

УДК 519.676

О дисперсии оценки функционала от диффузионного процесса в области с отражающей границей*

С.А. Гусев

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

Новосибирский государственный технический университет, просп. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630073

E-mail: sag@osmf.sccc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 15, 2022.

Гусев С.А. О дисперсии оценки функционала от диффузионного процесса в области с отражающей границей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 359–369.

Рассматривается оценка функционала от диффузионного процесса в области с отражающей границей, которая получается на основе численного моделирования его траекторий. Значение этого функционала совпадает с решением в заданной точке краевой задачи третьего рода для параболического уравнения. Получена формула для предельного значения дисперсии этой оценки при убывании шага в методе Эйлера. Для уменьшения дисперсии оценки используется преобразование краевой задачи, аналогичное тому, которое ранее было предложено для случая поглощающей границы.

DOI: 10.15372/SJNM20220402

Ключевые слова: диффузионный процесс, дисперсия оценки метода Монте-Карло, стохастические дифференциальные уравнения, отражающая граница, метод Эйлера.

Gusev S.A. On the variance of the estimate of the functional of the diffusion process in a domain with a reflecting boundary // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 4. — P. 359–369.

The estimation of the functional of the diffusion process in a domain with a reflecting boundary, which is obtained on the basis of numerical modeling of its trajectories, is considered. The value of this functional coincides with the solution at a given point of a boundary value problem of the third kind for a parabolic equation. A formula is obtained for the limiting value of the variance of this estimate under decreasing step in the Euler method. To reduce the variance of the estimate, a transformation of the boundary value problem is used, similar to the one that was previously proposed in the case of an absorbing boundary.

Keywords: diffusion process, variance of the Monte Carlo method estimation, stochastic differential equations, reflecting boundary, Euler method.

1. Постановка задачи

Работа посвящена исследованию дисперсии статистической оценки решения краевой задачи третьего рода для параболического уравнения. Такие оценки получаются в результате численного моделирования траекторий диффузионных процессов с условием отражения на границе области в направлении внутренней нормали.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0251-2021-0002).

Аналогично в статье [1] рассматривались вопросы, связанные с исследованием дисперсии оценки решения краевой задачи первого рода. При решении таких задач для диффузионного процесса требуется выполнение условия поглощения на границе.

Предполагается, что задана ограниченная выпуклая область $G \subset R^d$ с достаточно гладкой границей ∂G . Пусть $x \in G$, $t \in (0, T)$. Диффузионный процесс, выходящий из точки x в момент времени t , для которого выполняется условие отражения на границе, описывается системой стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$X_s = x + \int_t^s a(v, X_v) dv + \int_t^s \sigma(v, X_v) dW_v + \int_t^s n(X_v) dK_v, \quad (1)$$

$$K_s = \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v) dK_v, \quad (2)$$

где W — винеровский процесс, а соответствующий интеграл понимается в смысле Ито; n — единичный вектор внутренней нормали; χ_A — индикаторная функция множества A ; K — скалярный возрастающий процесс, который растет только тогда, когда процесс X попадает на границу области. Процесс K называется локальным временем процесса X на ∂G . Теоретическое обоснование и численные методы аппроксимации решения СДУ типа (1), (2), а также вопросы, связанные с оценкой функционалов диффузионных процессов такого типа, можно найти, например, в работах [3–7, 9–11].

Обозначим $Q_T = (0, T) \times G$; $S_T = [0, T] \times \partial G$. Символы $E_{t,x}$, $D_{t,x}$ используются для обозначения соответственно математического ожидания и дисперсии случайных величин относительно вероятностной меры, соответствующей случайному процессу, все траектории которого выходят из точки x в момент времени t .

