

УДК 532.517.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ И ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ В КАНАЛЕ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЯ

А. В. Шваб, Н. А. Чинчикеева

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
634050 Томск, Россия
E-mails: avshvab@inbox.ru, chinchikeeva@gmail.com

С использованием уравнений переноса импульса вязкой несжимаемой жидкости с учетом скольжения среды на стенках моделируется нестационарное неизотермическое течение плотного слоя зернистой среды при обтекании препятствия в плоском канале. Для проверки достоверности такого подхода сопоставляются расчетные и экспериментальные данные для течения высококонцентрированной гранулированной среды с высокой сыпучестью. Исследуется влияние периодического изменения расхода гранулированной среды во времени во входном сечении плоского канала на нестационарные распределения полей скорости и температуры.

Ключевые слова: нестационарное течение, гранулированная среда, скольжение, трение, теплообмен.

DOI: 10.15372/PMTF20150620

Введение. Существенно возросший интерес к исследованию установившихся и нестационарных течений высококонцентрированных гранулированных материалов обусловлен тем, что такое движение среды встречается, например, при сходе селевых потоков, возникновении песчаных бурь и т. п. Также исследование течений высококонцентрированной зернистой среды при нестационарном режиме имеет большое значение при переработке гранулированных и порошковых материалов в химической, металлургической, пищевой и атомной промышленности. Движение зернистой среды высокой концентрации может происходить в двух режимах: первый характеризуется малыми скоростями сдвига и описывается теорией предельного равновесия [1], второй соответствует инерционному режиму с большими скоростями сдвига, который описывается так называемой теорией быстрых движений гранулированных сред [2, 3]. Экспериментальные и теоретические данные свидетельствуют о том, что движение высококонцентрированной гранулированной среды при гравитационном течении или вследствие перепада давления в пневматических аппаратах, используемых в производстве порошков, происходит в инерционном режиме [2].

При квазистатическом режиме течения внутренние напряжения возникают при наличии сухого кулоновского трения между частицами. В этом случае имеет место пластическое течение порошкообразного материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-08-00372-А).

© Шваб А. В., Чинчикеева Н. А., 2015

При инерционном режиме течения высококонцентрированной гранулированной среды частицы движутся хаотически, напряжения в такой среде возникают вследствие переноса импульса частицами зернистой среды. При таком движении тензор напряжений зависит от тензора скоростей деформаций. Основным направлением теоретических исследований динамики гранулированной среды является установление зависимостей между внутренними напряжениями и скоростями сдвига [4–7]. Результаты экспериментальных и теоретических исследований движения высококонцентрированных гранулированных сред свидетельствуют о том, что поведение такой среды подобно поведению дилатантной неньютоновской несжимаемой среды. По-видимому, отсутствие общей рациональной теории движения высококонцентрированной зернистой среды обусловлено большим разнообразием порошковых и гранулированных сред с различными физическими свойствами. Поэтому в настоящее время перспективным направлением исследований является построение математических моделей, описывающих гидродинамику плотного слоя для порошкообразных материалов, имеющих определенные физические свойства и размеры частиц.

В настоящей работе рассматривается движение высококонцентрированной гранулированной среды с высокой сыпучестью (угол естественного откоса не превышает 25°) при инерционном режиме движения. В этом случае тензор напряжений незначительно отличается от тензора напряжений ньютоновской жидкости, прежде всего вследствие скольжения гранулированной среды на стенке [8]. Также при моделировании движения гранулированных материалов необходимо решить проблему постановки граничных условий на твердой стенке. Предлагаемый полуэмпирический метод определения граничных условий на твердой поверхности, учитывающий скольжение частиц на твердой поверхности стенки, позволяет привести в соответствие расчетные и экспериментальные данные, причем учет скольжения среды по стенке наиболее важен при моделировании гидродинамики зернистых сред с высокой сыпучестью [5, 8].

