

УДК 532.51

Стеkanie жидких пленок по единичному элементу структурированной упаковки. Сопоставление микротекстур различного типа

Ю.Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Статья посвящена теоретическому анализу вязких пленок жидкости, стекающих вдоль единичного элемента структурированной упаковки с крупными ребрами и микротекстурой в виде волнистой двухмерной поверхности или трехмерной поверхности «холмистого» типа. Рассмотрено влияние сил инерции, поверхностного натяжения, геометрии крупного гофрирования и мелкой текстуры на осредненные характеристики пленочного течения. Получены новые уравнения для расчета трехмерного пленочного течения вдоль пластины с двойной структурой гофрирования. В расчетах основное внимание уделено влиянию, которое оказывают микротекстуры различного типа на растекание пленки. Варьировались тип, амплитуда, угол наклона мелкой текстуры и число Рейнольдса жидкости. Обнаружено, что трехмерная микротекстура «холмистого» типа оказывает малое влияние на растекание жидкой пленки по единичному элементу структурированной насадки; осредненные расходы жидкости вдоль и поперек крупных ребер слабо зависят от амплитуды и угла наклона мелкой текстуры этого типа. Выявлено, что только средняя толщина пленки чувствительна к изменению амплитуды микроповерхности «холмистого» типа. Это сильно отличается от влияния, которое оказывает волнистая двухмерная микротекстура на растекание пленки вдоль и поперек крупных ребер. В этом случае воздействие волнистости на гидродинамику растекания существенно зависит от амплитуды и угла наклона мелкой текстуры.

Ключевые слова: пленочное течение вязкой жидкости; крупное гофрирование и микротекстура; структурированные насадки.

Введение

Структурированные насадки находят широкое применение в современных технологических процессах [1–4]. В качестве примера можно привести дистилляционные колонны, где жидкость в виде тонких пленок стекает по элементам такой насадки, обеспечивая хорошую площадь контакта с встречным паром [5, 6]. Насадка состоит из индивидуальных элементов, расположенных вертикально и изготовленных из различных материалов — от металла до пластика. Элементы насадки имеют крупные ребра с углом наклона к горизонту, образующие каналы для потока пара, и микротекстуру [1–6]. Крупные ребра соседних элементов насадки наклонены в разные стороны [1]. В результате формируется сложная сеть каналов для пара [7]. Микротекстура наносится на начальном этапе изготовления насадки и бывает двух типов: волнистая двухмерная поверхность и трехмерная поверхность «холмистого» типа [5].

Таким образом, внутри дистилляционных колонн, заполненных структурированной насадкой, наблюдается сложное трехмерное течение пленки жидкости по твердым поверхностям с крупными ребрами и микротекстурой [8–11]. Дополнительными, влияющими на гидродинамику, факторами являются контактные точки между соседними элементами насадки и перфорация [1]. С учетом вышесказанного, очевидно, что математическое предсказание распределения жидкой фазы по сечению и высоте колонны со структурированной насадкой представляет собой чрезвычайно сложную задачу [8–11]. Множество работ посвящено исследованию стекания пленки вдоль одномерной гофрированной поверхности [5, 6, 12–36]. В них изучались различные аспекты такого течения [12]. Установившееся течение по одномерному гофрированию различной формы, амплитуды и периода исследовалось экспериментально [5, 6, 13, 14] и численно с использованием различных асимптотических методов [15–17], осредненных подходов [18–20] и прямых расчетов по уравнениям Навье–Стокса [18, 22–25], также проводился анализ устойчивости [19, 24–32] и волнообразования [35–36]. Существует лишь небольшое количество работ, где рассматривается трехмерное течение. Ранее автор, используя осредненный подход, исследовал стекание пленки вдоль поверхности с крупными ребрами и двухмерной микротекстурой волнистого типа [37]. Для трехмерной поверхности «холмистого» типа в работах [38, 39] с помощью асимптотических методов изучалось стекание пленок вдоль слабомодулированной поверхности. В работах [40, 41] рассматривалось стекание пленок вдоль наклонной поверхности с одиночным препятствием. С течениями такого типа были проведены эксперименты [42]. В работе [43] для течения вдоль трехмерной поверхности «холмистого» типа исследовались инерционные эффекты с использованием аналитических численных и экспериментальных методов.

