостью и ограниченной в осевом направлении твердыми плоскостями. На систему оказывают воздействие вибрации, сила которых направлена параллельно оси симметрии капли. Скорость движения линии контакта пропорциональна отклонению краевого угла от значения, при котором капля находится в состоянии равновесия. Рассматриваются линейные и нелинейные колебания. Выявлены условия возникновения резонанса.

Ключевые слова: цилиндрическая капля, контактная линия, вынужденные колебания.

DOI: 10.15372/PMTF20160607

Введение. Исследованию вынужденных колебаний капли жидкости (или газового пузырька) на подложке и способов управления такими объектами посвящено большое количество работ. В работах [1, 2] рассматривались вынужденные колебания полусферической капли при касательных и нормальных вибрациях подложки. В [3] приводится обзор исследований поведения капли на диэлектрической подложке в переменном электрическом поле. Колебания капли на нагретой подложке, возникающие в результате испарения жидкости с поверхности капли и конвекции Марангони внутри капли, исследовались в работе [4]. Влияние поверхностных свойств подложки на движение капли по наклонной поверхности при наличии вибраций исследовалось в [5]. Представляет интерес изучение колебаний жидкой области (жидкого моста) [6] и цилиндрической капли [7], что обусловлено не только наличием разнообразных эффектов в таких системах, но и технологическими причинами.

Изучение колебаний капли связано с исследованием движения линии контакта трех несмешивающихся сред, таких как твердая — жидкая — газообразная или твердая — жидкая — жидкая [8–10]. Несмотря на широкое использование смачивания в современных технологиях, это явление недостаточно изучено, так как межфазное взаимодействие существенно зависит от наличия примесей и состояния поверхности (наличие шероховатостей, дислокаций).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-96017, нелинейная задача) и Российского научного фонда (код проекта 14-21-00090, линейная задача).

В работе [11] изучалось затухание стоячих волн на поверхности жидкости между двумя вертикальными стенками. В эффективном граничном условии, описывающем динамику линии контакта, полагается, что связь между скоростью движения линии контакта и величиной отклонения краевого угла от равновесного значения (для простоты этот угол считается равным 90°) является линейной:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* \boldsymbol{k} \cdot \nabla \zeta^*. \qquad (1)$$

Здесь ζ^* — величина отклонения поверхности от равновесного положения; Λ^* — феноменологическая постоянная (постоянная Хокинга); $\boldsymbol{k}$ — вектор нормали к твердой поверхности. Условия, когда линия контакта является фиксированной, а краевой угол — постоянным, представляют собой частные случаи граничного условия (1): $\zeta^* = 0$, $\boldsymbol{k} \cdot \nabla \zeta^* = 0$ соответственно. В [11] показано, что при выполнении граничного условия (1) свободные колебания затухают для всех ζ, за исключением двух указанных выше частных случаев. Граничное условие (1) является результатом линеаризации более сложных граничных условий (см., например, [4, 8, 10]).

В работе [1] изучались собственные колебания полусферической капли на подложке с эффективным краевым условием (1), а также вынужденные колебания, вызванные влиянием касательных (трансляционных) вибраций. Нелинейные осесимметричные вынужденные колебания такой капли исследовались в работе [2]. Кроме того, граничное условие (1) использовалось при изучении колебаний жидкой области [6] и затухания капиллярных волн [12].

В работе [13] исследовались собственные колебания цилиндрической капли несжимаемой жидкости, окруженной другой жидкостью и ограниченной в осевом направлении твердыми плоскостями. Для описания движения линии контакта использовалось эффективное граничное условие (1). В работе [14] изучалось поведение сжатой капли, которая в состоянии равновесия имела форму тела вращения, т. е. равновесный краевой угол не был прямым. Собственные и вынужденные осесимметричные колебания цилиндрического пузырька рассматривались в работе [15]. Влияние многочастотных возмущений на каплю и параметрическая неустойчивость цилиндрической капли с фиксированным углом контакта (предельный случай условия (1)) исследовались в работе [7].

В настоящей работе рассматриваются вынужденные осесимметричные колебания цилиндрической капли, зажатой между двумя плоскими параллельными пластинами и окруженной другой жидкостью.

Постановка задачи. Рассмотрим вынужденные колебания капли идеальной жидкости, имеющей плотность ρ_i^* и окруженной другой идеальной жидкостью плотностью ρ_e^* (индекс i соответствует капле, e — окружающей жидкости). Система ограничена двумя параллельными твердыми поверхностями (рис. 1), расстояние между которыми равно h^*. Сосуд замкнут на бесконечности. В отсутствие внешних сил капля имеет форму цилиндра радиусом R^*. Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердыми плоскостями полагается прямым. На систему оказывает воздействие вибрационное поле с амплитудой A^* и частотой ω^*. Сила вибраций направлена вдоль оси симметрии капли.

В силу симметрии задачи будем использовать цилиндрическую систему координат (r^*, α, z^*). Внешнее осесимметричное воздействие возбуждает колебания капли, не зависящие от величины азимутального угла α. Следовательно, форму поверхности капли можно задать соотношением $r^* = R^* + \zeta^*(z^*, t^*)$, где $\zeta^*(z^*, t^*)$ — функция, описывающая величину отклонения поверхности от равновесного положения.