Пусть $c, \eta, f, \gamma : \bar{Q}_T \rightarrow R$ некоторые достаточно гладкие функции. Нам также потребуется определить случайные процессы Y , Z :

$$Y_s = \exp \left(\int_t^s c(v, X_v) dv + \int_t^s \eta(v, X_v) dK_v \right), \quad (3)$$

$$Z_s = \int_t^s f(v, X_v) Y_v dv + \int_t^s \gamma(v, X_v) Y_v dK_v. \quad (4)$$

Основным предметом исследования в данной работе являются получаемые численно статистические оценки математических ожиданий вида

$$u(t, x) = E_{t,x}(\varphi(X_T)Y_T + Z_T). \quad (5)$$

Известно, что при $(t, x) \in Q_T$ значение математического ожидания (5) совпадает со значением решения в точке (t, x) следующей краевой задачи для параболического уравнения с заданным условием при $t = T$:

$$Lu + f(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (6)$$

$$u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in G, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \eta(t, x)u + \gamma(t, x) = 0, \quad (t, x) \in S_T, \quad (8)$$

где $Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x)u$; матрица B с элементами b_{ij} удовлетворяет условию $B = \sigma \sigma^T$. Здесь и в дальнейшем знак “Т” у обозначений матриц и векторов означает их транспонирование. Заметим, что при введении замены переменной времени $t' = T - t$ задача (6)–(8) становится начально-краевой.

Для произвольной случайной величины ξ , математическое ожидание и стандартное отклонение которой равны соответственно μ_ξ и σ_ξ , введём обозначение её коэффициента вариации R_ξ , определяемого по формуле $R_\xi = \frac{\sigma_\xi}{\mu_\xi}$.

В работе [1] минимизация дисперсии осуществлялась путём минимизации выборочного значения коэффициента вариации. Для рассмотренного примера в [1] удалось на два порядка уменьшить коэффициент вариации. Но практическое использование этого метода ввиду большой трудоёмкости остаётся под вопросом.

Обозначим ϑ случайную величину под знаком математического ожидания в (5), т. е. $\vartheta = \varphi(X_T)Y_T + Z_T$. В данной работе так же, как и в [1], получена формула для дисперсии ϑ в виде математического ожидания на траекториях случайного процесса, зависящего от градиента решения краевой задачи (6)–(8), матрицы диффузии и случайного процесса (3).

Уменьшение значений этих величин в среднем приводит к уменьшению дисперсии ϑ , но это возможно только при существенном преобразовании коэффициентов случайного процесса и внесении соответствующих изменений в постановку краевой задачи (6)–(8). Так же, как и в [1], здесь предлагается перейти к решению другой краевой задачи, решение которой связано с решением исходной равенством

$$u = \tilde{u}V. \quad (9)$$

В (9) $V(x) > 0$ — некоторая функция, которую требуется определить. С использованием соотношения (9) можно перейти от (6)–(8) к краевой задаче относительно функции $\tilde{u}$ и соответствующей системе СДУ. Также вместо ϑ рассматривается случайная величина $\tilde{\vartheta} = \tilde{\varphi}(\tilde{X}_T)\tilde{Y}_T + \tilde{Z}_T$, где знак “ $\sim$ ” указывает на случайные величины и функции, изменившиеся после указанной замены.

Ясно, что вместе с изменением дисперсии оценки функционала происходит изменение значения функционала (5). Поэтому рассматриваются такие преобразования, в результате которых выполняется неравенство $R_{\tilde{\vartheta}} < R_\vartheta$. После того, как получена оценка для $\tilde{u}$, оценка для исходной задачи определяется по формуле (9).

Поскольку дисперсия оценки u зависит от нормы $\frac{\partial u}{\partial x}$, то для её уменьшения с использованием преобразования (9) следует выбирать функцию V так, чтобы в среднем по G отношение $\frac{1}{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ было по возможности меньше, чем $\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}$. Если, например, известно, какие значения принимает функция u в некоторой подобласти в G , то можно в качестве V взять функцию такую, чтобы отношение в этой подобласти u/V не зависело от x , либо его изменения были очень незначительны. Аналогичный выбор V может быть сделан, если известны значения u на границе.

Основные требования, которые налагаются в данной работе на все функции в уравнениях (1)–(8), связаны с теоремами существования единственного решения рассматриваемой системы СДУ (1), (2) (см. Н. Танака [11]) и условиями существования единственного решения краевой задачи (6)–(8) в классе $H^{\frac{3+\alpha}{2}, 3+\alpha}(\bar{Q}_T)$ ($0 < \alpha < 1$), которые даны в [2]. Поэтому будем предполагать, что:

А) G — выпуклая ограниченная область с границей $\partial G \in H^{3+\alpha}$.

