

УДК 532.135; 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВРАЩЕНИЯ НА ВОЛНЫ РЭЛЕЯ — ЛЭМБА В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ДИФФУЗИИ

Р. Кумар, Т. Кансал

Университет г. Курукшетра, 136119 Курукшетра, Индия  
E-mails: rajneeshkuk@rediffmail.com, tarun1kansal@yahoo.co.in

С использованием различных теорий термоупругости с учетом сил Кориолиса и центробежных сил исследуется влияние вращения на распространение волн Рэлея — Лэмба в однородной изотропной термоупругой пластине конечной толщины при наличии диффузии. Граничными условиями являются отсутствие напряжений, теплоизолированность, изотермичность и наличие химического потенциала. Предполагается, что пластинка вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости. Получены характеристические уравнения для симметричной и асимметричной мод колебаний пластины. С помощью характеристических уравнений вычисляются фазовые скорости и коэффициенты затухания различных мод волн. Численно найдены амплитуды смещений, температура и концентрация для симметричной и асимметричной мод колебаний пластины. Результаты расчетов представлены в виде графиков.

**Ключевые слова:** распространение волн, изотропный материал, обобщенная термоупругая диффузия, вращение, фазовая скорость, коэффициент затухания.

**Введение.** Из классической несвязной теории термоупругости следуют выводы, противоречащие экспериментальным данным. Во-первых, уравнения теплопроводности в этой теории не содержат членов, учитывающих напряженно-деформированное состояние. Во-вторых, в этой теории используется уравнение теплопроводности параболического типа, которое дает бесконечные скорости распространения тепловых волн.

Для устранения первого противоречия предложена связная теория термоупругости [1]. Однако второе противоречие присутствует в обеих теориях, поскольку в связанной теории уравнение теплопроводности также является уравнением смешанного типа (параболически-гиперболическим). В теории Лорда — Шульмана [2] в закон теплопроводности Фурье вводится слагаемое, учитывающее скорость потока (с одним временем релаксации). В этой обобщенной теории предполагается, что скорость распространения тепла конечна. В теории Грина — Линдсея [3], основанной на зависимости термоупругости от скорости изменения температуры, вводятся два параметра, которые являются двумя временами релаксации. В этой теории закон теплопроводности не противоречит классическому закону теплопроводности Фурье, в случае если рассматриваемое тело имеет центр симметрии. Позднее теория обобщенной термоупругости Лорда — Шульмана [2] была распространена на случай однородных анизотропных теплопроводных материалов [4].

Во всех указанных теориях скорость теплопроводности является конечной. В [5] такая волна рассматривается как тепловое возмущение. Обзор различных теорий обобщенной термоупругости представлен в работе [6].

В настоящее время возрос интерес нефтяных компаний к изучению процесса термодиффузии, что обусловлено необходимостью более эффективной добычи нефти. Диффузия (спонтанное движение частиц из областей с высокой концентрацией вещества в области с низкой концентрацией) определяется градиентом концентрации. Термодиффузия в упругих телах обусловлена влиянием поля температур, массовой диффузии, деформации, а также тепло- и массообмена с окружающей средой.

Теория термоупругой диффузии с использованием связной термоупругой модели разработана в [7–10]. В [11, 12] рассматривались теория термодиффузии и связанные квазистационарные задачи термодиффузии в упругом слое.

Обобщенная теория термоупругой диффузии с одним временем релаксации, в которой скорость распространения волн является конечной, предложена в работе [13]. Задача о термоупругом полупространстве исследовалась в [14] в рамках теории обобщенной термоупругой диффузии с одним временем релаксации. Отражение волн от свободной поверхности упругого тела в рамках теории обобщенной термодиффузии изучалось в [15, 16]. В работах [17–21] рассматривались различные задачи для термоупругой среды при наличии диффузии. Плоские гармонические обобщенные термоупругие диффузионные волны и упруготермодиффузионные поверхностные волны в теплопроводящих телах исследованы в [22, 23]. В [24–26] с помощью различных теорий термоупругой диффузии изучены волны Рэлея и Рэлея — Лэмба.

Термоупругие плоские волны при отсутствии диссипации энергии во вращающемся теле рассматривались в работе [27]. Термоупругие плоские волны во вращающейся изотропной среде исследовались в [28]. В работе [29] с использованием обобщенной теории термоупругости с двумя временами релаксации изучено влияние вращения на плоские волны. Влияние вращения на магнито-термоупругие и обобщенные термовязкоупругие волны Рэлея — Лэмба обсуждалось в [30, 31]. В [32] изучалось влияние вращения на волны Рэлея в изотропном обобщенном термоупругом полупространстве при наличии диффузии.

В настоящей работе с использованием различных теорий термоупругости исследуются термоупругие волны при наличии диффузии в однородной изотропной вращающейся пластине. Выводятся и рассматриваются характеристические уравнения для симметричной и асимметричной мод. Вычислены фазовые скорости и коэффициенты затухания различных возможных мод волн. Получены аналитические выражения для амплитуд смещений, температуры и концентрации, а также численные результаты, которые представлены в графической форме для медной пластины. Рассмотрены некоторые частные случаи уравнения для частоты.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача термодиффузии во вращающейся однородной изотропной упругой пластине толщиной  $2H$ . Начальная температура пластины равна  $T_0$ . Начало системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  находится на срединной плоскости пластины. Плоскость  $(x_1, x_2)$  совпадает со срединной плоскостью, а ось  $x_3$  перпендикулярна ей (рис. 1). На поверхности  $x_3 = \pm H$  ставятся различные граничные условия. Пластина вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega = (0, \Omega, 0)$ . В двумерной задаче вектор смещения  $\mathbf{u}(x_1, x_3, t)$  имеет две ненулевые компоненты  $(u_1, 0, u_3)$ , температура  $T(x_1, x_3, t)$  и концентрация  $C(x_1, x_3, t)$  зависят от двух пространственных координат и времени.

Следуя [32], основные уравнения для вращающегося изотропного однородного упругого тела с использованием теории термоупругой диффузии запишем в безразмерной форме (предполагается отсутствие массовых сил, источников тепла и диффузии массы):