Цель настоящей работы — изучение пленочного течения вдоль поверхности, на которой присутствуют как крупные ребра, так и микротекстура. Предлагается исследовать гидродинамику течения для микротекстур в виде волнистой двухмерной поверхности и трехмерной поверхности «холмистого» типа. В работе также рассматривается влияние инерции, поверхностного натяжения, геометрии крупного гофрирования и микротекстуры на осредненные характеристики пленки вязкой жидкости, стекающей вдоль единичного элемента структурированной насадки. Использование численных расчетов по распределению жидкости в дистилляционных колоннах, заполненных структурированной насадкой, имеет большое практическое значение для анализа общей эффективности разделения смеси [1–10].

Основные уравнения

Рассматривается течение пленки вдоль трехмерной поверхности с крупным гофрированием и мелкой текстурой (рис. 1а). Проекции вектора силы тяжести, изображенные на рис. 1а, направлены вдоль и поперек крупных ребер. Форма крупного гофрирования предполагается близкой к треугольной с углом раскрытия ω при вершине этого треугольника. Амплитуда крупных ребер предполагается много больше, чем локальная толщина пленки, и поперечная компонента вектора силы тяжести обеспечивает скатывающую силу (рис. 1б, здесь B_0 — период крупного гофрирования). Оси координат (x, z) на рис. 1с привязаны к координатам мелкой текстуры. Полагая амплитуду мелкой текстуры и локальную толщину пленки малыми величинами в сравнении с периодом текстуры, можно упростить исходную систему уравнений Навье–Стокса с граничными условиями и использовать приближение пограничного слоя:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2 w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(3g_x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\partial P / \partial y = 0, \quad (2)$$

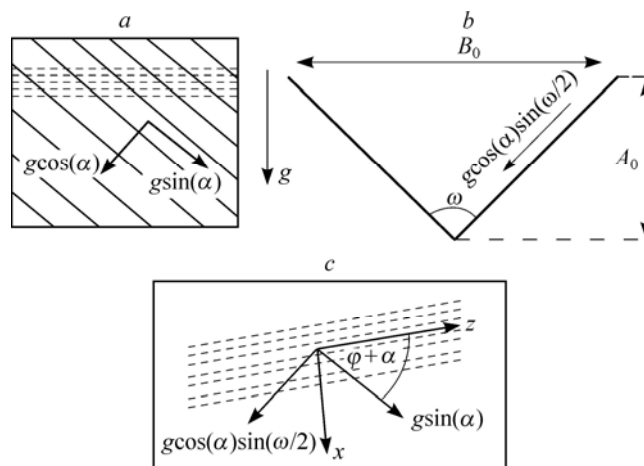


Рис. 1. Схема отдельного элемента структурированной насадки с крупными ребрами (сплошные линии) и микротекстурой (штриховые линии) (a), изображение формы крупного гофрирования, близкой к треугольной (b) и схема течения пленки вдоль поверхности с микротекстурой $f(x, z)$ под воздействием проекций силы тяжести g_x и g_z (c). α — угол наклона крупных ребер, ω — угол раскрытия треугольника при вершине крупного гофра для одного периода, φ — угол наклона микротекстуры.