Б) Матричная функция $B(t, x) = (b_{ij}(t, x))$ удовлетворяет условию регулярности, т. е. существует положительное число α_0 такое, что для произвольного вещественного вектора

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x) \nu_i \nu_j \geq \alpha_0 |\nu|^2, \quad (t, x) \in \bar{Q}_T. \quad (10)$$

В) Функции a, σ удовлетворяют равномерно по $s \in [0, T]$ при $x, y \in G$ для некоторого $L > 0$ условиям:

$$\begin{aligned} |a(s, x) - a(s, y)| &\leq L|x - y|, \quad \|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)\| \leq L|x - y|, \\ |a(s, x)| &\leq L(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\sigma(s, x)\| \leq L(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В условиях **Б** и **В** использованы обозначения: $|\cdot|$ — евклидова норма вектора, $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы.

Г) $b_{ij}, a_i, c, f \in H^{\frac{1+\alpha}{2}, 1+\alpha}(\bar{Q}_T)$, $\gamma \in H^{\frac{3+\alpha}{2}, 3+\alpha}(\bar{S}_T)$.

Д) Для задачи (6)–(8) выполнены условия согласования порядка 1.

2. Дисперсия оценки при численном моделировании диффузионного процесса

Для любой точки $x \notin G$ обозначим $\rho(x)$ её ортогональную проекцию на $\bar{G}$ и функцию $d(x)$, которая удовлетворяет равенству $x = \rho(x) + d(x)n(\rho(x))$. Так как область G выпуклая, то функции ρ и d определяются однозначно. Для точек $x \in G$ положим $\rho(x) = x$ и $d(x) = 0$.

Запишем численную схему метода Эйлера для расчёта траекторий пары процессов X и K . Для этого введём на отрезке $[t, T]$ равномерную сетку с числом узлов N и шагом h . Будем использовать следующие обозначения, соответствующие узлам $t_i = t + ih$, ($i = 0, \dots, N - 1$): x_i, k_i — моделируемые значения траектории решения системы СДУ (1), (2); $\Delta_i X, \Delta_i K$ — изменение вычисляемых значений X, K , на i -м шаге; g_i — значение $g(t_i, x_i)$ для произвольной функции $g(t, x)$.

Моделирование траекторий решения системы СДУ (1), (2) методом Эйлера осуществляется по следующей схеме:

$$X_{i+1}^\Delta = x_i + ha_i + \sqrt{h}\sigma_i\xi_i, \quad (11)$$

$$x_{i+1} = X_{i+1}^\Delta + (\Delta_i K)n_i, \quad (12)$$

$$k_{i+1} = k_i + \Delta_i K, \quad (13)$$

где $\Delta_i K = [d(X_{i+1}^\Delta)]^-, [x]^- = \max\{0, -x\}$, n_i — единичный вектор внутренней нормали в точке $\rho(X_{i+1}^\Delta)$.

Заменяя в (3), (4) интегрирование суммированием по узлам сетки, определим их сеточные аналоги y_i, z_i , заданные в точках (t_i, x_i) ($i = 0, \dots, N$):

$$y_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \exp\left(\sum_{k=0}^{i-1} (hc_k + \eta_k \chi_{\partial G}(x_k) \Delta_k K)\right), & i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (14)$$

$$z_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \sum_{k=0}^{i-1} \left(hf_k + \gamma_k \chi_{\partial G}(x_k) \Delta_k K \right) y_k, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (15)$$

Тогда применение метода Эйлера даёт аппроксимацию математического ожидания (5) в виде

$$u^N(t, x) = E_{t,x}(\varphi(x_N)y_N + z_N). \quad (16)$$

Введём обозначения: $\vartheta^N = \varphi(x_N)y_N + z_N$, $u_v = u(v, X_v)$, $\sigma_v = \sigma(v, X_v)$. В следующей теореме делается вывод формулы для дисперсии ϑ при уменьшении h .