Выберем в качестве единиц измерения следующие величины: для времени — $\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R^{*3}/\sigma}$, для радиальной координаты — R^*, для осевой координаты — h^*, для

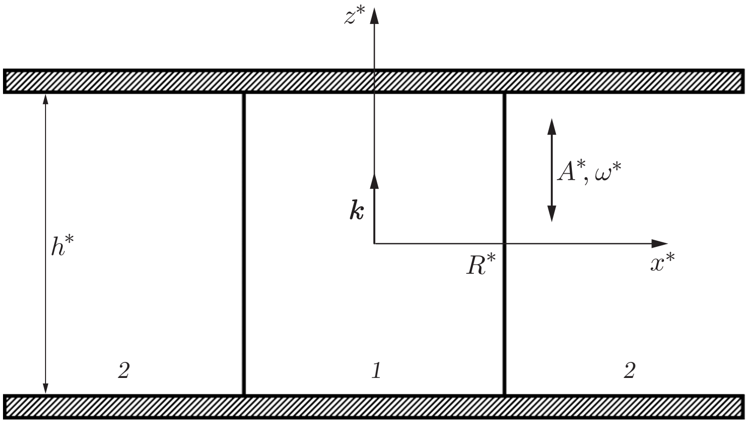

Рис. 1. Геометрия задачи:
1 — капля, *2* — окружающая жидкость

величины отклонения поверхности — A^*, для скорости — $A^*\sqrt{\sigma/((\rho_e^* + \rho_i^*)R^{*3})}$, для плотности — $\rho_e^* + \rho_i^*$, для давления — $A^*\sigma/R^{*2}$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения). Поскольку для радиального и осевого направлений выбраны разные масштабы длины, безразмерные двумерные операторы градиента ∇_2 и Лапласа Δ_2 принимают вид

$$\nabla_2 = \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{k}b\,\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \Delta_2 = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial}{\partial r}\Big) + b^2\,\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты осей r и z соответственно; $b = R^*/h^*$.

Движение жидкости полагается потенциальным: $\boldsymbol{v} = \nabla_2\varphi$, где $\boldsymbol{v}$ — безразмерная скорость жидкости; φ — безразмерный потенциал скорости. В пренебрежении вязким затуханием уравнения Бернулли (записанные в неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом) и непрерывности представим в безразмерном виде

$$p = -\rho\Big(\varphi_t + \frac{1}{2}\,\varepsilon(\nabla_2\varphi)^2 + \omega^2 z\cos(\omega t)\Big), \qquad \Delta_2\varphi = 0. \tag{2}$$

Здесь φ_t — производная по времени; p — давление; ε — малая безразмерная амплитуда вибраций. Последнее слагаемое в уравнении Бернулли (2) представляет собой плотность внешней вибрационной силы.

На бесконечности жидкость движется как твердое тело вместе с сосудом:

$$r \to \infty: \qquad \varphi \to 0. \tag{3}$$

На поверхности раздела жидкостей должны выполняться условия непрерывности нормальной компоненты скорости и баланса нормальных напряжений и кинематическое условие:

$$r = 1 + \varepsilon\zeta: \qquad [\boldsymbol{n}\cdot\nabla_2\varphi] = 0, \quad [p] = -\operatorname{div}\boldsymbol{n}, \quad F_t + \varepsilon\nabla_2\varphi\cdot\nabla_2 F = 0 \tag{4}$$

(квадратные скобки обозначают скачок величины на границе раздела между внешней жидкостью и каплей; $F = r - 1 - \varepsilon\zeta$; ζ — величина отклонения поверхности от равновесного положения; $\boldsymbol{n} = \nabla_2 F/|\nabla_2 F|$ — внешний вектор нормали к боковой поверхности капли).

Скорость движения линии контакта пропорциональна отклонению угла контакта от равновесного значения [11]:

$$r = 1 + \varepsilon\zeta, \quad z = \pm 1/2: \qquad \zeta_t = \lambda\boldsymbol{k}\cdot\nabla_2\zeta, \tag{5}$$

где λ — безразмерная постоянная Хокинга.

На твердых поверхностях задаются условия непротекания

$$z = \pm 1/2: \qquad \boldsymbol{k} \cdot \nabla_2 \varphi = 0. \tag{6}$$

Краевая задача (2)–(6) содержит шесть безразмерных параметров: малую относительную характерную амплитуду $\varepsilon = A^*/R^*$, постоянную Хокинга (параметр смачивания) $\lambda = \Lambda^* b/\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R^*/\sigma}$, частоту внешнего воздействия $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R^* h^{*2}/\sigma}$, геометрический параметр $b = R^*/h^*$, плотность внешней жидкости $\rho_e = \rho_e^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$, плотность жидкости в капле $\rho_i = \rho_i^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$, безразмерные плотности связаны соотношением $\rho_i + \rho_e = 1$.