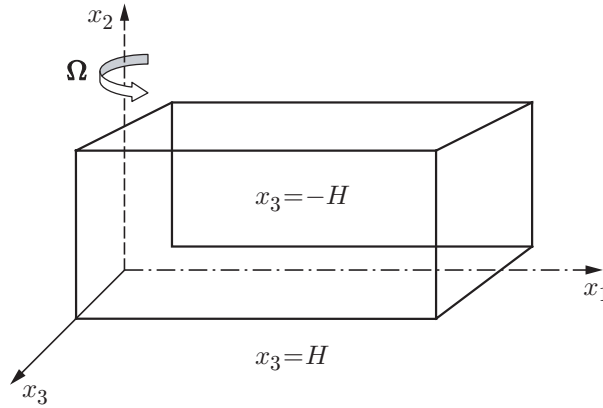


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\begin{aligned}
u_{1,11} + \delta_1 u_{1,33} + \delta_2 u_{3,13} - \tau_t^1 T_{,1} - \tau_c^1 C_{,1} &= \ddot{u}_1 - \Omega^2 u_1 + 2\Omega \dot{u}_3, \\
\delta_2 u_{1,13} + \delta_1 u_{3,11} + u_{3,33} - \tau_t^1 T_{,3} - \tau_c^1 C_{,3} &= \ddot{u}_3 - \Omega^2 u_3 - 2\Omega \dot{u}_1, \\
\nabla^2 T &= \tau_t^0 \dot{T} + \zeta_1 \tau_c^0 \dot{C} + \zeta_2 \tau_e^0 \dot{e}, \\
q_1^* \nabla^2 e + q_2^* \tau_t^1 \nabla^2 T - q_3^* \tau_c^1 \nabla^2 C + \tau_f^0 \dot{C} &= 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, & \delta_2 &= \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, & \zeta_1 &= \frac{aT_0 v_1^2 \beta_1}{w_1^* K \beta_2}, & \zeta_2 &= \frac{\beta_1^2 T_0}{\rho K w_1^*}, \\
q_1^* &= \frac{D w_1^* \beta_2^2}{\rho v_1^4}, & q_2^* &= \frac{D w_1^* \beta_2 a}{\beta_1 v_1^2}, & q_3^* &= \frac{D w_1^* b}{v_1^2}, & \tau_t^1 &= 1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}, \\
\tau_c^1 &= 1 + \tau^1 \frac{\partial}{\partial t}, & \tau_t^0 &= 1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}, & \tau_c^0 &= 1 + \gamma \frac{\partial}{\partial t}, & e &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
\tau_e^0 &= 1 + \varepsilon \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}, & \tau_f^0 &= 1 + \varepsilon \tau^0 \frac{\partial}{\partial t}, & \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}$$

**2. Решение задачи.** Решения задачи будем искать в виде

$$(u_1, u_3, T, C) = (1, W, S, R)U \exp [i\xi(x_1 \sin \theta + m x_3 - ct)], \tag{2}$$

где  $c = \omega/\xi$  — безразмерная фазовая скорость;  $\omega$  — частота;  $\xi$  — волновое число;  $\theta$  — угол наклона между нормалью к волне и осью симметрии  $x_3$ ;  $m$  — неизвестный параметр;  $1, W, S, R$  — амплитуды смещений  $u_1, u_3$ , температуры  $T$  и концентрации  $C$ , отнесенные к  $u_1$ , соответственно.

Подставляя (2) в уравнения (1), получаем

$$\begin{aligned}
\delta_1 m^2 + s^2 - c^2(1 + \Gamma^2) + (\delta_2 m s - 2i\Gamma c^2)W + i\omega^{-1} c s [\tau_t^{11} S + \tau_c^{11} R] &= 0, \\
\delta_2 m s + 2i\Gamma c^2 + (\delta_1 s^2 + m^2 - c^2(1 + \Gamma^2))W + i\omega^{-1} c m [\tau_t^{11} S + \tau_c^{11} R] &= 0, \\
\zeta_2 \tau_e^{10} s c + \zeta_2 \tau_e^{10} m c W - i\omega^{-1} [z(s^2 + m^2) + c^2 \tau_t^{10}] S - i\omega^{-1} c^2 \zeta_1 \tau_c^{10} R &= 0, \\
q_1^* (s^2 + m^2)(s + mW) - i\omega^{-1} c (s^2 + m^2) (q_2^* \tau_t^{11} S - q_3^* \tau_c^{11} R) + \omega^{-2} c^3 \tau_f^{10} R &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \Omega \omega^{-1}, & z &= i\omega, & s &= \sin \theta, & \tau_t^{11} &= 1 - i\xi c \tau_1, & \tau_c^{11} &= 1 - i\xi c \tau^1, \\
\tau_t^{10} &= 1 - i\xi c \tau_0, & \tau_c^{10} &= 1 - i\xi c \gamma, & \tau_e^{10} &= 1 - i\xi c \varepsilon \tau_0, & \tau_f^{10} &= 1 - i\xi c \varepsilon \tau^0.
\end{aligned}$$

Система уравнений (3) имеет нетривиальное решение, если детерминант системы относительно коэффициентов  $[1, W, S, R]^T$  обращается в нуль. Это условие приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$m^8 + A^*m^6 + B^*m^4 + C^*m^2 + D^* = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  зависят от физико-механических характеристик материала. Характеристическое уравнение (4) является уравнением четвертой степени относительно  $m^2$  и, следовательно, имеет четыре корня  $m_p^2$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ). Тогда формальные выражения для  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $T$ ,  $C$  имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{p=1}^4 (A_p \cos \xi m_p x_3 + B_p \sin \xi m_p x_3) \exp [i\xi(x_1 \sin \theta - ct)], \\ u_3 &= \sum_{p=1}^4 n_{1p} (A_p \cos \xi m_p x_3 + B_p \sin \xi m_p x_3) \exp [i\xi(x_1 \sin \theta - ct)], \\ T &= \sum_{p=1}^4 n_{2p} (A_p \cos \xi m_p x_3 + B_p \sin \xi m_p x_3) \exp [i\xi(x_1 \sin \theta - ct)], \\ C &= \sum_{p=1}^4 n_{3p} (A_p \cos \xi m_p x_3 + B_p \sin \xi m_p x_3) \exp [i\xi(x_1 \sin \theta - ct)], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_p$ ,  $B_p$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) — произвольные константы. Выражения для коэффициентов  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  в (4), а также для коэффициентов связи  $n_{1p}$ ,  $n_{2p}$ ,  $n_{3p}$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) в (5) вследствие громоздкости не приводятся.

**3. Граничные условия.** На поверхности  $x_3 = \pm H$  пластины заданы следующие краевые условия:

— равенство нулю напряжений на поверхностях

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (\delta_2 - \delta_1)u_{1,1} + u_{3,3} - \tau_t^1 T - \tau_c^1 C = 0, \\ \sigma_{31} &= \delta_1(u_{3,1} + u_{1,3}) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

— закон теплопроводности

$$T_{,3} + hT = 0, \quad (7)$$

где  $h$  — коэффициент теплопереноса на поверхности ( $h \rightarrow 0$  соответствует теплоизолированным границам,  $h \rightarrow \infty$  — изотермическим границам);

— условия для химического потенциала

$$P = u_{1,1} + u_{3,3} - n_2 \tau_c^1 C + n_1 \tau_t^1 T = 0, \quad (8)$$

где

$$n_1 = a(\lambda + 2\mu)/(\beta_1\beta_2), \quad n_2 = b(\lambda + 2\mu)/\beta_2^2.$$

**4. Вывод характеристических уравнений.** Подставляя значения  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $T$ ,  $C$  из (5) в граничные условия (6)–(8) на поверхностях  $x_3 = \pm H$ , получаем систему восьми уравнений. Для того чтобы существовало нетривиальное решение этой системы уравнений, детерминант коэффициентов амплитуды должен быть равен нулю. Выполнив большое количество алгебраических преобразований, получаем следующие характеристические уравнения:

$$R_1^* \left[ \frac{T_2}{T_3} \right]^{\pm 1} + R_2^* + R_3^* \left[ \frac{T_4}{T_3} \right]^{\pm 1} + R_4^* \left[ \frac{T_2}{T_1} \right]^{\pm 1} + R_5^* \left[ \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} \right]^{\pm 1} + R_6^* \left[ \frac{T_4}{T_1} \right]^{\pm 1} = 0 \quad (9)$$