Теорема 1. При выполнении условий **A–Д** $D_{t,x}\vartheta^N \rightarrow D_{t,x}\vartheta$, когда $N \rightarrow \infty$. При этом

$$D_{t,x}\vartheta = E_{tx} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial u_v}{\partial x} \right)^T (\sigma_v \sigma_v^T) \frac{\partial u_v}{\partial x} Y_v^2 dv \right]. \quad (17)$$

Доказательство. Представим ϑ^N следующим образом:

$$\vartheta^N = \sum_{i=0}^{N-1} (u(t_{i+1}, x_{i+1})y_{i+1} + z_{i+1} - u(t_i, x_i)y_i - z_i) + u(t, x). \quad (18)$$

Из определения $\Delta_i K$ ясно, что это есть величина порядка $O(h^{\frac{1}{2}})$.

Используя разложение u_{i+1} в точке (t_i, x_i) в ряд Тейлора до членов, содержащих производные второго порядка функции u включительно, и определение y_i , z_i , получим

$$\begin{aligned} u_{i+1}y_{i+1} + z_{i+1} = & \left(u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} h + \sum_{k=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\Delta_i X)_k + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + 2h \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_k} (\Delta_i X)_k + \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} (\Delta_i X)_k (\Delta_i X)_l \right) \right) y_i \exp(hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K) + \\ & z_i + (hf_i + \gamma_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K) y_i + O(h^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (19)$$

При достаточно малых h имеем

$$\exp(hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K) = 1 + hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K + \frac{1}{2} (hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K)^2 + O(h^{\frac{3}{2}}). \quad (20)$$

Из (19), (20) получим

$$\begin{aligned} u_{i+1}y_{i+1} + z_{i+1} - u_i y_i - z_i = & \left[u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} h + \sum_{k=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (ha_i + \sqrt{h} \sigma_i \xi_i + \Delta_i K n_i)_k + \right. \\ & \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + 2h \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_k} (ha_i + \sqrt{h} \sigma_i \xi_i + \Delta_i K n_i)_k + \right. \\ & \left. \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} (ha_i + \sqrt{h} \sigma_i \xi_i + \Delta_i K n_i)_k (ha_i + \sqrt{h} \sigma_i \xi_i + \Delta_i K n_i)_l \right) \Big] \times \\ & y_i (1 + hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K) + \\ & (hf_i + \gamma_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K) y_i - u_i y_i + O(h^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку вычисления производятся на конечном отрезке времени, случайная величина $\Delta_i K$ имеет порядок $O(h^{\frac{1}{2}})$ и математическое ожидание её ограничено, то при заданном $h > 0$ имеет место неравенство

$$\sup_{h \leq h_0} E_{t,x} K_N < \infty. \quad (22)$$

При определении порядка слагаемых, содержащих $\Delta_i K$, мы используем тот факт, что вероятность выхода моделируемой траектории из области есть величина порядка $O(h^{\frac{1}{2}})$ [8]:

$$P\{x_i \in G, X_{i+1}^\Delta \notin \bar{G}\} \leq Ch^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Перемножим скобки в (21) и удалим слагаемые, которые в сумме удовлетворяют уравнению (6) и граничному условию (8). В результате получим

$$\begin{aligned} u_{i+1}y_{i+1} + z_{i+1} - u_i y_i - z_i &= \sqrt{h} \sum_{k=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\sigma_i \xi_i)_k y_i + \\ &\quad \frac{h}{2} \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} \left[(\sigma_i \xi_i)_k (\sigma_i \xi_i)_l - (\sigma_i \sigma_i^T)_{k,l} \right] y_i + O(h^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) следует, что

$$\begin{aligned} \vartheta^N &= u(t, x) + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sqrt{h} \sum_{k=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\sigma_i \xi_i)_k y_i + \right. \\ &\quad \left. \frac{h}{2} \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} \left[(\sigma_i \xi_i)_k (\sigma_i \xi_i)_l - (\sigma_i \sigma_i^T)_{k,l} \right] y_i \right) + O(h^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда следует, что $E_{t,x} \vartheta^N = u(t, x) + O(h^{\frac{1}{2}})$. После возведения (25) в квадрат с последующим взятием математического ожидания получим

$$E_{t,x} (\vartheta^N)^2 - u(t, x)^2 = h E_{t,x} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} y_i^2 (\sigma_i \sigma_i^T)_{k,l} + O(h^{\frac{1}{2}}). \quad (26)$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, получим требуемое. Теорема доказана. $\square$

3. Преобразование краевой задачи

Будем предполагать, что решение задачи (6)–(8) принимает в области G только положительные значения. Если это не выполняется, то можно в уравнениях (6)–(8) ввести замену $u' = u + K$, где K — достаточно большая положительная константа.