Решение краевой задачи (2)–(6) будем искать в виде ряда по малому параметру ε:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varepsilon\varphi^{(1)} + \ldots, \qquad p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \ldots, \qquad \zeta = \zeta^{(0)} + \varepsilon\zeta^{(1)} + \ldots. \tag{7}$$

Линейные колебания. Рассмотрим вынужденные линейные колебания капли. Линеаризуем краевую задачу (2)–(6) по малому параметру ε, подставляя разложения (7) и удерживая главный порядок разложения:

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0, \qquad p^{(0)} = -\rho(\varphi_t^{(0)} + \omega^2 z \cos(\omega t)); \tag{8}$$

$$r \to \infty: \qquad \varphi^{(0)} \to 0; \tag{9}$$

$$r = 1: \qquad [\varphi_r^{(0)}] = 0, \quad \zeta_t^{(0)} = \varphi_r^{(0)}, \quad [p^{(0)}] = \zeta^{(0)} + b^2 \zeta_{zz}^{(0)}; \tag{10}$$

$$z = \pm 1/2: \qquad \varphi_z^{(0)} = 0; \tag{11}$$

$$r = 1, \quad z = \pm 1/2: \qquad \zeta_t^{(0)} = \mp\lambda\zeta_z^{(0)}. \tag{12}$$

Представляя поля потенциала скорости, давления и величины отклонения поверхности в виде

$$\varphi_{i,e}^{(0)} = \operatorname{Re}(\hat\varphi_{i,e}^{(0)}(r,z)\,\mathrm{e}^{i\omega t}), \quad p^{(0)} = \operatorname{Re}(\hat p^{(0)}(r,z)\,\mathrm{e}^{i\omega t}), \quad \zeta^{(0)} = \operatorname{Re}(\hat\zeta^{(0)}(z)\,\mathrm{e}^{i\omega t}),$$

из задачи (8)–(12) для комплексных амплитуд получаем следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\Delta\hat\varphi^{(0)} = 0, \qquad \hat p^{(0)} = -\rho(i\omega\hat\varphi^{(0)} + \omega^2 z); \tag{13}$$

$$r \to \infty: \qquad \hat\varphi^{(0)} \to 0; \tag{14}$$

$$r = 1: \qquad [\hat\varphi_r^{(0)}] = 0, \quad i\omega\hat\zeta^{(0)} = \hat\varphi_r^{(0)}, \quad [\hat p^{(0)}] = \hat\zeta^{(0)} + b^2\hat\zeta_{zz}^{(0)}; \tag{15}$$

$$z = \pm 1/2: \qquad \hat\varphi_z^{(0)} = 0; \tag{16}$$

$$r = 1, \quad z = \pm 1/2: \qquad i\omega\hat\zeta^{(0)} = \mp\lambda\hat\zeta_z^{(0)}. \tag{17}$$

С учетом граничных условий (14), (16) решение уравнения Лапласа (13) запишем в виде

$$\hat\varphi_i^{(0)}(r,z) = i\sum_{k=0}^{\infty} a_k R_k^i(r) \sin((2k+1)\pi z), \qquad \hat\varphi_e^{(0)}(r,z) = i\sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^e(r) \sin((2k+1)\pi z), \tag{18}$$

где $R_k^i(r) = I_0((2k+1)\pi br)$; $R_k^e(r) = K_0((2k+1)\pi br)$; I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя; a_k, b_k — неизвестные коэффициенты разложения, которые должны быть определены в ходе решения.

С учетом кинематического условия (15) и выражения для потенциалов скорости (18) решение для функции отклонения поверхности ζ представим в виде

$$\hat\zeta^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin((2k+1)\pi z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin((2k+1)\pi z) + d\sin\Big(\frac{z}{b}\Big), \tag{19}$$

где c_k, d — неизвестные коэффициенты разложения. Второе слагаемое (19) является частным решением условия баланса нормальных напряжений (15).

Подставляя решения (18), (19) в уравнения (13)–(17), получаем выражения для неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k, d

$$b_k = a_k \frac{R^i_{kr}(1)}{R^e_{kr}(1)}, \qquad a_k = \frac{\omega}{R^i_{kr}(1)} (c_k + f_k d); \tag{20}$$

$$c_k = \frac{\omega^2}{\Omega_k^2 - \omega^2}\left(f_k d - (\rho_i - \rho_e) \frac{\Omega_k^2 g_k}{((2k+1)\pi b)^2 - 1}\right); \tag{21}$$

$$d = \frac{\omega^2(\rho_i - \rho_e) \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k g_k \Omega_k^2}{(((2k+1)\pi b)^2 - 1)(\Omega_k^2 - \omega^2)}}{\omega^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k f_k}{\Omega_k^2 - \omega^2} + \sin\left(\dfrac{1}{2b}\right) - \dfrac{i\lambda}{\omega b} \cos\left(\dfrac{1}{2b}\right)}; \tag{22}$$

$$\Omega_k^2 = \frac{((2k+1)\pi b)^2 - 1}{\rho_i R^i_k(1)/R^i_{kr}(1) - \rho_e R^e_k(1)/R^e_{kr}(1)},$$

где Ω_k — частоты осесимметричной нечетной моды собственных колебаний цилиндрической капли [13]; $R^i_{kr}(1) = \partial I_0((2k+1)\pi br)/\partial r\big|_{r=1}$; $R^e_{kr}(1) = \partial K_0((2k+1)\pi br)/\partial r\big|_{r=1}$, f_k, g_k — коэффициенты разложения в ряд фурье-функций $\sin(z/b)$ и z по собственным функциям $\sin((2k+1)\pi z)$ соответственно.