для пластины с изолированными границами в отсутствие напряжений ( $h \rightarrow 0$ ) и

$$P_1^* \left[ \frac{T_2}{T_3} \right]^{\mp 1} + P_2^* + P_3^* \left[ \frac{T_4}{T_3} \right]^{\mp 1} + P_4^* \left[ \frac{T_2}{T_1} \right]^{\mp 1} + P_5^* \left[ \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} \right]^{\mp 1} + P_6^* \left[ \frac{T_4}{T_1} \right]^{\mp 1} = 0 \quad (10)$$

для пластины с изотермическими границами в отсутствие напряжений ( $h \rightarrow \infty$ ). В (9), (10)

$$\begin{aligned} T_p &= \operatorname{tg} \xi m_p H, & p &= 1, 2, 3, 4, \\ R_1^* &= m_1 m_2 [(n_{11} n_{22} - n_{21} n_{12})(P_3 n_{14} - P_4 n_{13})], & R_2^* &= m_1 m_3 [(n_{11} n_{23} - n_{21} n_{13})(P_4 n_{12} - P_2 n_{14})], \\ R_3^* &= m_1 m_4 [(n_{11} n_{24} - n_{21} n_{14})(P_2 n_{13} - P_3 n_{12})], & R_4^* &= m_2 m_3 [(n_{12} n_{23} - n_{22} n_{13})(P_1 n_{14} - P_4 n_{11})], \\ R_5^* &= m_2 m_4 [(n_{22} n_{14} - n_{12} n_{24})(P_1 n_{13} - P_3 n_{11})], & R_6^* &= m_3 m_4 [(n_{13} n_{24} - n_{23} n_{14})(P_1 n_{12} - P_2 n_{11})], \\ P_1^* &= m_1 m_2 [(n_{12} - n_{11})(P_3 n_{24} - P_4 n_{23})], & P_2^* &= m_1 m_3 [(n_{11} - n_{13})(P_2 n_{24} - P_4 n_{22})], \\ P_3^* &= m_1 m_4 [(n_{14} - n_{11})(P_2 n_{23} - P_3 n_{22})], & P_4^* &= m_2 m_3 [(n_{13} - n_{12})(P_1 n_{24} - P_4 n_{21})], \\ P_5^* &= m_2 m_4 [(n_{12} - n_{14})(P_1 n_{23} - P_3 n_{21})], & P_6^* &= m_3 m_4 [(n_{14} - n_{13})(P_1 n_{22} - P_2 n_{21})], \\ P_p &= i \xi s (\delta_2 - \delta_1) - \tau_t^{11} n_{2p} - \tau_c^{11} n_{3p}, & p &= 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

верхний индекс  $+1$  соответствует асимметричной моде волн,  $-1$  — симметричной моде. Уравнения (9), (10) являются характеристическими уравнениями для волн Рэлея — Лэмба в изотропной термоупругой пластине в случае термоизолированных и изотермических границ при отсутствии напряжений и при наличии химического потенциала, диффузии и вращения. Эти характеристические уравнения содержат всю информацию о фазовой скорости, волновом числе и коэффициенте затухания волн Рэлея — Лэмба в такой среде. В общем случае волновое число, а значит, и фазовая скорость волн являются комплексными величинами, следовательно, волны затухают по пространственным переменным.

**5. Амплитуды смещений, температуры и концентрации.** Ниже приведены выражения для амплитуды смещений, температуры и концентрации в случае симметричной и асимметричной мод:

$$\begin{aligned} ((u_1)_{sym}, (u_1)_{asym}) &= \sum_{p=1}^4 (A_p \cos \xi m_p x_3, B_p \sin \xi m_p x_3) \exp [i \xi (x_1 \sin \theta - ct)], \\ ((u_3)_{sym}, (u_3)_{asym}) &= \sum_{p=1}^4 n_{1p} (B_p \sin \xi m_p x_3, A_p \cos \xi m_p x_3) \exp [i \xi (x_1 \sin \theta - ct)], \\ ((T)_{sym}, (T)_{asym}) &= \sum_{p=1}^4 n_{2p} (A_p \cos \xi m_p x_3, B_p \sin \xi m_p x_3) \exp [i \xi (x_1 \sin \theta - ct)], \\ ((C)_{sym}, (C)_{asym}) &= \sum_{p=1}^4 n_{3p} (A_p \cos \xi m_p x_3, B_p \sin \xi m_p x_3) \exp [i \xi (x_1 \sin \theta - ct)]. \end{aligned}$$

Выражения для амплитуд  $A_p, B_p$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) вследствие громоздкости не приводятся.

**6. Частные случаи.** Рассмотрим следующие частные случаи.

1. В отсутствие вращения ( $\Omega = 0$ ) в случае изотропного обобщенного термоупругого тела с учетом диффузии получаем следующие частотные уравнения:

$$M_1^* \left[ \frac{T_2}{T_3} \right]^{\pm 1} + M_2^* + M_3^* \left[ \frac{T_4}{T_3} \right]^{\pm 1} + M_4^* \left[ \frac{T_2}{T_1} \right]^{\pm 1} + M_5^* \left[ \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} \right]^{\pm 1} + M_6^* \left[ \frac{T_4}{T_1} \right]^{\pm 1} = 0$$

для пластины с изолированными границами в отсутствие напряжений ( $h \rightarrow 0$ ) и

$$N_1^* \left[ \frac{T_2}{T_3} \right]^{\mp 1} + N_2^* + N_3^* \left[ \frac{T_4}{T_3} \right]^{\mp 1} + N_4^* \left[ \frac{T_2}{T_1} \right]^{\mp 1} + N_5^* \left[ \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} \right]^{\mp 1} + N_6^* \left[ \frac{T_4}{T_1} \right]^{\mp 1} = 0$$

для пластины с изотермическими границами в отсутствие напряжений ( $h \rightarrow \infty$ ). Здесь

$$M_1^* = m'_1 m'_2 [(n'_{11} n'_{22} - n'_{21} n'_{12})(P'_3 n'_{14} - P'_4 n'_{13})],$$

$$M_2^* = m'_1 m'_3 [(n'_{11} n'_{23} - n'_{21} n'_{13})(P'_4 n'_{12} - P'_2 n'_{14})],$$

$$M_3^* = m'_1 m'_4 [(n'_{11} n'_{24} - n'_{21} n'_{14})(P'_2 n'_{13} - P'_3 n'_{12})],$$

$$M_4^* = m'_2 m'_3 [(n'_{12} n'_{23} - n'_{22} n'_{13})(P'_1 n'_{14} - P'_4 n'_{11})],$$

$$M_5^* = m'_2 m'_4 [(n'_{22} n'_{14} - n'_{12} n'_{24})(P'_1 n'_{13} - P'_3 n'_{11})],$$

$$M_6^* = m'_3 m'_4 [(n'_{13} n'_{24} - n'_{23} n'_{14})(P'_1 n'_{12} - P'_2 n'_{11})],$$

$$N_1^* = m'_1 m'_2 [(n'_{12} - n'_{11})(P'_3 n'_{24} - P'_4 n'_{23})], \quad N_2^* = m'_1 m'_3 [(n'_{11} - n'_{13})(P'_2 n'_{24} - P'_4 n'_{22})],$$

$$N_3^* = m'_1 m'_4 [(n'_{14} - n'_{11})(P'_2 n'_{23} - P'_3 n'_{22})], \quad N_4^* = m'_2 m'_3 [(n'_{13} - n'_{12})(P'_1 n'_{24} - P'_4 n'_{21})],$$

$$N_5^* = m'_2 m'_4 [(n'_{12} - n'_{14})(P'_1 n'_{23} - P'_3 n'_{21})], \quad N_6^* = m'_3 m'_4 [(n'_{14} - n'_{13})(P'_1 n'_{22} - P'_2 n'_{21})],$$

$$P'_p = i\xi s(\delta_2 - \delta_1) - \tau_t^{11} n'_{2p} - \tau_c^{11} n'_{3p}, \quad p = 1, 2, 3, 4.$$

Корни  $m'_p$  и константы связи  $n'_{qp}$  ( $q = 1, 2, 3, p = 1, 2, 3, 4$ ) получаются из выражений для  $m_p, n_{qp}$  при  $\Omega = 0$ .