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon_2 w \frac{\partial w}{\partial z} = -\varepsilon_2 \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(3g_z + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon_2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$u = v = w = 0, \quad y = \frac{1}{\varepsilon_1} f(x, z), \quad (5)$$

$$v = u \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon_2 w \frac{\partial h}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad P = P^a - \varepsilon^2 \text{We} (h_{xx} + \varepsilon_2^2 h_{zz}), \quad y = h(x, z), \quad (6)$$

$$g_x = \sin \alpha \sin(\varphi + \alpha) + \cos \alpha \cos(\varphi + \alpha) \sin(\omega/2), \quad (7)$$

$$g_z = \sin \alpha \cos(\varphi + \alpha) - \cos \alpha \sin(\varphi + \alpha) \sin(\omega/2), \quad (8)$$

здесь u , w и v — компоненты скорости соответственно в направлениях осей x , z , y (ось y перпендикулярна плоскости (x, z) (см. рис. 1c), P — давление в жидкости, $h(x, z) = H(x, z) + f(x, z)/\varepsilon_1$ — форма свободной поверхности. Локальная толщина пленки обозначена как $H(x, z)$, а $f(x, z)$ описывает форму мелкой текстуры. Для обезразмеривания переменных в уравнениях (1)–(8) использовались следующие масштабы (переменные со звездочкой являются размерными величинами):

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad z = \frac{z^*}{L_1}, \quad y = \frac{y^*}{H_0}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon u_0}, \quad w = \frac{w^*}{u_0}, \quad P = \frac{P^*}{\rho u_0^2}, \quad H = \frac{H^*}{H_0},$$

$$\varepsilon = \frac{H_0}{L}, \quad \varepsilon_1 = \frac{H_0}{A}, \quad \varepsilon_2 = \frac{L}{L_1}, \quad \text{Re} \equiv \frac{u_0 H_0}{\nu} \equiv \frac{g H_0^3}{3\nu^2}, \quad \text{We} = \frac{(3\text{Fi})^{1/3}}{\text{Re}^{5/3}}, \quad \text{Fi} = \frac{(\sigma/\rho)^3}{g\nu^4},$$

здесь ν — кинематическая вязкость жидкости, ρ — плотность жидкости, σ — поверхностное натяжение, α — угол наклона крупных гофров, φ и A — угол наклона и амплитуда мелкой текстуры, L и L_1 — периоды мелкой текстуры в x - и z -направлениях. Уравнения (1)–(3)

и (4) представляют собой законы сохранения импульса и массы соответственно. Уравнения (5) являются условиями прилипания на твердой границе, уравнения (6) — кинематическое условие и равенство касательных и нормальных напряжений на свободной границе. Уравнения (7) и (8) описывают проекцию силы тяжести на оси (x, z) .

Сформулированные выше уравнения описывают течение пленки вдоль трехмерной поверхности с крупным гофрированием и мелкой текстурой и близки к уравнениям пограничного слоя для волнового течения тонких вязких слоев жидкости [20]. Для дальнейшего упрощения используем автомодельные профили скорости, удовлетворяющие граничным условиям:

$$u = \frac{3q}{H} \cdot \left(\frac{y - (1/\varepsilon_1)f(x,z)}{H(x,z)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(y - (1/\varepsilon_1)f(x,z))^2}{H^2} \right), \quad w = \frac{3Q}{H} \cdot \left(\frac{y - (1/\varepsilon_1)f(x,z)}{H(x,z)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(y - (1/\varepsilon_1)f(x,z))^2}{H^2} \right).$$

Интегрирование уравнений (1)–(4) поперек слоя дает систему осредненных уравнений на толщину пленки и расходы жидкости при стекании вдоль трехмерной поверхности с крупным гофрированием и мелкой текстурой (см. рис. 1):

$$\frac{6}{5} \left(\frac{\partial q^2}{\partial x H} + \varepsilon_2 \frac{\partial qQ}{\partial z H} \right) = -H \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{3}{\varepsilon \text{Re}} \left(Hg_x - \frac{q}{H^2} \right), \quad P \equiv -\varepsilon^2 \text{We} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \quad (9)$$

$$\frac{6}{5} \left(\frac{\partial qQ}{\partial x H} + \varepsilon_2 \frac{\partial Q^2}{\partial z H} \right) = -H \varepsilon_2 \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{3}{\varepsilon \text{Re}} \left(Hg_z - \frac{Q}{H^2} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