Полученные амплитуды (20)–(22) являются комплексными при любом наборе параметров, за исключением двух предельных случаев: закрепленной линии контакта ($\lambda = 0$) и фиксированного контактного угла ($\lambda \to \infty$). Наличие затухания свободных колебаний вызвано условием на линии контакта и не зависит от вязкости. Это приводит к сдвигу фаз между различными пространственными модами колебаний и появлению бегущей волны, распространяющейся по боковой поверхности капли вдоль оси симметрии. Заметим также, что несмотря на особенность в знаменателе $\Omega_k^2 - \omega^2$, частоты Ω_k собственных колебаний цилиндрической капли не являются резонансными, за исключением предельного случая фиксированного контактного угла. При $\omega \to \Omega_k$ и конечных значениях λ из (22) получаем

$$d = (\rho_i - \rho_e) \frac{\Omega_k^2}{(2k+1)^2\pi^2 b} \sec\left(\frac{1}{2b}\right) + O(\Omega_k - \omega),$$

из (21) получаем $c_k = O(1)$.

Кроме того, существуют такие частоты внешнего воздействия, при которых

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k \Omega_k^2}{(((2k+1)\pi b)^2 - 1)(\Omega_k^2 - \omega^2)} = 0,$$

т. е. $d = 0$ и решение не зависит от постоянной Хокинга λ. В этом случае линия контакта является неподвижной,

$$c_k = -\frac{(\rho_i - \rho_e)\omega^2 \Omega_k^2 g_k}{(((2k+1)\pi b)^2 - 1)(\Omega_k^2 - \omega^2)}. \tag{23}$$

В предельном случае, когда линия контакта является свободной ($\lambda \to \infty$), $d = 0$, амплитуды c_k описываются выражением (23). При $\omega \to \Omega_k$ амплитуда k-й гармоники c_k начинает неограниченно увеличиваться и становится существенным влияние даже слабой диссипации.

В окрестности резонансной частоты $\omega \approx \Omega_k$ справедливо следующее выражение для величины отклонения поверхности:

$$\zeta^{(0)} = -A_k \sin((2k+1)\pi z)\cos(\Omega_k t + \beta_k); \tag{24}$$

$$A_k = \frac{(\rho_i - \rho_e) g_k \Omega_k^3}{2((2k+1)^2\pi^2 b^2 - 1)\sqrt{(\Omega_k - \omega)^2 + \gamma_k^2}}, \quad \operatorname{tg}\beta_k = \frac{\gamma_k}{\Omega_k - \omega}, \quad \gamma_k = \frac{2b^2\Omega_k^2}{((2k+1)^2\pi^2 b^2 - 1)\lambda}.$$

Здесь γ_k — коэффициент затухания свободных колебаний, аналогичный коэффициенту затухания собственных колебаний [2, 13]. Зависимость амплитуды и сдвига фаз колебаний от частоты в окрестности резонанса имеет вид, характерный для систем со слабой диссипацией. Из (24) следует, что при частоте Ω_k (сдвиг резонансной частоты пропорционален λ^{-2} [2, 13]) амплитуда колебаний принимает максимальное значение

$$\max(A_k) = \lambda\,\frac{(\rho_i - \rho_e) g_k \Omega_k}{4b^2}.$$

В точке резонанса амплитуда колебаний увеличивается с увеличением номера моды, коэффициент пропорциональности при большом параметре смачивания равен $\Omega_k/(2k+1)^2$. Данные выводы справедливы при $\lambda\varepsilon \ll 1$.

В предельном случае, когда линия контакта закреплена, решение определяется общими формулами (19)–(23), однако коэффициенты c_k и d являются вещественными, т. е. колебания подложки и капли происходят в одной фазе. На собственных частотах Ω_{0k} колебаний капли с закрепленной линией контакта, определяемых формулой (13) при $m = 0$ [13], амплитуда колебаний обращается в бесконечность.

При произвольных значениях параметра смачивания суммирование рядов (18), (19) проводилось численно. В расчетах удерживалось до 1000 членов ряда, установлено, что при разном количестве слагаемых результаты хорошо согласуются.

Зависимости амплитуды колебаний поверхности капли на подложке A_s и в плоскости $z = 0{,}25$ A_q от частоты вынуждающей силы приведены на рис. 2 для четырех значений параметра смачивания. Кривые имеют вид, характерный для резонансных колебаний, причем в предельных случаях $\lambda = 0$, $\lambda \to \infty$ амплитуда колебаний на резонансной частоте бесконечна (см. рис. 2,*б,в*). При конечных значениях параметра смачивания за счет диссипации при движении линии контакта амплитуда колебаний остается ограниченной.

При конечных значениях параметра смачивания вдоль поверхности распространяются капиллярные волны. На рис. 3 для различных моментов времени, измеряемого в долях периода колебаний подложки T, приведены зависимости положения гребня волны и его высоты от координаты z. Приведенные кривые соответствуют локальному максимуму, определяемому из условий $\zeta_z = 0$, $\zeta_{zz} < 0$. На рис. 4 для четырех последовательных моментов времени показано отклонение поверхности $\zeta^{(0)}$. При малых частотах ($\omega = 2$) уменьшение скорости движения гребня сопровождается значительным увеличением его высоты; решение в этой части периода подобно стоячей волне (см. рис. 4,*а*). С увеличением частоты ($\omega = 20$) вибраций появляются также волны, распространяющиеся от подложек (см. рис. 3, 4,*б*).