1. Физическая и математическая постановка задачи. Рассматривается течение высококонцентрированной гранулированной среды в плоском канале длиной L и шириной H , внутри которого симметрично относительно стенок расположено препятствие квадратной формы с длиной стороны $H/2$ (рис. 1). Сверху в канал поступает со скоростью U_0 , периодически меняющейся во времени по гармоническому закону, высококонцентрированная зернистая среда, имеющая температуру T_0 . Обтекая препятствие, вертикаль-

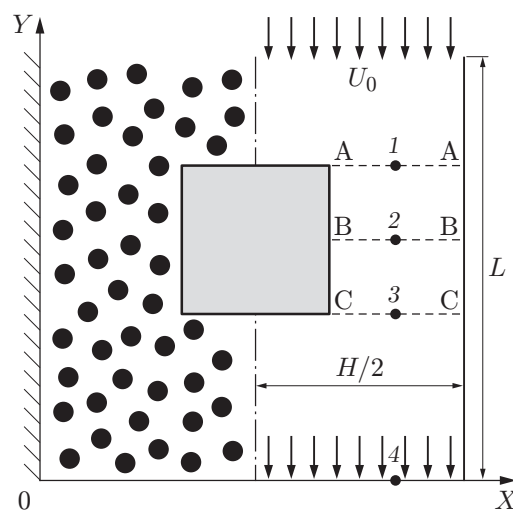


Рис. 1. Геометрия исследуемой области:
1–4 — точки, для которых представлены результаты расчетов

ные стенки которого имеют температуру $T_1 > T_0$, среда нагревается и в нижнем сечении покидает бункер. Во входном сечении ($Y = L$) распределения скорости U_0 и температуры T_0 в каждый момент времени не зависят от координаты x . Вертикальная составляющая скорости U_0 изменяется во времени по закону

$$U_0 = U_c[1 + A \sin(2\pi t/t_0)], \quad (1)$$

где A — амплитуда; t — текущее время; t_0 — период колебаний среды; U_c — среднее значение скорости за период времени t_0 во входном сечении. Стенки канала и горизонтальные поверхности препятствия считаются теплоизолированными.

Для описания движения гранулированной среды с высокой сыпучестью используем уравнения Навье — Стокса движения вязкой среды, безразмерная форма которых получена с использованием масштабов длины H , модуля средней скорости U_c и постоянной плотности среды ρ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x^2}{\partial x} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x \Theta}{\partial x} + \frac{\partial u_y \Theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Здесь

$$u_x = \frac{U_x}{U_c}, \quad u_y = \frac{U_y}{U_c}, \quad x = \frac{X}{H}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad \tau = \frac{tU_c}{H}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Re} = \frac{U_c H}{\nu},$$

α, ν — эффективные значения температуропроводности и вязкости соответственно; критерии Прандтля Pr и Рейнольдса Re используются при согласовании результатов расчета с экспериментальными данными [9].

Введя вихрь и функцию тока в соответствии с зависимостями

$$\Omega = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

систему уравнений (2)–(4) представим в эквивалентной форме

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Omega; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x \Omega}{\partial x} + \frac{\partial u_y \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right). \quad (8)$$

2. Начальные и краевые условия. В начальный момент времени $\tau = 0$ задается поле скорости, определяемое из решения стационарной задачи с использованием уравнений (7), (8). Краевые условия для нестационарной задачи такие же, как для стационарной, за исключением не зависящей от времени безразмерной вертикальной составляющей скорости во входном сечении: $u_y = -1$. В качестве начального условия для безразмерного поля температуры принимается значение $\Theta = 0$, на вертикальных стенках обтекаемого тела — условие $\Theta = 1$.

Используются следующие краевые условия, представленные в безразмерной форме. Во входном сечении ($y_0 = L/H$) в соответствии с формулой (1) имеем

$$u_{y,0} = -[1 + A \sin(2\pi\tau/\text{Ho})], \quad (9)$$

где $\text{Ho} = t_0 U_c / H$ — число гомохронности. Согласно (6), (9) распределение функции тока во входном сечении запишем в виде

$$\psi = (x - 0,5)[1 + A \sin(2\pi\tau/\text{Ho})]. \quad (10)$$

В силу симметрии задачи рассматривается правая половина плоского канала ($0,5 \leq x \leq 1,0$, $0 \leq y \leq y_0$). Поскольку скорость u_y и температура постоянны, в данном сечении для вихря имеем условие $\Omega = \Theta = 0$. На оси симметрии при $x = 0,5$ $\Omega = 0$, $\psi = 0$, $\partial\Theta/\partial x = 0$. На выходе из рассматриваемой области при $y = 0$ для искомых функций используются условия Неймана ($\partial/\partial y = 0$).