где $\langle\langle q \rangle\rangle \cos \varphi - \langle\langle Q \rangle\rangle \sin \varphi = 1$, $g_x = \sin \alpha \sin(\varphi + \alpha) + \cos \alpha \cos(\varphi + \alpha) \sin(\omega/2)$, $g_z = \sin \alpha \cos(\varphi + \alpha) - \cos \alpha \sin(\varphi + \alpha) \sin(\omega/2)$, q — расход жидкости в x -направлении, Q — расход жидкости в z -направлении, $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ обозначает осреднение по координатам x и z . При решении задачи исходим из предположения, что изначально поверхность орошается в вертикальном направлении и последнее уравнение представляет собой общий баланс массы.

Сформулированный осредненный подход существенно упрощает исходные уравнения. Справедливость его допущений обосновывается сопоставлением с результатами прямого расчета уравнений Навье–Стокса. В работах [18, 24] было продемонстрировано такое сопоставление для случая стекания жидкого азота вдоль одномерной гофрированной поверхности с мелкой синусоидальной текстурой, и для течения на линии насыщения получено удовлетворительное согласование вплоть до чисел Рейнольдса $\text{Re} \leq 30$. Использование осредненного подхода для описания одномерного волнового течения вязкой пленки вдоль гладкой поверхности берет начало с работы [44]. Далее осредненный подход был обобщен [45] на случай двухмерных волн, и полупараболические профили скорости закладывались в двух направлениях. К настоящему времени осредненный подход в различных модификациях широко используется как в задачах волнового стекания вдоль гладкой стенки [20], так и в задачах течения пленок вдоль гофрированной поверхности [12, 32]. Особенно хорошо преимущества его использования демонстрируют расчеты трехмерных задач.

Уравнения (9)–(11) решались численно с использованием спектрального метода для определения толщины пленки и расходов жидкости:

$$(H, Q, q) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (H, Q, q)_{nm} e^{2\pi i(n-1)x} e^{2\pi i(m-1)z}.$$

После подстановки приведенного выражения в уравнения (9)–(11) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, которая решалась численно методом Ньютона. Расчеты начинались со слабомодулированной поверхности, где решение близко к нульсельтовскому случаю. Затем с использованием непрерывности увеличивалась амплитуда гофрирования. В дальнейших расчетах будем рассматривать три случая микротекстуры (см. рис. 1, 2):

$$f(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi x/L)], \quad f_1(x, z) = \frac{1}{2}[1 - 0,5 \cos(2\pi x/L) - 0,5 \cos(2\pi z/L_1)], \quad (12)$$

$$f_2(x, z) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi x/L) \cos(2\pi z/L_1)].$$

Следует еще раз отметить, что параметрами крупного гофрирования в рассматриваемых уравнениях являются угол наклона крупных ребер α и угол раскрытия ω при вершине крупного ребра, $\text{tg}(\omega/2) = B_0/(2A_0)$, где B_0 и A_0 — период и амплитуда крупного гофрирования.

Результаты расчетов

Рассматривается стекание жидкого азота на линии насыщения при атмосферном давлении. Результаты расчетов представлены на рис. 3–5. Даже при фиксированных физических свойствах жидкости в уравнениях (9)–(11) присутствуют семь безразмерных параметров: α , ω , φ , A/L , L_1/L , $L/\sqrt{\sigma/\rho g}$ и Re . В настоящей работе основное внимание уделено выявлению качественных различий в гидродинамике растекания по поверхностям с различным типом микротекстуры: для двухмерной волнистости и для трехмерной поверхности «холмистого» типа. Зафиксируем параметры крупного гофрирования: пусть $\alpha = 48^\circ$ и $\omega = 80^\circ$, а периоды мелкой текстуры составляют $L/\sqrt{\sigma/\rho g} = 1,5$ и $L_1/L = 1$. Эти значения близки к соответствующим характеристикам единичного элемента коммерческой насадки Sulzer500Y, используемой в реальных производствах [1]. Будем