Нелинейные колебания. В первом порядке разложения по малому параметру ε краевая задача (2)–(6) принимает вид

$$p^{(1)} = -\rho\Big(\varphi_t^{(1)} + \frac{1}{2}\,(\varphi_r^{(0)2} + b^2\varphi_z^{(0)2})\Big) + \text{const}, \qquad \Delta\varphi^{(1)} = 0; \tag{25}$$

$$r \to \infty: \qquad \varphi^{(1)} \to 0; \tag{26}$$

$$\begin{gathered} r = 1: \qquad [\varphi_r^{(1)}] + \zeta^{(0)}[\varphi_{rr}^{(0)}] - b^2\zeta_z^{(0)}[\varphi_z^{(0)}] = 0, \quad \zeta_t^{(1)} = \varphi_r^{(1)} + \zeta^{(0)}\varphi_{rr}^{(0)} - b^2\zeta_z^{(0)}\varphi_z^{(0)}, \\ [p^{(1)}] + \zeta^{(0)}[p_r^{(0)}] = \zeta^{(1)} + b^2\zeta_{zz}^{(1)} - \zeta^{(0)2} + \frac{1}{2}\,b^2\zeta_z^{(0)2}; \end{gathered} \tag{27}$$

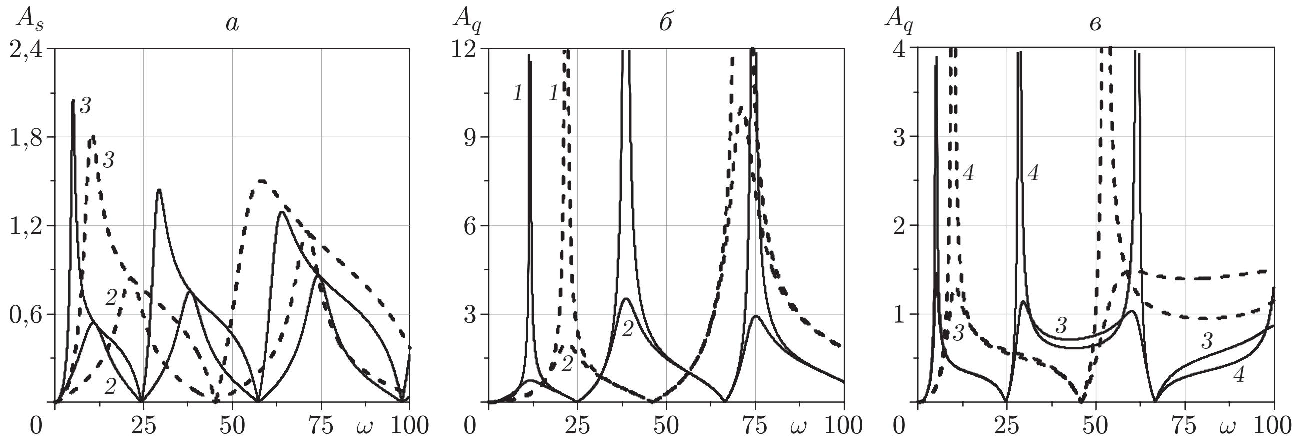

Рис. 2. Зависимость амплитуды колебаний капли на твердой поверхности (*а*) и в плоскости $z = 0{,}25$ (*б, в*) от частоты внешнего воздействия ω при $\rho_i = 0{,}7$ и различных значениях b, λ:

сплошные линии — $b = 1$, штриховые — $b = 1{,}5$; *1* — $\lambda = 0{,}01$, *2* — $\lambda = 1$, *3* — $\lambda = 10$, *4* — $\lambda = 1000$

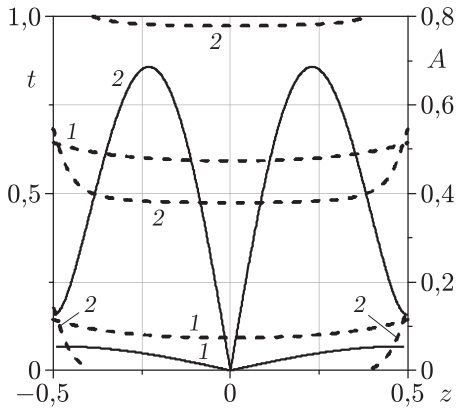

Рис. 3. Зависимости положения гребня волны (штриховые линии) и его высоты (сплошные линии) от координаты z при различных значениях ω:

1 — $\omega = 2$, *2* — $\omega = 20$

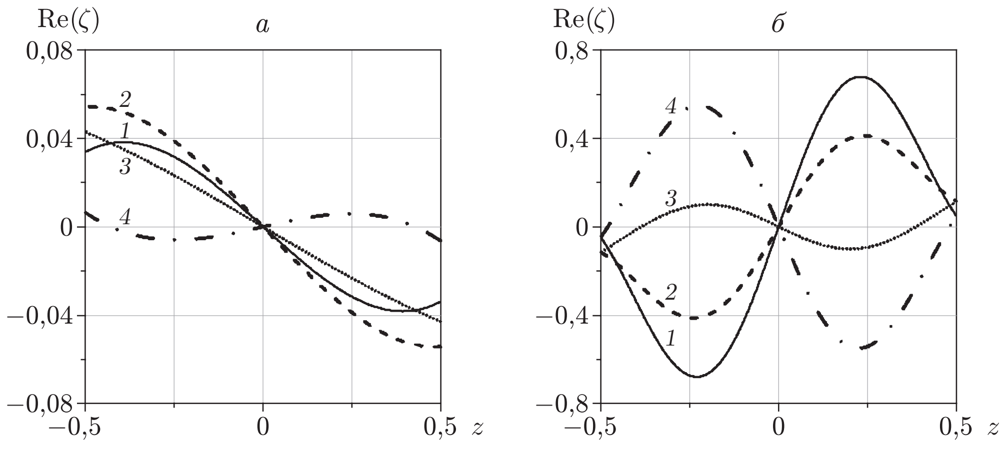

Рис. 4. Зависимость величины отклонения поверхности капли от координаты z при $\omega = 2$ (*а*), $\omega = 20$ (*б*) и различных значениях t:

1 — $t = 0$, *2* — $t = T/8$, *3* — $t = T/4$, *4* — $t = 3T/8$

$$z = \pm 1/2: \qquad \varphi_z^{(1)} = 0; \tag{28}$$

$$r = 1, \quad z = \pm 1/2: \qquad \zeta_t^{(1)} = \mp\lambda(\zeta_z^{(1)} - \zeta^{(0)}\zeta_z^{(0)}). \tag{29}$$

Пространственно однородную часть давления $\langle p^{(1)} \rangle$ и постоянную в уравнении Бернулли (25) определяем из условия сохранения объема капли

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} (1 + \varepsilon\zeta(z,t))^2 \, dz = 1. \tag{30}$$

Учитывая слагаемые до второго порядка разложения в ряд по малому параметру, из условия (29) находим часть отклонения боковой поверхности, которая не зависит от переменной z:

$$\langle \zeta^{(1)} \rangle = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \big(|C_n|^2 + \operatorname{Re}(C_n^2 \, \mathrm{e}^{2i\omega t})\big). \tag{31}$$

Краевая задача (25)–(31) содержит два типа слагаемых: осциллируемые с удвоенной частотой и стационарные. Рассмотрим нестационарное движение, описывающее нелинейные колебания капли. Введем новые обозначения для пульсационных частей потенциала скорости, давления и отклонения поверхности соответственно: $\operatorname{Re}(\psi(r,z)\,\mathrm{e}^{2i\omega t})$, $\operatorname{Re}(q(r,z)\,\mathrm{e}^{2i\omega t})$ и $\operatorname{Re}(\xi(z)\,\mathrm{e}^{2i\omega t})$.

Для комплексных амплитуд имеем следующую краевую задачу:

$$q = -\rho\Big(2i\omega\psi + \frac{1}{4}\,(\hat\varphi_r^{(0)2} + b^2\hat\varphi_z^{(0)2})\Big), \qquad \Delta\psi = 0; \tag{32}$$

$$r \to \infty: \qquad \psi \to 0; \tag{33}$$

$$\begin{gathered} r = 1: \qquad [\psi_r] = \frac{1}{2}\,(b^2\hat\zeta_z^{(0)}[\hat\varphi_z^{(0)}] - \hat\zeta^{(0)}[\hat\varphi_{rr}^{(0)}]), \quad 2i\omega\xi - \psi_r = \frac{1}{2}\,(\hat\zeta^{(0)}\hat\varphi_{rr}^{(0)} - b^2\hat\zeta_z^{(0)}\hat\varphi_z^{(0)}), \\ [q] - \xi - b^2\xi_{zz} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\,b^2\hat\zeta_z^{(0)2} - \hat\zeta^{(0)2} - \hat\zeta^{(0)}[\hat p_r^{(0)}]\Big); \end{gathered} \tag{34}$$

$$z = \pm 1/2: \qquad \psi_z = 0; \tag{35}$$

$$r = 1, \quad z = \pm 1/2: \qquad 2i\omega\xi \pm \xi_z = \pm\frac{\lambda}{2}\,\hat\zeta^{(0)}\hat\zeta_z^{(0)}. \tag{36}$$

Исходя из вида нелинейных слагаемых краевой задачи (32)–(36), условия (31) и решений линейной задачи (18), (19) пульсационную часть решения задачи (32)–(36) будем искать в виде

$$\psi_i = i\Big(a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} R_n^{(1)i}(r)\cos(2\pi n z)\Big); \tag{37}$$

$$\psi_e = i\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} R_n^{(1)e}(r)\cos(2\pi n z); \tag{38}$$

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}\cos(2\pi n z) + d_1\cos\Big(\frac{z}{b}\Big), \tag{39}$$

где $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$, $c_n^{(1)}$, d_1 — неизвестные коэффициенты разложения; $R_n^{(1)i}(r) = I_0(2\pi n b r)$; $R_n^{(1)e}(r) = K_0(2\pi n b r)$. Нелинейные слагаемые в граничных условиях (27) раскладываются в ряды по базисным функциям $\cos(2\pi n z)$:

$$\hat{\zeta}^{(0)}\hat{\varphi}_{rr}^{(0)} - b^2\hat{\zeta}_z^{(0)}\hat{\varphi}_z^{(0)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi nz); \tag{40}$$

$$\left[\frac{\rho}{2}\,(\hat{\varphi}_r^{(0)2} + b^2\hat{\varphi}_z^{(0)2})\right] - \hat{\zeta}^{(0)}[\hat{p}_r^{(0)}] - \hat{\zeta}^{(0)2} + \frac{1}{2}\,b^2\hat{\zeta}_z^{(0)2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(2\pi nz); \tag{41}$$

$$\hat{\zeta}^{(0)}[\hat{\varphi}_{rr}^{(0)}] - b^2\hat{\zeta}_z^{(0)}[\hat{\varphi}_z^{(0)}] = 2\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos(2\pi nz). \tag{42}$$

Коэффициенты разложения A_n, B_n, Q_n в рядах (40)–(42) зависят от решения линейной задачи (18)–(22) и коэффициентов разложения произведения базисных функций

$$C_{nkm} = \delta_n \int_0^{1/2} \cos((2k+1)\pi z)\cos((2m+1)\pi z)\cos(2\pi nz)\,dz,$$

$$S_{nkm} = \delta_n \int_0^{1/2} \sin((2k+1)\pi z)\sin((2m+1)\pi z)\cos(2\pi nz)\,dz,$$

$$\delta_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 4, & n \neq 0. \end{cases}$$

В явном виде выражения для коэффициентов A_n, B_n, Q_n не приводятся в силу их сложности и громоздкости.