В качестве преобразования, для уменьшения дисперсии, предлагается перейти к решению другой краевой задачи относительно функции $\tilde{u}$, такой что решения исходной и новой задач связаны равенством $u(t, x) = \tilde{u}(t, x)V(x)$, где $V(x) > 0$ — некоторая заданная функция. Тогда задача (6)–(8) преобразуется в следующую:

$$\tilde{L}\tilde{u} + \tilde{f}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (27)$$

$$\tilde{u}(T, x) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in G, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + \tilde{\eta}(t, x)\tilde{u} + \tilde{\gamma}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \partial S_T. \quad (29)$$

Все составные части уравнений (27)–(29) после преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{u} &\equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \tilde{a}_i(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} + \tilde{c}(t, x)\tilde{u}, \\ \tilde{a}_i &\equiv a_i + \sum_{j=1}^d b_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad \tilde{c} \equiv c + \frac{1}{V} \left(\sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad \tilde{f}(t, x) \equiv \frac{f(t, x)}{V(x)}, \\ \tilde{\varphi}(x) &\equiv \frac{\varphi(x)}{V(x)}, \quad \tilde{\eta}(t, x) \equiv \left(\eta(t, x) + \frac{1}{V(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial n} \right), \quad \tilde{\gamma}(t, x) \equiv \frac{\gamma(t, x)}{V(x)}. \end{aligned}$$

Поставим в соответствие краевой задаче (27)–(29) диффузионный процесс $\tilde{X}$, который является решением системы СДУ:

$$\tilde{X}_s = x + \int_t^s \tilde{a}(v, \tilde{X}_v) dv + \int_t^s \sigma(v, \tilde{X}_v) dW_v + \int_t^s n(\tilde{X}_v) d\tilde{K}_v, \quad (30)$$

$$\tilde{K}_s = \int_t^s \chi_{\partial G}(\tilde{X}_v) d\tilde{K}_v, \quad (31)$$

Тогда решение задачи (27)–(29) в точке (t, x) может быть определено из равенства

$$\tilde{u}(t, x) = E_{t,x}(\varphi(\tilde{X}_T) \tilde{Y}_T + \tilde{Z}_T), \quad (32)$$

где

$$\tilde{Y}_s = \exp \left(\int_t^s \tilde{c}(v, \tilde{X}_v) dv + \int_t^s \tilde{\eta}(v, \tilde{X}_v) d\tilde{K}_v \right), \quad (33)$$

$$\tilde{Z}_s = \int_t^s \tilde{f}(v, \tilde{X}_v) \tilde{Y}_v dv + \int_t^s \tilde{\gamma}(v, \tilde{X}_v) \tilde{Y}_v d\tilde{K}_v. \quad (34)$$

Из равенства (17) видно, что дисперсия оценки существенно зависит от нормы градиента решения краевой задачи и коэффициента c , и для её уменьшения преобразование краевой задачи должно быть, такой чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\tilde{u}(t, x)^2} E_{t,x} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \right)^T B \frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \tilde{Y}_v^2 dv \right] < \frac{1}{u(t, x)^2} E_{t,x} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial u_v}{\partial x} \right)^T B \frac{\partial u_v}{\partial x} Y_v^2 dv \right]. \quad (35)$$

Предложенный в [1] способ на основе метода минимизации выборочного коэффициента вариации оказался слишком трудоёмким, но в той же работе на примере показано, что неплохие результаты можно получить путём подбора функции V .

Если решение известно в некоторой подобласти G , то дисперсию можно уменьшить, выбрав функцию V , такой что отношение u/V будет меняться незначительно в этой подобласти.