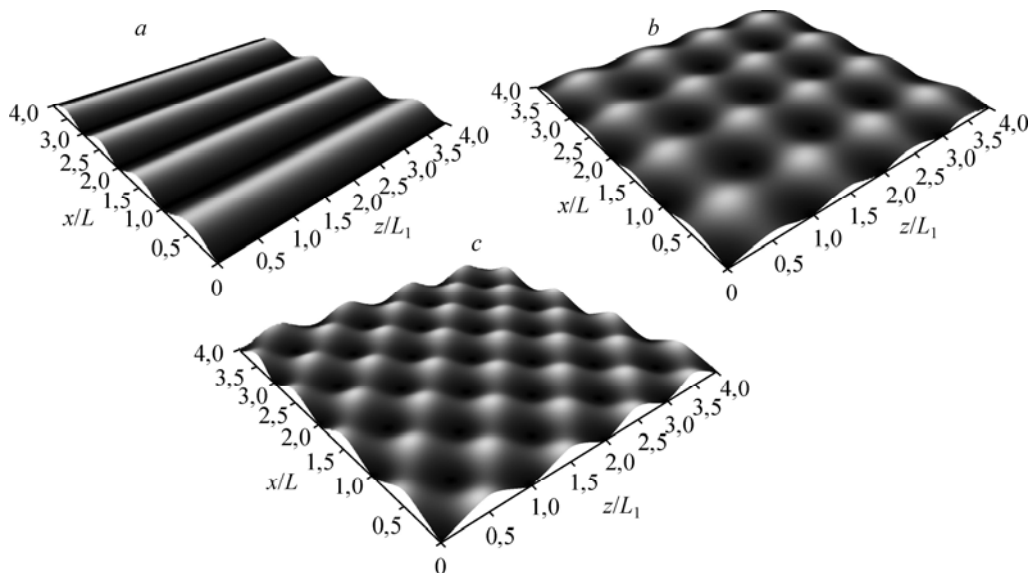


Рис. 2. Профили микротекстуры.

a — волнистая двухмерная поверхность, b — «холмистая» трехмерная поверхность первого типа, c — «холмистая» трехмерная поверхность второго типа; показаны четыре периода волны в обоих направлениях.

варьировать в расчетах амплитуду A/L и угол наклона φ мелкой текстуры, а также тип микротекстуры (см. уравнение (12)) и число Рейнольдса.

На первом этапе проводится сопоставление результатов настоящих расчетов, полученных по уравнениям (9)–(11) (сплошные линии на рис. 3), с результатами работы [37] (штриховые линии на рис. 3), где гидродинамика стекания вязкой пленки рассматривалась без использования аппроксимации формы крупного гофрирования треугольником. В работе [37] она задавалась синусоидальной, и мелкое гофрирование представляло собой двумерную волнистость. В задаче присутствовало два периода: период микротекстуры L и период крупных ребер B_0 . Авторы [37] использовали «погранслойную переменную» вдоль периметра крупного ребра, интегрирование уравнений поперек слоя и двумерные ряды Фурье. Сопоставление результатов, представленных на рис. 3, демонстрирует их хорошее согласование, это подтверждает возможность использования уравнений (9)–(11) для описания стекания вязких пленок жидкости вдоль поверхности с крупными гофрами и микротекстурой. Отметим, что использование уравнений из работы [37] для рассмотрения стекания пленки по поверхности с трехмерной микротекстурой «холмистого» типа не представляется возможным, т.к. в этом случае имеется три несоизмеримых периода и, следовательно, спектральный метод [37], использующий двойной ряд Фурье, становится неприменимым.