На обтекаемом препятствии $\psi = 0$, в соответствии с формулой (10) на стенке канала при $x = 1$ получаем

$$\psi = [1 + A \sin(2\pi\tau/\text{Ho})]/2.$$

Для температуры на всех стенках ставятся адиабатические условия $\partial\Theta/\partial n = 0$, на вертикальных стенках обтекаемого тела — условие $\Theta = 1$. В соответствии с уравнением (7) на стенках имеем

$$\Omega_w = (\partial^2\psi/\partial n^2)_w \quad (11)$$

(индекс w соответствует координатам стенки).

Особенностью рассматриваемой модели течения высококонцентрированной зернистой среды является новая постановка граничных условий на твердых стенках. Как правило, при моделировании течения гранулированных материалов на твердых границах используется условие прилипания среды. Однако результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что тангенциальная составляющая скорости зернистой среды с высокой сыпучестью на стенке не равна нулю [9]. В рассматриваемой модели скольжение среды на твердой поверхности учитывается с помощью зависимостей

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = -\beta u_s, \quad u_n = 0, \quad (12)$$

где n — нормаль к стенке; u_s , u_n — тангенциальная и нормальная составляющие вектора скорости на стенке соответственно; коэффициент скольжения β изменяется от нуля (условие идеального скольжения среды на стенке) до бесконечности (условие прилипания среды на твердой поверхности).

3. Метод численного решения. Уравнения системы (5), (8) решались с использованием обобщенной неявной схемы переменных направлений в дельта-форме [10]. Например, для уравнения переноса тепла эту схему можно представить со вторым порядком точности по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Theta^*}{\Delta\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [(u_x + \Delta u_x)\Delta\Theta^*] - \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial^2 \Delta\Theta^*}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(u_x + \frac{1}{2} \Delta u_x \right) \Theta \right] + \\ + \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(u_y + \frac{1}{2} \Delta u_y \right) \Theta \right] + \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\Delta\Theta^{**}}{\Delta\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [(u_y + \Delta u_y)\Delta\Theta^*] - \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial^2 \Delta\Theta^{**}}{\partial y^2} = \frac{\Delta\Theta^*}{\Delta\tau}; \quad (14)$$

$$\Theta^{n+1} = \Theta + \Delta\Theta^{**}. \quad (15)$$

Здесь сеточные значения Θ , u_x , u_y выбираются на известном временном слое n ; неизвестные значения сеточных величин Δu_x , Δu_y в уравнениях переноса вихря и тепла определяются дополнительной глобальной итерацией на каждом временном слое, уравнение (7) записывается в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^{n+1} - \Omega^{n+1}$$

и решается по схеме (13)–(15) до установления решения по фиктивному времени τ_1 на каждом временном слое. Для того чтобы увеличить скорость сходимости итерационного процесса, шаг по времени $\Delta \tau_1 = C \Delta \tau$ выбирался путем изменения постоянной C . Для конвективных и диффузионных слагаемых в уравнениях переноса использовались центрально-разностная и экспоненциальная схемы [11].

При численном решении уравнения переноса завихренности (8) необходимо знать значения вихря и тангенциальной составляющей скорости на стенке. Сеточное значение вихря на стенке можно определить, разлагая функцию тока в ряд Тейлора и используя граничное условие для вихря (11) и условие скольжения среды (12). В результате для сеточного значения вихря на стенке получаем модифицированное условие Тома

$$\Omega_w = \frac{2(\psi_{w\pm 1} - \psi_w)}{\Delta n^2} \frac{\beta \Delta n}{\beta \Delta n + 2} + O(\Delta n), \quad (16)$$