4. Численные эксперименты

Для проведения численных экспериментов была взята следующая краевая задача с известным решением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + p_1(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + p_1 x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - (x_1^2 + 0.5)u + \\ \left[p_1 p_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2p_1^2 x_1 (x_1^2 + x_2^2) + 2p_1^2 x_2^3 + p_1 (32 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)(2x_1^2 + 1)/2) \right] \times \\ \exp(-p_2(T - t)) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (x_1, x_2) \in G, \quad G = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}; \end{aligned} \quad (36)$$

$$u(T, x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)p_1; \quad (37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - u + p_1 \exp(-p_2(T - t))(1 - 3(x_1^2 + x_2^2)) = 0 \quad \text{при } (t, x) \in S_T. \quad (38)$$

Точным решением задачи (36)–(38) является функция

$$u(t, x_1, x_2) = \exp(-p_2(T - t))(1 - x_1^2 - x_2^2)p_1. \quad (39)$$

В эксперименте были взяты следующие значения числовых параметров: $T = 3.5$, $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.01$, $t = 0.2$, $x = (0.01, 0.01)$. При этом значение точного решения в точке $(t, x) = (0.2, 0.01, 0.01)$ равно 0.8706. Величина шага в методе Эйлера бралась равной 10^{-6} , а объём выборки — 1000.

Было проведено сравнение результатов расчётов решения задачи без преобразования краевой задачи и с преобразованиями для нескольких вариантов функции V :

$V_1(x) = \exp(\alpha(x_1^2 + x_2^2))$ с параметром $\alpha = -1.00020004$, который был получен из равенства нулю нормы градиента функции, равной отношению точного решения u (39) к $\exp(\alpha(x_1^2 + x_2^2))$ в начальной точке диффузионного процесса $(0.01, 0.01)$;

$$V_2(x) = \exp(1 - x_1^2 - x_2^2) - 0.99;$$

$$V_3(x) = -9.9(x_1^2 + x_2^2) + 10;$$

$$V_4(x) = -19.9(x_1^2 + x_2^2) + 20;$$

$$V_5(x) = -29.9(x_1^2 + x_2^2) + 30;$$

$$V_6(x) = -39.9(x_1^2 + x_2^2) + 40;$$

$$V_7(x) = -49.9(x_1^2 + x_2^2) + 50.$$

Функциям V_i ($i = 1, \dots, 7$) соответствуют решения преобразованных краевых задач $\tilde{u}_i = \frac{u}{V_i}$. Графики проекций модулей градиентов функций $\tilde{u}_i$ на координатную плоскость $X_1 O X_2$ даны на рисунках 1–4.