2. В отсутствие диффузии ( $a = b = \beta_2 = 0$ ) для изотропного обобщенного тела с учетом вращения получаем уравнения для частоты

$$U_1^* \left[ \frac{T_1}{T_3} \right]^{\pm 1} - U_2^* \left[ \frac{T_2}{T_3} \right]^{\pm 1} + U_3^* = 0, \quad V_1^* \left[ \frac{T_1}{T_3} \right]^{\mp 1} - V_2^* \left[ \frac{T_2}{T_3} \right]^{\mp 1} + V_3^* = 0,$$

где

$$U_1^* = m''_1 m'_{21} (L_2^* m'_{13} - L_3^* m'_{12}), \quad U_2^* = m''_2 m'_{22} (L_1^* m'_{13} - L_3^* m'_{11}),$$

$$U_3^* = m''_3 m'_{23} (L_1^* m'_{12} - L_2^* m'_{11}),$$

$$V_1^* = m''_1 (L_2^* m'_{23} - L_3^* m'_{22}), \quad V_2^* = m''_2 (L_1^* m'_{23} - L_3^* m'_{21}), \quad V_3^* = m''_3 (L_1^* m'_{22} - L_2^* m'_{21}),$$

$$L_p^* = i\xi s(\delta_2 - \delta_1) - \tau_t^{11} m'_{2p}, \quad p = 1, 2, 3.$$

Константы связи  $m'_{qp}$  можно получить из выражений для  $n_{qp}$  ( $q = 1, 2, p = 1, 2, 3$ ) при  $a = b = \beta_2 = 0$ .

Полученные результаты хорошо согласуются с данными работы [31].

**7. Результаты численных расчетов и их обсуждение.** При выполнении численных расчетов рассматривалась медная пластина. Медь является изотропным материалом. Ниже приведены физические характеристики монокристалла меди [14]:  $\lambda = 7,76 \cdot 10^{10}$  кг/(м·с<sup>2</sup>),  $\mu = 3,86 \cdot 10^{10}$  кг/(м·с<sup>2</sup>),  $T_0 = 293$  К,  $C_E = 383,1$  Дж/(кг·К),  $\alpha_t = 1,78 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>,  $\alpha_c = 1,98 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/кг,  $a = 1,2 \cdot 10^4$  м<sup>2</sup>/(с<sup>2</sup>·К),  $b = 9 \cdot 10^5$  м<sup>5</sup>/(кг·с),  $D = 0,85 \cdot 10^{-8}$  кг·с/м<sup>3</sup>,  $\rho = 8,954 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $K = 383$  Вт/(м·К),  $\Omega = 0,1$  Гц,  $\tau_0 = 0,01$  с,  $\tau_1 = 0,07$  с,  $\tau^0 = 0,02$  с,  $\tau^1 = 0,08$  с.

В общем случае волновое число и фазовая скорость волн являются комплексными величинами, следовательно, волны затухают по пространственным координатам. Если

$$c^{-1} = V^{-1} + i\omega^{-1}F, \quad (11)$$

то  $\xi = E + iF$  ( $E = \omega/V$  и  $F$  — действительные числа). Таким образом,  $V$  — скорость распространения волн,  $F$  — коэффициент затухания волн. Используя представление (11)

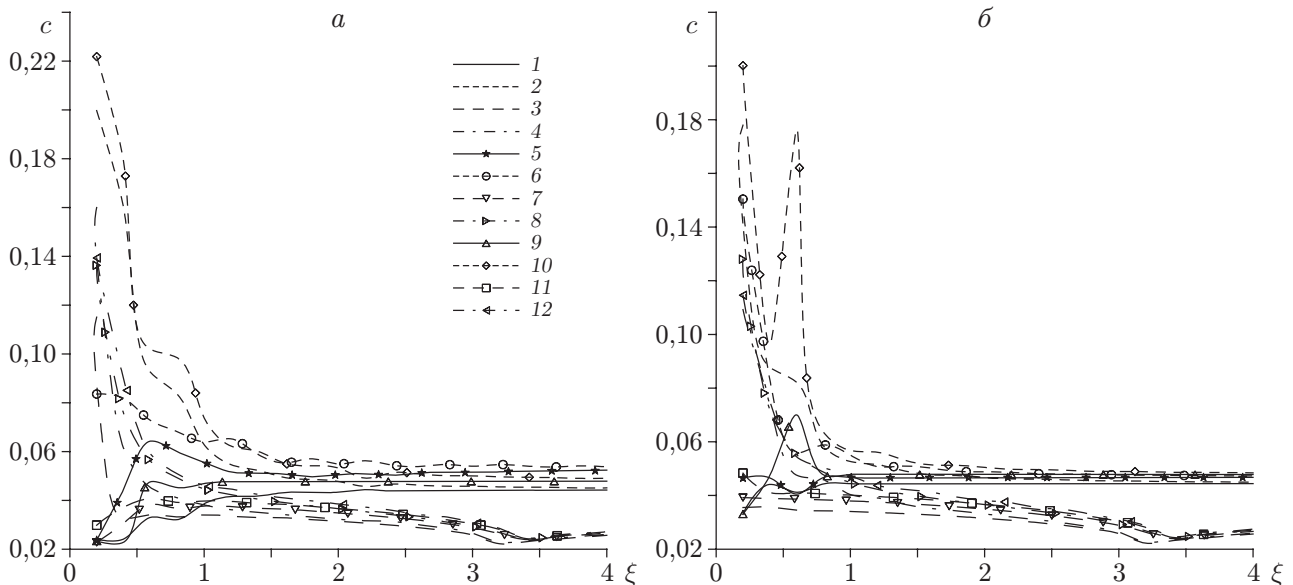


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости от волнового числа:

*a* — симметричная мода, *б* — асимметричная мода; 1–4 — расчет по СТ, 5–8 — расчет по теории Л–Ш, 9–12 — расчет по теории Г–Л; 1, 2, 5, 6, 9, 10 — в отсутствие вращения, 3, 4, 7, 8, 11, 12 — при наличии вращения; 1, 3, 5, 7, 9, 11 — данные для первой моды, 2, 4, 6, 8, 10, 12 — данные для второй моды

в характеристических уравнениях (9), (10), можно найти значения скорости распространения  $V$  и коэффициент затухания  $F$  волн.