Подставляя решения (37)–(39) в уравнения (25)–(29), для неизвестных коэффициентов разложения получаем выражения

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{2\omega\rho_i}\Big(d_1h_0 + \frac{i}{2\omega}\,A_0 - B_0\Big), \qquad c_0^{(1)} = -d_1h_0 - \frac{i}{2\omega}\,A_0; \tag{43}$$

$$b_nR_{nr}^{(1)e}(1) = a_nR_{nr}^{(1)i}(1) + iQ_n, \qquad a_n^{(1)}R_{nr}^{(1)i}(1) = 2\omega(c_n^{(1)} + d_1h_n) + iA_n; \tag{44}$$

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{\Omega_n^{(1)2} - 4\omega^2}\,(4\omega^2 d_1h_n + F_n); \tag{45}$$

$$d_1 = \frac{\dfrac{\lambda^2d_0^2}{4\omega^2b^2}\cos^2\left(\dfrac{1}{2b}\right) + i\,\dfrac{1}{2\omega}\,A_0 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Omega_n^{(1)2} - 4\omega^2}\,F_n}{\cos\left(\dfrac{1}{2b}\right) - h_0 + 4\omega^2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^nh_n}{\Omega_n^{(1)2} - 4\omega^2} + \dfrac{i\lambda}{2\omega b}\sin\left(\dfrac{1}{2b}\right)}; \tag{46}$$

$$F_n = 2i\omega A_n + \frac{B_n - 2i\omega\rho_eR_n^{(1)e}(1)Q_n/R_{nr}^{(1)e}}{(2\pi nb)^2 - 1}\,\Omega_n^{(1)2},$$

$$\Omega_n^{(1)2} = \frac{(2\pi nb)^2 - 1}{\rho_iR_k^{(1)i}(1)/R_{kr}^{(1)i}(1) - \rho_eR_k^{(1)e}(1)/R_{kr}^{(1)e}(1)},$$

где $\Omega_n^{(1)}$ — частоты осесимметричной четной моды собственных колебаний цилиндрической капли [13]; h_n — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\cos(z/b)$ по собственным функциям $\cos(2\pi nz)$; $R_{nr}^{(1)i}(1) = \partial I_0(2\pi nbr)/\partial r\big|_{r=1}$; $R_{nr}^{(1)e}(1) = \partial K_0(2\pi nbr)/\partial r\big|_{r=1}$.