где $\psi_{w\pm 1}$ — сеточное значение функции тока в узле, расположенном на расстоянии Δn от стенки. Разностная формула (16) имеет первый порядок точности по координате. Добавляя в разложение ряда Тейлора дополнительное слагаемое более высокого порядка [12], можно получить аналогичные формулы второго порядка точности. В результате получаем модифицированное условие Вудса для вихря на стенке

$$\Omega_w = \left(\frac{3(\psi_{w\pm 1} - \psi_w)}{\Delta n^2} - \frac{\Omega_{w\pm 1}}{2} \right) \frac{\beta \Delta n}{\beta \Delta n + 3} + O(\Delta n^2).$$

Значение тангенциальной скорости на стенке также определяется из разложения функции тока в ряд Тейлора с учетом зависимостей (12), (16). В результате при $x = 1$ для стенки канала имеем соотношение

$$(u_y)_w = \frac{2(\psi_{w-1} - \psi_w)}{\Delta x(\beta \Delta x + 2)}$$

или соотношение

$$(u_y)_w = \Omega_w \frac{\Delta x}{\beta \Delta x + 2}.$$

Аналогичным образом находятся значения скоростей на стенках обтекаемого препятствия:

— на вертикальной стенке

$$(u_y)_w = \frac{2(\psi_w - \psi_{w+1})}{\Delta x(\beta \Delta x + 2)};$$

— на верхней горизонтальной стенке

$$(u_x)_w = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\Delta y(\beta \Delta y + 2)};$$

— на нижней горизонтальной стенке

$$(u_x)_w = \frac{2(\psi_w - \psi_{w-1})}{\Delta y(\beta \Delta y + 2)}.$$

Так же можно определить со вторым порядком точности значения тангенциальной составляющей скорости на стенке. Для нижней стенки квадрата получаем

$$(u_x)_w = \left(\frac{3(\psi_w - \psi_{w-1})}{\Delta y^2} + \frac{\Omega_{w-1}}{2} \right) \frac{\Delta y}{\beta \Delta y + 3} + O(\Delta y^2).$$

При численном решении учитывалось, что значения вихря и тангенциальной скорости на стенке в угловой точке квадрата терпят разрыв [12].

4. Анализ результатов. Проверилась сеточная сходимость численного решения, а также проводилось сравнение расчетных и экспериментальных данных [13] при установившемся режиме движения высококонцентрированной гранулированной среды (рис. 2). Следует отметить, что хорошее соответствие опытных и расчетных данных достигается только при определенных граничных условиях скольжения для тангенциальной составляющей скорости на стенках. Так, образование застойной области на верхней горизонтальной стороне квадрата моделируется условиями, близкими к условиям прилипания ($\beta = \beta_1 = 120$). Для лучшего согласования экспериментальных и расчетных данных значение коэффициента скольжения β на вертикальной боковой стенке квадрата принималось равным $\beta = \beta_2 = 0$, на стенке канала — $\beta = \beta_3 = 0,5$.

На рис. 2 показано распределение вертикальной составляющей скорости по горизонтальной координате x в сечениях А-А, В-В, С-С (см. рис. 1) для различных моментов