7.1. *Фазовая скорость и коэффициент затухания.* На рис. 2 показаны зависимости фазовой скорости от волнового числа для первой и второй мод при  $\theta = 75^\circ$ , полученные с использованием различных теорий термоупругой диффузии: связанной теории (СТ), теории Лорда — Шульмана (Л–Ш) и теории Грина — Линдсея (Г–Л). На рис. 2, *a* видно, что для первой моды при наличии угловой скорости  $\Omega$  значения фазовой скорости, полученные с использованием всех трех теорий, медленно и монотонно убывают (за исключением небольшой области). Значения фазовой скорости, полученные с использованием СТ, меньше аналогичных значений, полученных с использованием теорий Л–Ш и Г–Л, причем значения фазовой скорости, полученные с использованием теории Л–Ш, больше значений фазовой скорости, полученных с использованием теории Г–Л. Для второй моды получены аналогичные результаты. Однако сравнение результатов расчетов для первой и второй мод показывает, что значения фазовой скорости, соответствующие второй моде, больше значений фазовой скорости, соответствующих первой моде. Аналогичные результаты наблюдаются в случае асимметричной моды.

На рис. 3 показаны зависимости коэффициента затухания от волнового числа для симметричной и асимметричной мод. С увеличением угловой скорости значения коэффициента затухания, полученные с использованием СТ и теории Г–Л, уменьшаются, в то время как согласно теории Л–Ш эти коэффициенты с увеличением угловой скорости увеличиваются. Отметим, что кривые, соответствующие коэффициентам затухания, полученным с использованием СТ, лежат между кривыми, полученными с использованием теорий Л–Ш и Г–Л. В случае второй моды значения коэффициента затухания уменьшаются быстрее, чем в случае первой моды.

Зависимость фазовой скорости от волнового числа в случае термоупругих волн при наличии диффузии во вращающейся пластине для первой и второй мод показана на рис. 4

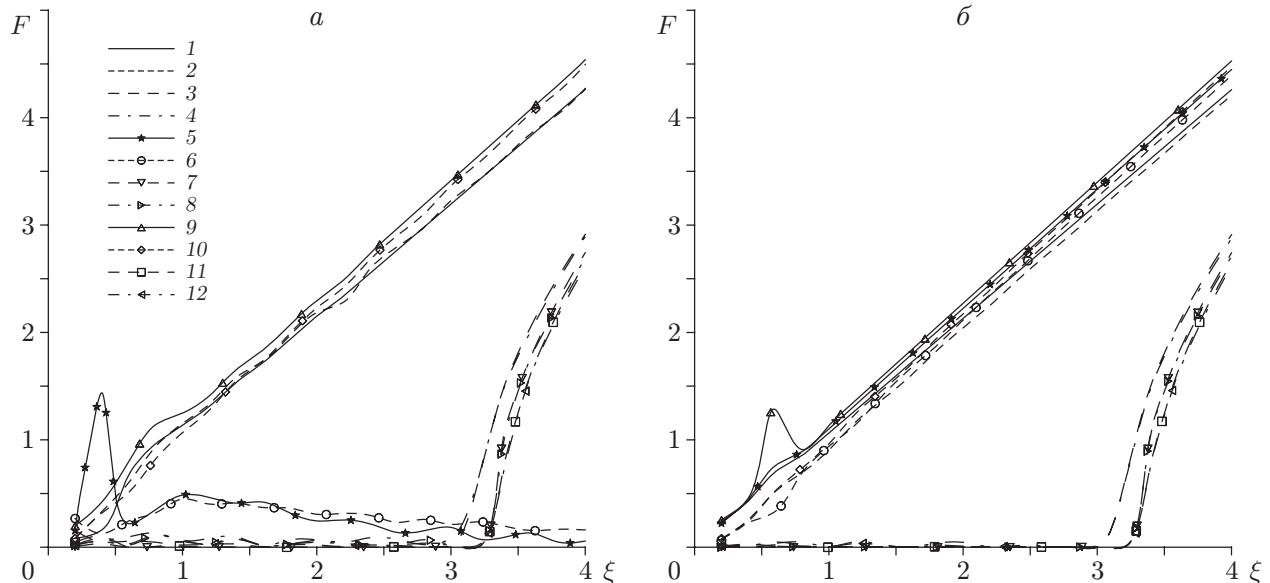


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания от волнового числа (обозначения те же, что на рис. 2)

при различных значениях  $\theta$  и фиксированном значении  $\Omega = 0,1$ . На рис. 4, *a* видно, что при изменении угла  $\theta$  от  $75^\circ$  до  $90^\circ$  значения фазовой скорости, полученные с использованием СТ и теории Г–Л, уменьшаются на большую величину, чем при использовании теории Л–Ш. Значения фазовой скорости, соответствующие первой моде, больше аналогичных значений, соответствующих второй моде. Эти результаты качественно согласуются с результатами, полученными в случае асимметричной моды. Зависимость коэффициента затухания от волнового числа для симметричной и асимметричной мод показана на рис. 5. Значения коэффициента затухания возрастают с увеличением угла, причем для второй моды значения коэффициента затухания меньше, чем для первой моды.

7.2. *Амплитуды.* На рис. 6–9 представлены зависимости амплитуд смещения  $u_1$ ,  $u_3$ , температуры  $T$  и концентрации  $C$  от толщины пластины  $H$  для симметричной и асимметричной мод при  $\theta = 75^\circ$ . На рис. 7, *a*, 8, *a* значения  $u_3$  и  $T$  увеличены соответственно в  $10^{11}$  и  $10^5$  раз, на рис. 6, *б*, 7, *б*, 8, *б*, 9, *б* значения  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $T$  и  $C$  увеличены в 10,  $10^{15}$ ,  $10^2$  и  $10^3$  раз соответственно.

На рис. 6, *a* видно, что в соответствии с тремя рассматриваемыми теориями с увеличением угловой скорости значения  $u_1$  сначала увеличиваются. Однако затем значения  $u_1$  начинают уменьшаться.

Кривые  $u_1(H)$ , полученные с использованием СТ, лежат между кривыми, полученными с использованием теорий Г–Л и Л–Ш. На рис. 6, *б*, на котором приведены результаты расчетов для асимметричной моды, видно, что значения  $u_1$  колеблются с увеличением угловой скорости. В отсутствие вращения и при наличии вращения значения  $u_1$ , полученные с использованием СТ, больше аналогичных значений, полученных с помощью теории Л–Ш, но меньше значений, полученных с использованием теории Г–Л. Значения  $u_3$  колеблются как в случае симметричной, так и в случае асимметричной моды. Колебания этих значений уменьшаются с увеличением угловой скорости.

На рис. 8, *a* видно, что значения  $T$  уменьшаются и в отсутствие вращения, и при его наличии. Значения  $T$ , полученные с использованием СТ, больше аналогичных значений, полученных с помощью теории Л–Ш, но меньше значений, полученных с использованием теории Г–Л. На рис. 8, *б* видно, что значения  $T$  сначала увеличиваются, а затем уменьша-