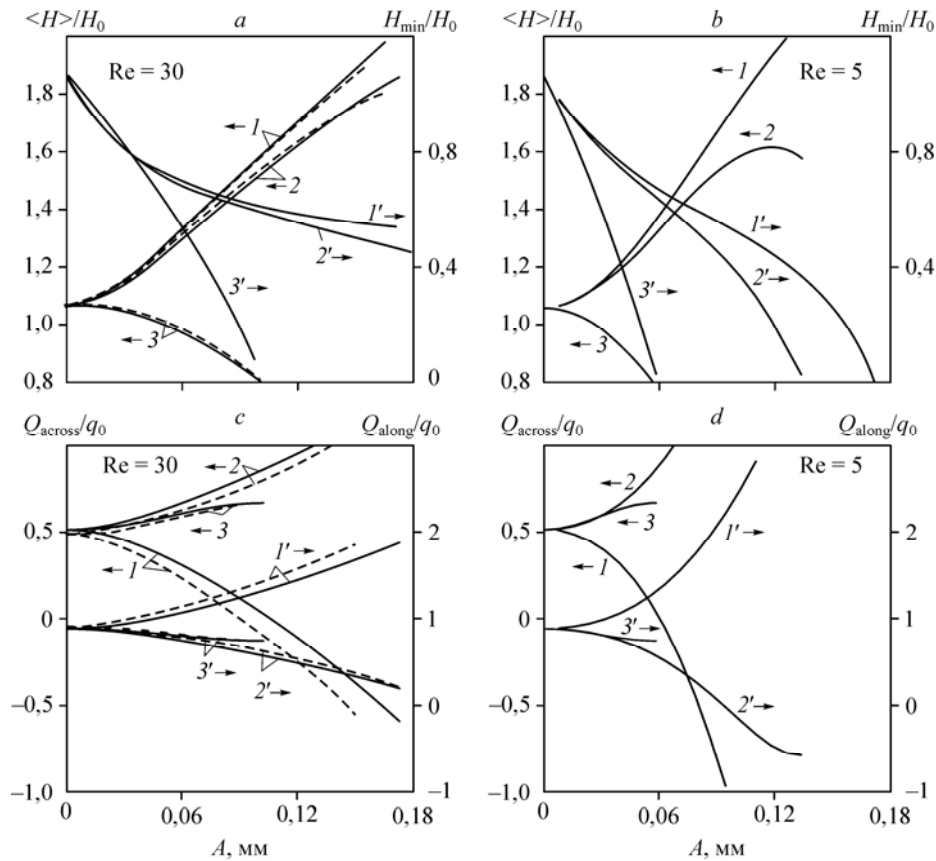


Рис. 3. Течение вдоль единичного элемента структурированной насадки с волнистой двумерной микроструктурой с амплитудой A и периодом $L(\sigma/(\rho g))^{1/2} = 1,5$.

a, b — минимальная толщина пленки (номера линий со штрихом) и средняя толщина пленки (номера линий без штрихов) при $Re = 30$ (a), 5 (b); c, d — расход в пленке вдоль крупного ребра (номера линий со штрихом) и расход в пленке поперек крупного ребра (номера линий без штрихов) при $Re = 30$ (c), 5 (d);

1 — $\varphi = -8^\circ$ (горизонтальная микротекстура), 2 — $\varphi = 27^\circ$ (наклонная микротекстура), 3 — $\varphi = 90^\circ$ (вертикальная микротекстура); сплошные линии — результаты расчетов по уравнениям (9)–(11) настоящей работы, штриховые линии — данные работы [37].