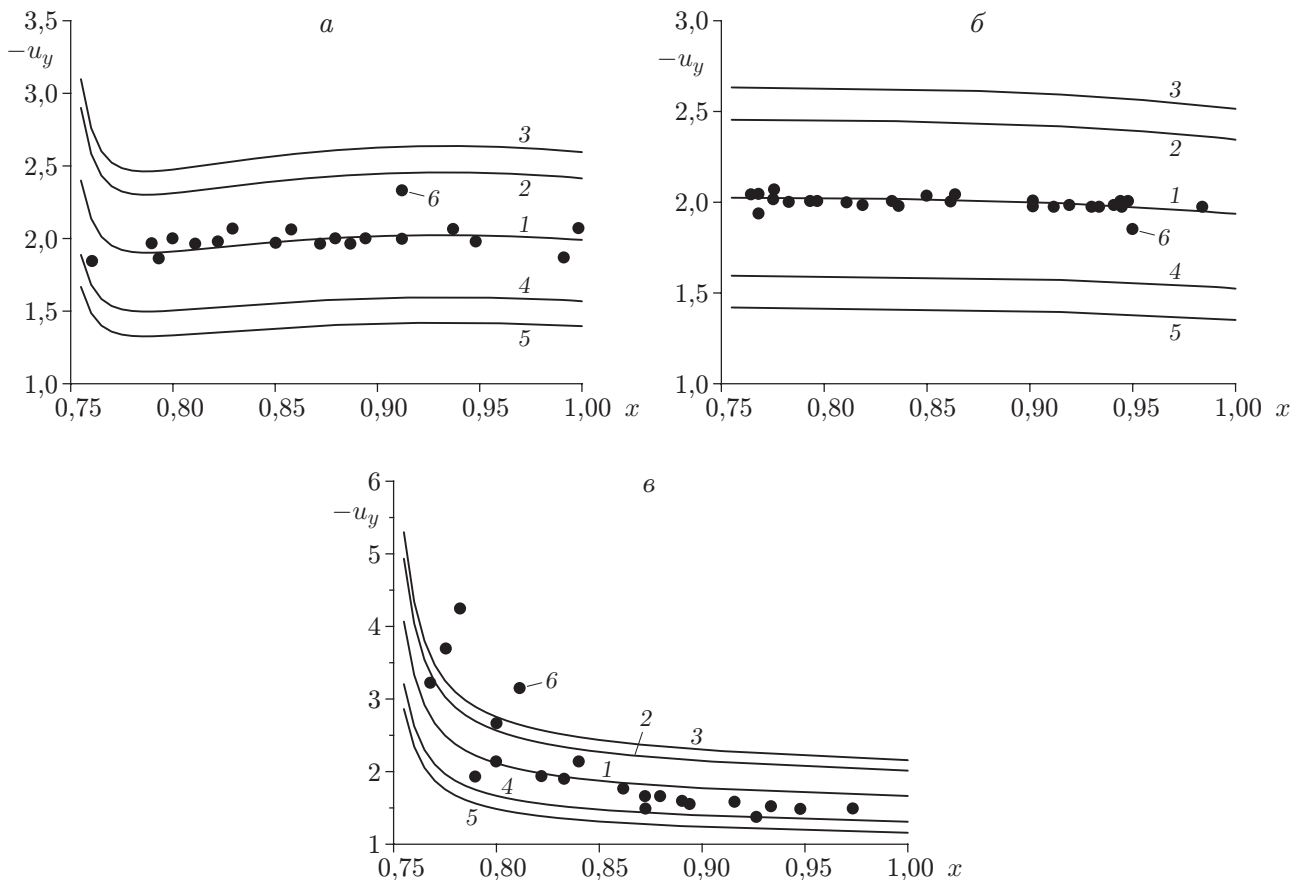


Рис. 2. Зависимости вертикальной составляющей вектора скорости в поперечных сечениях А-А (а), В-В (б), С-С (в) при $Re = 0,25$, $Pr = 10$, $Ho = 0,01$, $A = 0,3$, $\beta_1 = 120$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0,5$ в различные моменты времени: линии — расчет (1 — $t/t_0 = 11,000$; 2 — $t/t_0 = 11,125$; 3 — $t/t_0 = 11,250$; 4 — $t/t_0 = 11,375$; 5 — $t/t_0 = 11,750$); точки 6 — данные эксперимента

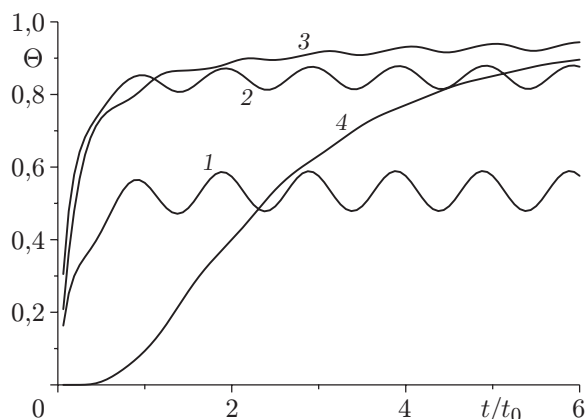


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость температуры от времени в четырех точках пространства, показанных на рис. 1, при $Re = 0,25$, $Pr = 10$, $Ho = 0,3$, $A = 0,5$, $\beta_1 = 120$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0,5$