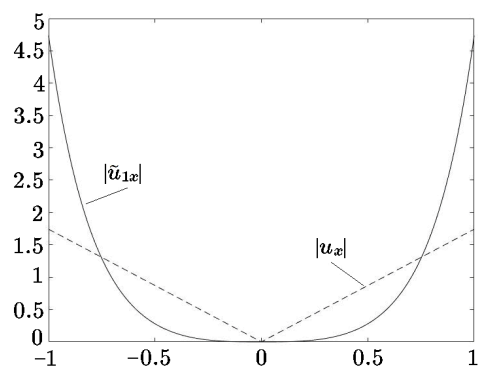


Рис. 1. Проекция на плоскость $X_1 O X_3$ $|u_x|$, $|\tilde{u}_{1x}|$

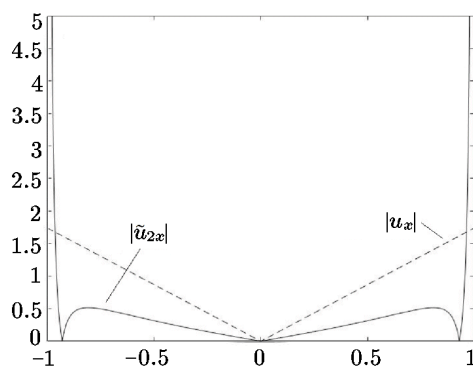


Рис. 2. Проекция на $X_1 O X_3$ $|u_x|$, $|\tilde{u}_{2x}|$

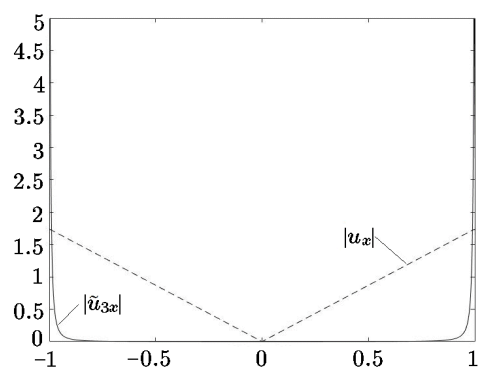


Рис. 3. Проекция на $X_1 O X_3$ $|u_x|$, $|\tilde{u}_{3x}|$

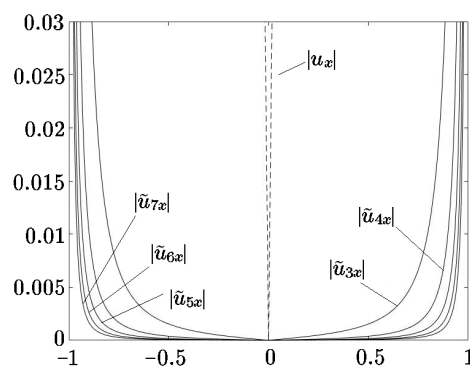


Рис. 4. Проекция на $X_1 O X_3$ $|u_x|$, $|\tilde{u}_{3x}|, \dots, |\tilde{u}_{7x}|$

Расчёты показали, что при использовании преобразований краевой задачи коэффициент вариации становится меньше по сравнению с тем, который был получен, когда преобразование не проводилось. Также видно, что с уменьшением коэффициента вариации точность получаемых оценок улучшается.

В таблице даны значения полученных коэффициентов вариации для случаев, когда не делалось преобразование краевой задачи и когда преобразования делались с функциями $V_1, \dots, V_7$, а также приведены полученные оценки решения краевой задачи с 95% доверительными интервалами.

Таблица. Результаты расчёта коэффициентов вариации и оценок решения

$\tilde{u}$	коэффициент вариации	оценка u
$u/1$	1.184858	0.838047 ± 0.062801
u/V_1	0.968462	0.894070 ± 0.054762
u/V_2	0.199809	0.880918 ± 0.011132
u/V_3	0.011424	0.880226 ± 0.000640
u/V_4	0.003084	0.875103 ± 0.000171
u/V_5	0.001003	0.873540 ± 0.000055
u/V_6	0.000502	0.872801 ± 0.000028
u/V_7	0.000302	0.872361 ± 0.000016

Выбор функции V существенно влияет на точность оценок. Функция V_1 была взята из расчёта минимизации градиента решения в начальной точке, которая удалена от границы, а при выборе функций $V_2, \dots, V_7$ учитывалось, что градиенты решений соответствующих преобразованных краевых задач на значительной части области гораздо меньше градиента решения краевой задачи, решение которой совпадает со значением исходного функционала от диффузионного процесса.

Литература

1. **Гусев С.А.** Минимизация дисперсии оценки математического ожидания функционала диффузионного процесса на основе параметрического преобразования параболической краевой задачи // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2011. — Т. 14, № 2. — С. 141–153. Перевод: Gusev S.A. Minimizing the variance of estimate of mathematical expectation of a diffusion process functional by parametric transformation of the parabolic boundary value problem // Numerical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 4, iss. 2. — P. 114–124.
2. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. Перевод: Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. — American Mathematical Society (AMS), 1968. — (Translations of Mathematical Monographs; 23).
3. **Мильтштейн Г.Н.** Применение численного интегрирования стохастических уравнений для решения краевых задач с граничными условиями Неймана // Теория вероятностей и её применения. — 1996. — Т. 41, вып. 1. — С. 210–218. Перевод: Mil'shtein G.N. Application of the numerical integration of stochastic equations to solving boundary-value problems with Neumann's boundary conditions // Theory Probab. Appl. — 1997. — Vol. 41, iss. 1. — P. 170–177.
4. **Скоруход А.В.** Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами // Теория вероятностей и её применения. — 1961. — Т. 6. — С. 287–298. Перевод: Skorokhod A.V. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region // Theory Probab. Appl. — 1961. — Vol. 6, iss. 3. — P. 264–274.
5. **Скоруход А.В.** Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами. II // Теория вероятностей и её применения. — 1962. — Т. 7. — С. 5–25. Перевод: Skorokhod A.V. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region. II // Theory Probab. Appl. — 1962. — Vol. 7, iss. 1. — P. 3–23.
6. **Bossy M., Gobet E., Talay D.** Symmetrized Euler scheme for an efficient approximation of reflected diffusions // J. Appl. Probab. — 2004. — Vol. 41, № 3. — P. 877–889.
7. **Costantini C., Pacchiarotti P., Sartoretto F.** Numerical approximation for functionals for reflected diffusion processes // SIAM J. Appl. Math. — 1998. — Vol. 58, № 1. — P. 73–102.
8. **Gobet E.** Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes // Stochastic Processes and their Applications. — 2000. — Vol. 87. — P. 167–197.
9. **Lions P.L., Sznitman A.S.** Stochastic differential equations with reflected boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math. — 1984. — Vol. 37. — P. 511–537.
10. **Saisho Y.** Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary // Probab. Theory Rel. Fields. — 1987. — Vol. 74. — P. 455–477.
11. **Tanaka H.** Stochastic differential equations with reflected boundary condition in convex regions // Hiroshima Math. J. — 1979. — Vol. 9. — P. 163–177.