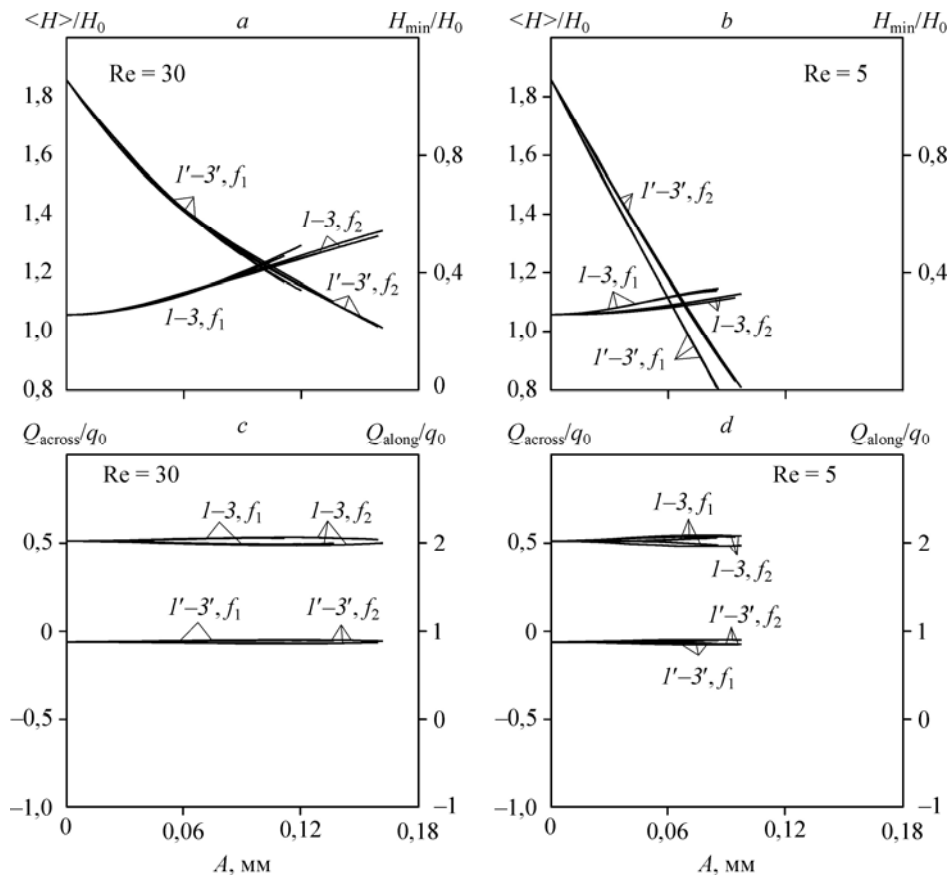


Рис. 4. Течение вдоль единичного элемента структурированной насадки с трехмерной «холмистой» микроструктурой двух типов (f_1 и f_2) с амплитудой A и периодами $L(\sigma(\rho g))^{1/2} = 1,5$, $L_1 = L$.

a, b — минимальная толщина пленки (номера линий со штрихом) и средняя толщина пленки (номера линий без штрихов) при $Re = 30$ (a), 5 (b); c, d — расход в пленке вдоль крупного ребра (номера линий со штрихом) и расход в пленке поперек крупного ребра (номера линий без штрихов) при $Re = 30$ (c), 5 (d); $\varphi = -8^\circ$ (1), 27° (2) и 90° (3).

На рис. 3–5 представлены средняя и минимальная толщины пленки и средний расход в пленке поперек и вдоль крупного ребра в зависимости от амплитуды микротекстуры. Отметим, что на рис. 3, 4 используются две y -оси. Фрагменты слева соответствуют $Re = 30$, фрагменты справа — $Re = 5$. Линии 1, 2 и 3 соответствуют $\varphi = -8^\circ$ (горизонтальная микротекстура), 27° (наклонная микротекстура) и 90° (вертикальная микротекстура). Результаты, представленные на рис. 3, соответствуют мелкой текстуре в виде двухмерной волнистости; результаты, приведенные на рис. 4, 5, соответствуют трехмерной микротекстуре «холмистого» типа (см. уравнения (12)). В расчетах автор постепенно увеличивал амплитуду микротекстуры, и в зависимости от ряда факторов решения осредненных уравнений (9)–(11) переставали существовать для амплитуды, превышающей некоторое пороговое значение. При небольших расходах жидкости минимальная толщина пленки уменьшается с ростом амплитуды микротекстуры и, начиная с некоторого порогового значения A^* становится очень малой. Для больших значений амплитуды мелкой текстуры решение уравнений (9)–(11) с полностью смоченной твердой поверхностью отсутствует. Величина порогового значения A^* существенно зависит от числа Рейнольдса, типа микротекстуры и ее угла наклона φ . Следует указать, что представленные расчеты проводились в области параметров, где поверхностное натяжение оказывает доминирующее влияние на гидродинамику течения. Сравнение результатов осредненного подхода с прямыми расчетами уравнений Навье–Стокса в этой области для случая