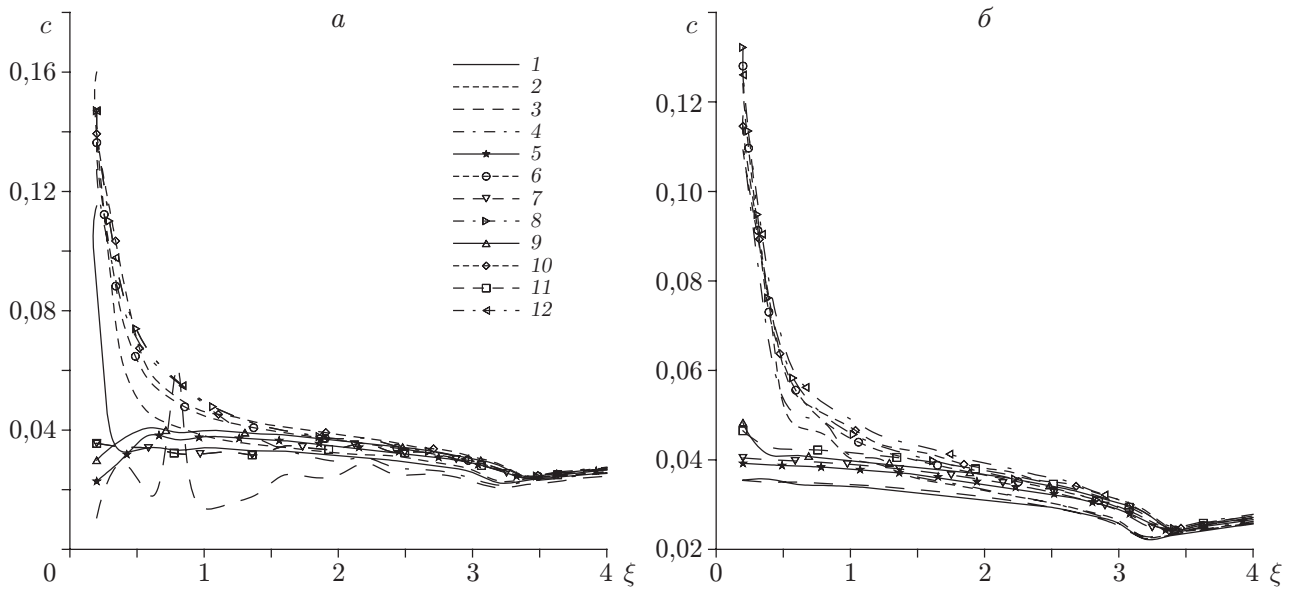


Рис. 4. Зависимость фазовой скорости от волнового числа:

*a* — симметричная мода, *б* — асимметричная мода; 1–4 — расчет по СТ, 5–8 — расчет по теории Л–Ш, 9–12 — расчет по теории Г–Л; 1, 2, 5, 6, 9, 10 —  $\theta = 75^\circ$ , 3, 4, 7, 8, 11, 12 —  $\theta = 90^\circ$ ; 1, 3, 5, 7, 9, 11 — данные для первой моды, 2, 4, 6, 8, 10, 12 — данные для второй моды

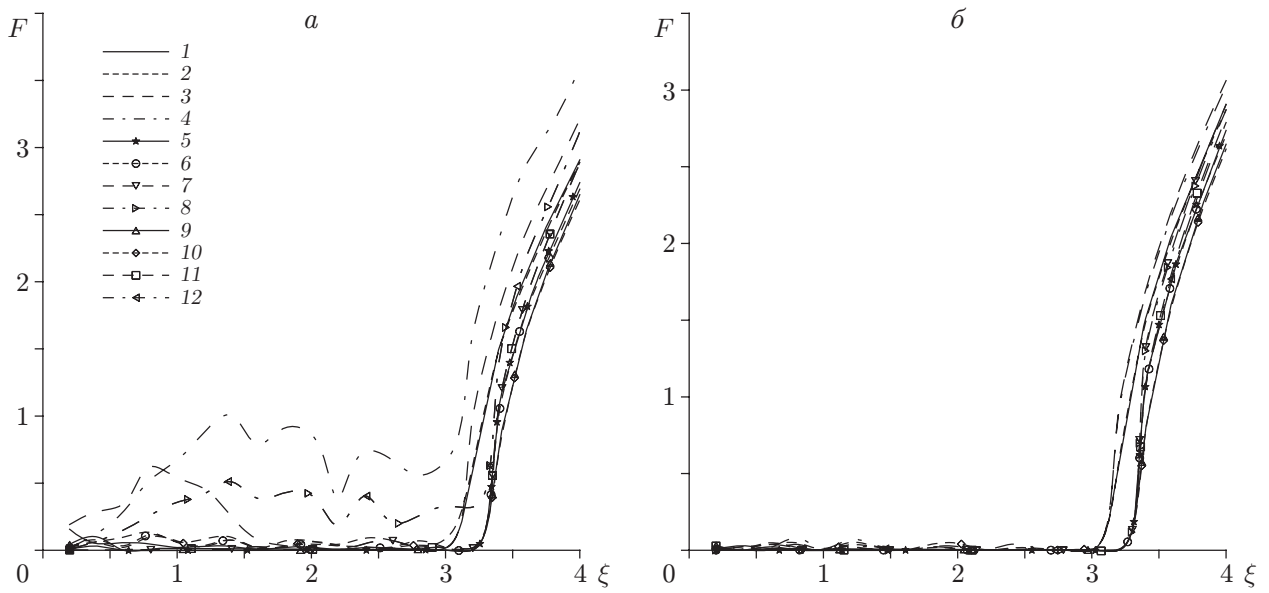


Рис. 5. Зависимость коэффициента затухания от волнового числа (обозначения те же, что на рис. 4)

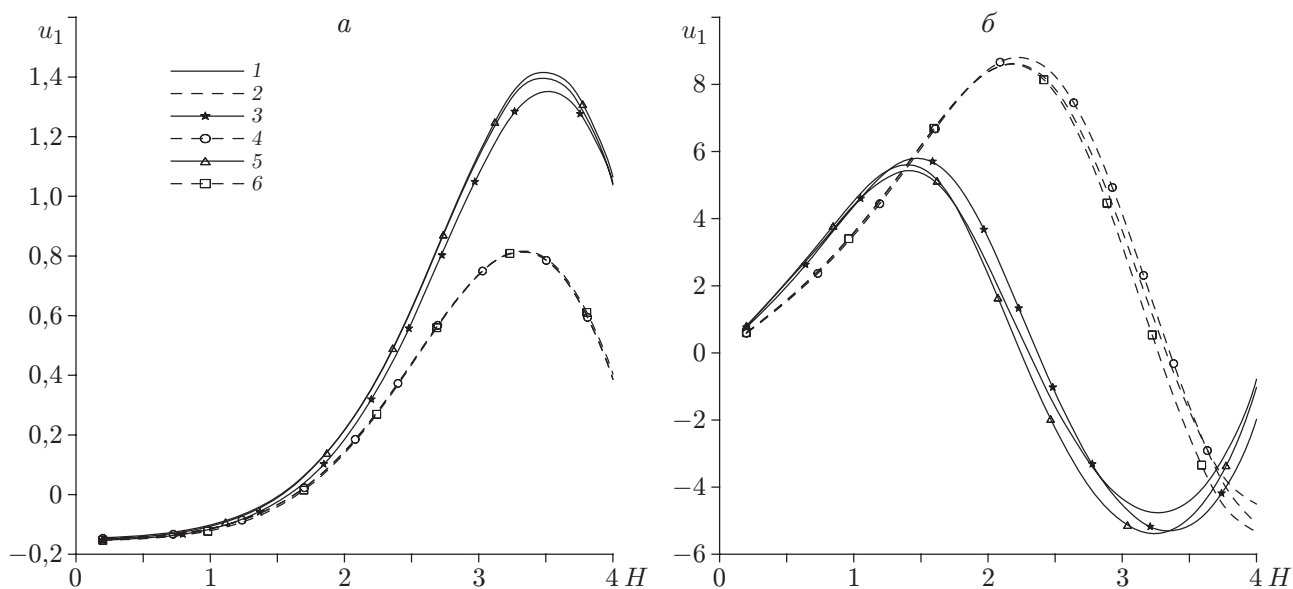


Рис. 6. Зависимость амплитуды горизонтального смещения от толщины пластины:

*a* — симметричная мода, *б* — асимметричная мода; 1, 2 — расчет по СТ, 3, 4 — расчет по теории Л-Ш, 5, 6 — расчет по теории Г-Л; 1, 3, 5 — в отсутствие вращения, 2, 4, 6 — при наличии вращения

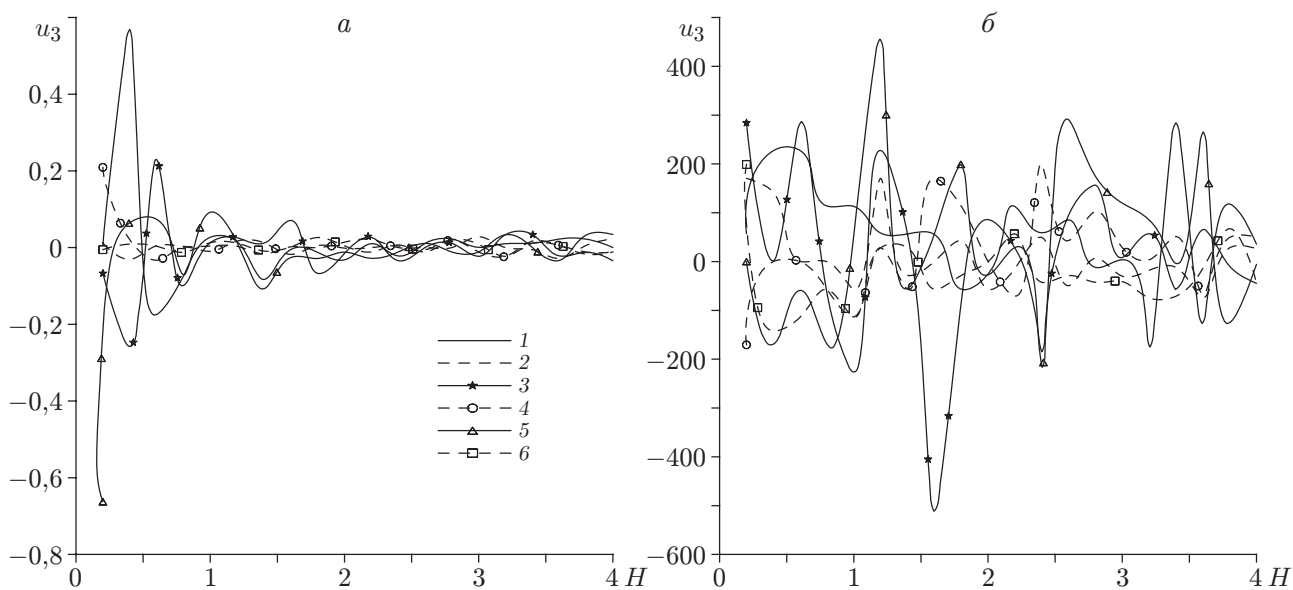


Рис. 7. Зависимость амплитуды вертикального смещения от толщины пластины (обозначения те же, что на рис. 6)

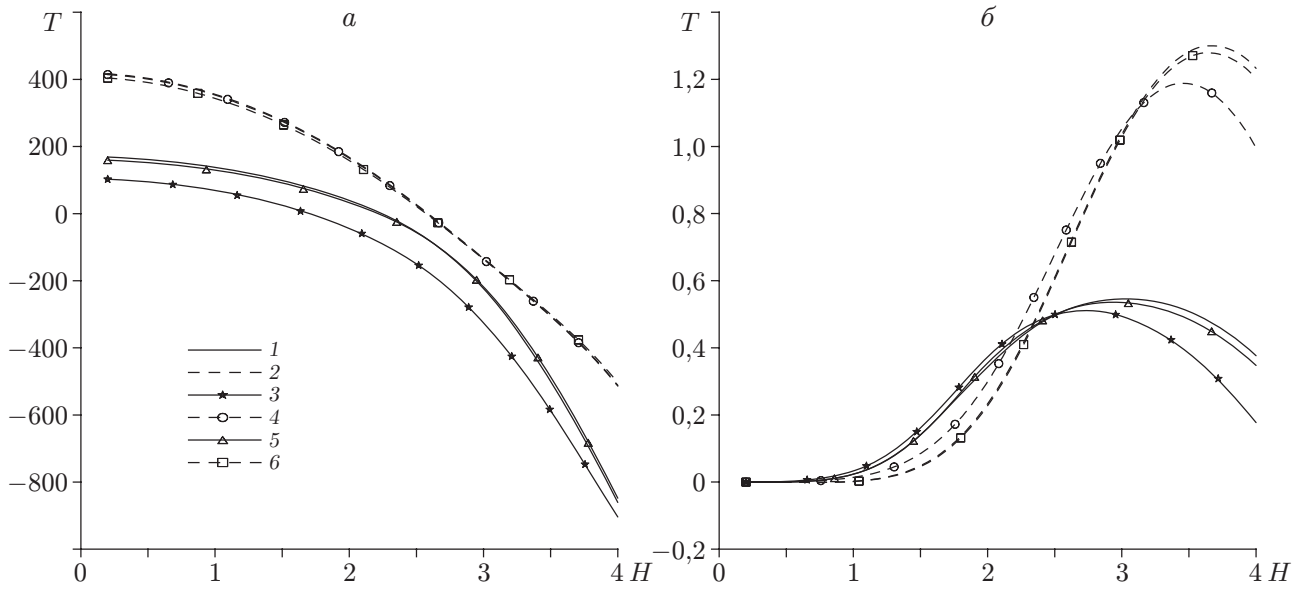


Рис. 8. Зависимость температуры от толщины пластины (обозначения те же, что на рис. 6)