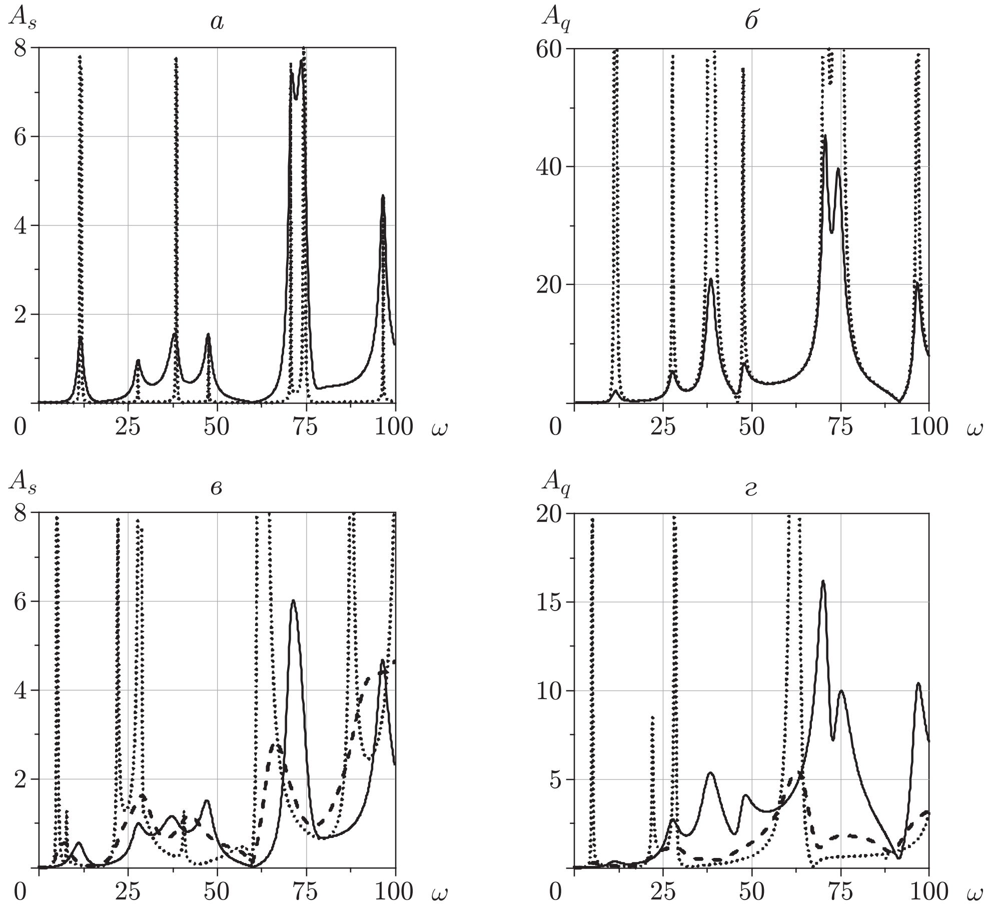

Рис. 5. Зависимость амплитуды нелинейных колебаний капли на твердой поверхности (*а, в*) и в плоскости $z = 0{,}25$ (*б, г*) от частоты ω при различных значениях λ:

а, б — сплошные линии — $\lambda = 0{,}5$, пунктирные — $\lambda = 0{,}01$; *в, г* — сплошные линии — $\lambda = 1$, штриховые — $\lambda = 5$, пунктирные — $\lambda = 100$

Таким образом, амплитуда нелинейного резонанса прямо пропорциональна параметру смачивания, т. е. диссипация на линии контакта оказывает более существенное влияние на нелинейные колебания. Заметим, что коэффициенты (43), в отличие от коэффициентов (44)–(46), не являются резонансными на четных модах собственных колебаний.

На рис. 5 приведены зависимости от частоты колебаний амплитуды колебаний линии контакта и амплитуды колебаний поверхности в плоскости $z = 0{,}25$. При $\lambda = 100$ (см. рис. 5,*в,г*) амплитуда колебаний практически неограниченно увеличивается. При этом пики, соответствующие нелинейному резонансу (второй и третий), значительно уже, чем пик, возникающий на собственной частоте колебаний капли. При уменьшении параметра смачивания этот эффект усиливается: вследствие диссипации на линии контакта нелинейные резонансы практически отсутствуют, а линейный выражен достаточно отчетливо. Аналогичная ситуация наблюдается при малых значениях λ: при $\lambda = 0{,}5$ диссипация на линии контакта (см. рис. 5,*а,б*) приводит к значительному уменьшению амплитуды нелинейного резонанса, четко выраженного при $\lambda = 0{,}01$ (см. рис. 4,*б*).

Заключение. С учетом изменений величины краевого угла рассмотрено поведение цилиндрической капли жидкости, окруженной другой жидкостью и находящейся между двумя осциллирующими твердыми поверхностями.

При изучении вынужденных колебаний обнаружены резонансные явления. Показано, что диссипация на линии контакта приводит к ограничению максимальной амплитуды колебаний в резонансе, а также к сдвигу резонансной частоты. Аналогичные явления были обнаружены при рассмотрении других задач, например гравитационно-капиллярные стоячие волны на поверхности жидкости между двумя твердыми пластинами [11], колебания жидкой зоны [6] или полусферической капли [1, 2] на подложке. Во всех случаях именно граничное условие на линии контакта приводит к затуханию колебаний. Кроме того, колебания разных частей капли сдвинуты относительно друг друга по фазе, что приводит к возникновению поверхностных волн.

Рассмотрены нелинейные колебания капли. Обнаружено, что в случае отсутствия диссипации нелинейный резонанс возникает на частотах внешнего воздействия, равных половине собственной частоты колебаний, а при наличии диссипации на линии контакта наблюдается сдвиг резонансной частоты и амплитуда колебаний является ограниченной.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Любимов Д. В., Любимова Т. П., Шкляев С. В.** Неосесимметричные колебания полусферической капли // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 6. С. 8–20.
2. **Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Shklyaev S. V.** Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. 2006. V. 18. 012101.
3. **Mugele F., Baret J.-C.** Electrowetting: from basics to applications // J. Phys.: Condens. Matter. 2005. V. 17. P. 705–774.
4. **Korenchenko A. E., Beskachko V. P.** Oscillations of a sessile droplet in open air // Phys. Fluids. 2013. V. 25. 112106.
5. **John K., Thiele U.** Self-ratcheting Stokes drops driven by oblique vibrations // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. 107801.
6. **Borkar A., Tsamopoulos J.** Boundary layer analysis of the dynamics of axisymmetric capillary bridges // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. P. 2866–2874.
7. **Алабужев А. А., Любимов Д. В.** Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 2. С. 18–28.
8. **Воинов О. В.** Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С. 76–84.
9. **Воинов О. В.** Динамические краевые углы смачивания при растекании капли на поверхности твердого тела // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 1. С. 101–107.
10. **van Lengerichal H. B., Steen P. H.** Energy dissipation and the contact-line region of a spreading bridge // J. Fluid Mech. 2012. V. 709. P. 111–141.
11. **Hocking L. M.** The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 253–266.
12. **Zhang L., Thiessen D. B.** Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines // J. Fluid Mech. 2013. V. 719. P. 295–313.
13. **Алабужев А. А., Любимов Д. В.** Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 78–86.
14. **Алабужев А. А., Любимов Д. В.** Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 1. С. 12–24.
15. **Алабужев А. А.** Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161.

Поступила в редакцию 5/V 2015 г.,
в окончательном варианте — 28/IX 2015 г.