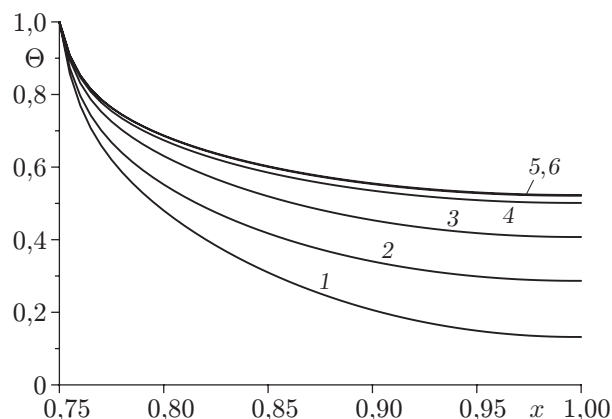


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость температуры от координаты x в поперечном сечении А–А при $Re = 0,25$, $Pr = 10$, $Ho = 0,3$, $A = 0,5$, $\beta_1 = 120$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0,5$ в различные моменты времени:

1 — $t/t_0 = 0,125$, 2 — $t/t_0 = 0,375$, 3 — $t/t_0 = 0,625$, 4 — $t/t_0 = 1,0$, 5 — $t/t_0 = 2,0$, 6 — $t/t_0 = 3,0$

времени при периодическом изменении расхода гранулированной среды во входном сечении.

На рис. 3 представлена зависимость температуры от времени в точках 1–4, показанных на рис. 1, для периодического режима движения гранулированной среды. Видно, что наибольшие колебания температуры имеют место вблизи сечения А–А (см. рис. 1) и уменьшаются вниз по потоку вследствие теплопроводности и конвективного переноса тепла. Также видно, что для точек 1–3 (см. рис. 1) выход на периодический режим осуществляется приблизительно через один период колебаний, а температура на выходе из канала (точка 4 на рис. 1, кривая 4 на рис. 3) устанавливается в течение шести периодов.

На рис. 4 приведено распределение температуры по горизонтальной координате x в сечении А–А в различные моменты времени. Наибольшие колебания температуры имеют место вблизи плоской стенки и уменьшаются в направлении обтекаемого гранулированной средой препятствия.

Заключение. Для течений высококонцентрированных гранулированных сред с высокой сыпучестью разработана математическая модель, учитывающая скольжение среды на твердых поверхностях и позволяющая получать результаты, согласующиеся с экспериментальными данными. Предложенный подход для определения поля скорости и температуры при нестационарном течении высококонцентрированной гранулированной среды может быть использован при моделировании процессов дозирования, осреднения и сушки гранулированных сред в пневматических аппаратах, применяемых в производстве порошков.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гениев Г. А.** Вопросы динамики сыпучей среды. М.: Госстройиздат, 1958.
2. **Механика** гранулированных сред. Теория быстрых движений: Сб. ст. М.: Мир, 1985.

3. **Hutter K., Rajagopal K. R.** In flows of granular materials // Contin. Mech. Thermodyn. 1994. V. 6. P. 81–139.
4. **Сэвидж С., Джеффри Д.** Тензор напряжений в потоке гранулированной среды при высоких скоростях сдвига // Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений. М.: Мир, 1985. С. 147–170.
5. **Шваб А. В., Марценко М. С.** Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2011. № 3. С. 108–116.
6. **Jenkins J. T., Savage S. B.** A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 187–202.
7. **Березин Ю. А., Сподарева Л. А.** Медленное движение гранулированного слоя по наклонной плоскости // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 117–120.
8. **Шваб А. В., Марценко М. С., Рыжих Ю. Н.** Моделирование гидродинамики и процесса усреднения высококонцентрированной гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии // Инж.-физ. журн. 2011. Т. 84, № 4. С. 676–681.
9. **Горбис З. Р.** Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия, 1970.
10. **Пейре Р.** Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Д. Тейлор. Л.: Гидрометеиздат, 1986.
11. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
12. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
13. **Неддерман Р., Девис С., Хортон Д.** Течение гранулированных материалов вокруг препятствий // Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений. М.: Мир, 1985. С. 228–241.

*Поступила в редакцию 24/IV 2014 г.,
в окончательном варианте — 22/IX 2015 г.*