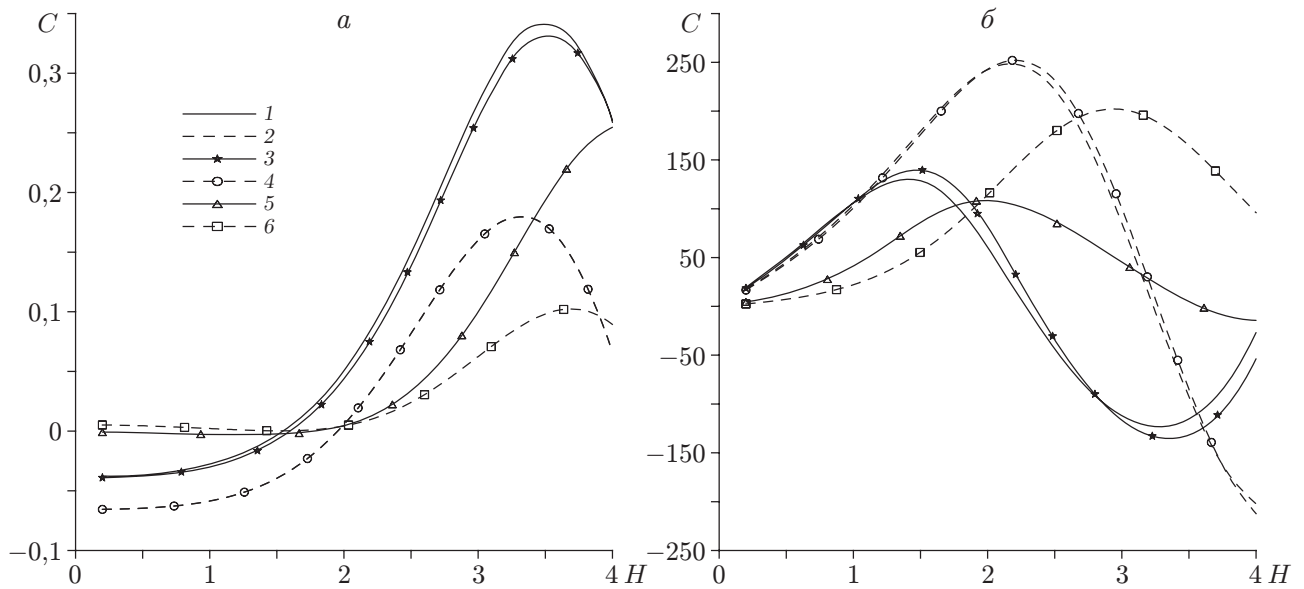


Рис. 9. Зависимость концентрации от толщины пластины (обозначения те же, что на рис. 6)

ются как в отсутствие вращения, так и при наличии вращения. На рис. 9 представлена зависимость концентрации  $C$  от толщины пластины  $H$  для симметричной и асимметричной мод.

**Заключение.** С использованием различных теорий термоупругой диффузии проведено исследование распространения термоупругих диффузионных волн в однородной изотропной вращающейся пластине. Получены характеристические уравнения для симметричной и асимметричной мод пластины. Приведены зависимости фазовой скорости, коэффициента затухания, амплитуды смещений, температуры и концентрации от волнового числа и толщины пластины. Результаты численных расчетов в целом хорошо согласуются с соответствующими аналитическими данными. Определено влияние времени релаксации и вращения на фазовые скорости, коэффициенты затухания, амплитуды смещений, температуру и концентрацию. Полученные результаты могут быть использованы при разработке и проектировании биодатчиков, а также вращающихся датчиков, предназначенных для измерения поверхностных акустических волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Biot M. A.** Thermoelasticity and reversible thermodynamics // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. P. 240–253.
2. **Lord H. W., Shulman Y.** A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
3. **Green A. E., Lindsay K. A.** Thermoelasticity // J. Elasticity. 1972. V. 2. P. 1–7.
4. **Dhaliwal R. S., Sherief H.** Generalized thermoelasticity for anisotropic media // Quart. Appl. Math. 1980. V. 33. P. 1–8.
5. **Chanderashekhariah D. S.** Thermoelasticity with second sound: a review // Appl. Mech. Rev. 1986. V. 39. P. 355–376.
6. **Hetnarski R. B., Ignaczak J.** Generalized thermoelasticity // J. Thermal Stresses. 1999. V. 22. P. 451–476.
7. **Nowacki W.** Dynamical problems of thermodiffusion in solids. 1 // Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Sci. Technology. 1974. V. 22. P. 55–64.
8. **Nowacki W.** Dynamical problems of thermodiffusion in solids. 2 // Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Sci. Technology. 1974. V. 22. P. 129–135.
9. **Nowacki W.** Dynamical problems of thermodiffusion in solids. 3 // Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Sci. Technology. 1974. V. 22. P. 275–276.
10. **Nowacki W.** Dynamical problems of thermodiffusion in solids // Proc. Vibr. Probl. Polish Acad. Sci. 1976. V. 15. P. 105–128.
11. **Dudziak W., Kowalski S. J.** Theory of thermodiffusion for solids // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1989. V. 32. P. 2005–2013.
12. **Olesiak Z. S., Pyryev Y. A.** A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // Intern. J. Engng Sci. 1995. V. 33. P. 773–780.
13. **Sherief H. H., Saleh H., Hamza F.** The theory of generalized thermoelastic diffusion // Intern. J. Engng Sci. 2004. V. 42. P. 591–608.
14. **Sherief H. H., Saleh H.** A half space problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion // Intern. J. Solids Structures. 2005. V. 42. P. 4484–4493.
15. **Singh B.** Reflection of P and SV waves from free surface of an elastic solid with generalized thermodiffusion // J. Earth System Sci. 2005. V. 114, N 2. P. 159–168.
16. **Singh B.** Reflection of SV waves from free surface of an elastic solid in generalized thermodiffusion // J. Sound Vibration. 2006. V. 291, N 3/5. P. 764–778.

17. **Aouadi M.** Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermodiffusion // *Z. angew. Math. und Phys.* 2006. Bd 57, N 2. S. 350–366.
18. **Aouadi M.** A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Intern. J. Math. Math. Sci.* 2006. Iss. 13. P. 1–15.
19. **Aouadi M.** A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Intern. J. Solids Structures.* 2007. V. 44. P. 5711–5722.
20. **Aouadi M.** Uniqueness and reciprocity theorems in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *J. Thermal Stresses.* 2007. V. 30. P. 665–678.
21. **Aouadi M.** Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media // *J. Thermal Stresses.* 2008. V. 31. P. 270–285.
22. **Sharma J. N.** Generalized thermoelastic diffusive waves in heat conducting materials // *J. Sound Vibration.* 2007. V. 301. P. 979–993.
23. **Sharma J. N., Sharma Y. D., Sharma P. K.** On the propagation of elasto-thermodiffusive surface waves in heat-conducting materials // *J. Sound Vibration.* 2008. V. 351, N 4. P. 927–938.
24. **Kumar R., Kansal T.** Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusive plate // *Intern. J. Solids Structures.* 2008. V. 45. 58905913.
25. **Kumar R., Kansal T.** Rayleigh waves in transversely isotropic thermoelastic diffusive half-space // *Canad. J. Phys.* 2008. V. 86, N 9. P. 1133–1143.
26. **Kumar R., Kansal T.** Propagation of Rayleigh waves on free surface of transversely isotropic generalized thermoelastic diffusion // *Appl. Math. Mech.* 2008. V. 29, N 11. P. 1451–1462.
27. **Chanderashekhariah D. S., Srinath K. S.** Thermoelastic plane waves without energy dissipation in a rotating body // *Mech. Res. Comm.* 1997. V. 24, N 5. P. 551–560.
28. **Ahmad F., Khan A.** Thermoelastic plane waves in a rotating isotropic medium // *Acta Mech.* 1999. V. 136. P. 243–247.
29. **Othman M. I. A.** Effect of rotation on plane waves in generalized thermo-elasticity with two relaxation times // *Intern. J. Solids Structures.* 2004. V. 41. P. 2939–2956.
30. **Sharma J. N., Othman M. I. A.** Effect of rotation on generalized thermoviscoelastic Rayleigh — Lamb waves // *Intern. J. Solids Structures.* 2007. V. 44. P. 4243–4255.
31. **Sharma J. N., Thakur M. D.** Effect of rotation on Rayleigh — Lamb waves in magneto-thermoelastic media // *J. Sound Vibration.* 2006. V. 296. P. 871–887.
32. **Kumar R., Kansal T.** Effect of rotation on Rayleigh waves in an isotropic generalized thermoelastic diffusive half-space // *Arch. Mech.* 2008. V. 60, N 5. P. 421–443.

*Поступила в редакцию 30/IV 2009 г.*

---