Поступила в редакцию 09 февраля 2022 г.

После исправления 21 марта 2022 г.

Принята к печати 18 июля 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Gusev S.A.** Minimizatsiya dispersii otsenki matematicheskogo ozhidaniya funktsionala diffuzionnogo protsessa na osnove parametricheskogo preobrazovaniya parabolicheskoi kraevoi zadachi // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2011. — T. 14, № 2. — S. 141–153. Perevod: Gusev S.A. Minimizing the variance of estimate of mathematical expectation of a diffusion process functional by parametric transformation of the parabolic boundary value problem // Numerical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 4, iss. 2. — P. 114–124.
2. **Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.** Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa. — M.: Nauka, 1967. Perevod: Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. — American Mathematical Society (AMS), 1968. — (Translations of Mathematical Monographs; 23).
3. **Mil'shtein G.N.** Primenenie chislennogo integrirovaniya stohasticheskikh uravnenii dlya resheniya kraevykh zadach s granichnymi usloviyami Neimana // Teoriya veroyatnostei i eyo primeneniya. — 1996. — T. 41, vyp. 1. — S. 210–218. Perevod: Mil'shtein G.N. Application of the numerical integration of stochastic equations to solving boundary-value problems with Neumann's boundary conditions // Theory Probab. Appl. — 1997. — Vol. 41, iss. 1. — P. 170–177.
4. **Skorohod A.V.** Stohasticheskie uravneniya dlya protsessov diffuzii s granitsami // Teoriya veroyatnostei i eyo primeneniya. — 1961. — T. 6. — S. 287–298. Perevod: Skorokhod A.V. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region // Theory Probab. Appl. — 1961. — Vol. 6, iss. 3. — P. 264–274.
5. **Skorohod A.V.** Stohasticheskie uravneniya dlya protsessov diffuzii s granitsami. II // Teoriya veroyatnostei i eyo primeneniya. — 1962. — T. 7. — S. 5–25. Perevod: Skorokhod A.V. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region. II // Theory Probab. Appl. — 1962. — Vol. 7, iss. 1. — P. 3–23.
6. **Bossy M., Gobet E., Talay D.** Symmetrized Euler scheme for an efficient approximation of reflected diffusions // J. Appl. Probab. — 2004. — Vol. 41, № 3. — P. 877–889.
7. **Costantini C., Pacchiarotti P., Sartoretto F.** Numerical approximation for functionals for reflected diffusion processes // SIAM J. Appl. Math. — 1998. — Vol. 58, № 1. — P. 73–102.
8. **Gobet E.** Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes // Stochastic Processes and their Applications. — 2000. — Vol. 87. — P. 167–197.
9. **Lions P.L., Sznitman A.S.** Stochastic differential equations with reflected boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math. — 1984. — Vol. 37. — P. 511–537.
10. **Saisho Y.** Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary // Probab. Theory Rel. Fields. — 1987. — Vol. 74. — P. 455–477.
11. **Tanaka H.** Stochastic differential equations with reflected boundary condition in convex regions // Hiroshima Math. J. — 1979. — Vol. 9. — P. 163–177.