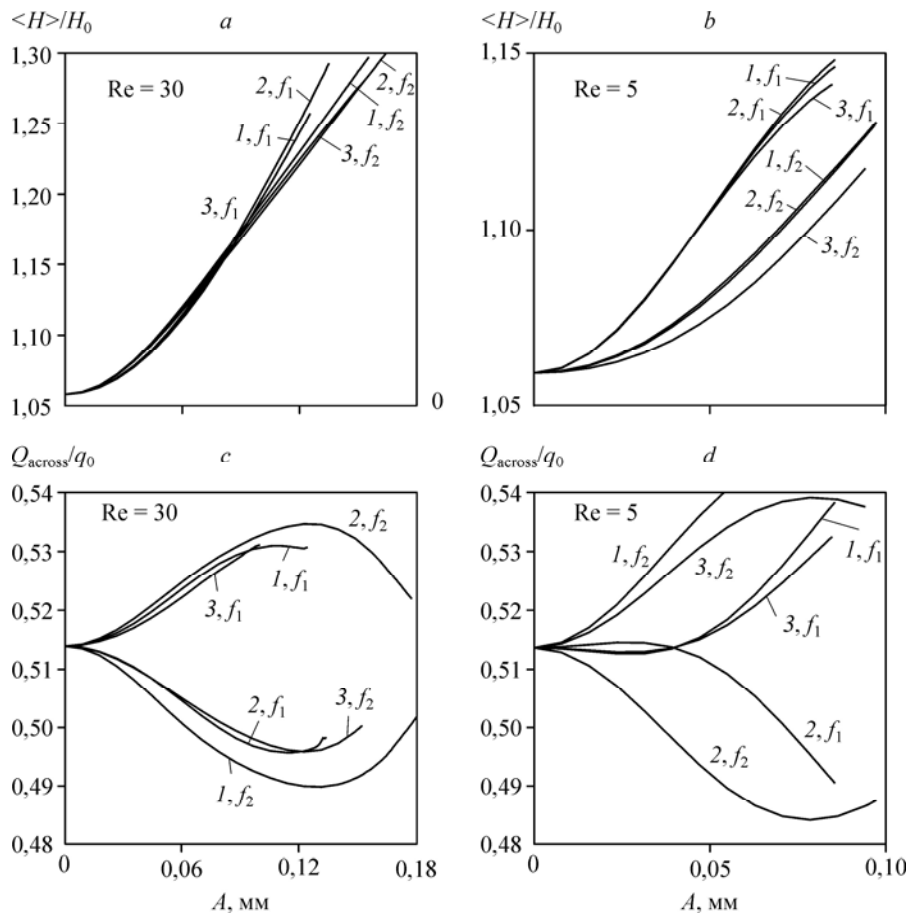


Рис. 5. Средняя толщина пленки и расход в пленке поперек крупного ребра в зависимости от амплитуды микроструктуры A при течении вдоль единичного элемента структурированной насадки с трехмерной «холмистой» микроструктурой двух типов (f_1 и f_2) и периодами $L(\sigma(\rho g))^{1/2} = 1,5$, $L_1 = L$.

$Re = 30$ (a, c), 5 (b, d); $\varphi = -8^\circ$ (1), 27° (2) и 90° (3).

стекания жидкости вдоль одномерной гофрированной поверхности [18, 24] демонстрирует хорошее количественное согласование, которое начинает ухудшаться при больших числах Рейнольдса, где свободная поверхность пленки «выпрямляется» и где жидкость затапливает микротекстуру [18, 24].

Микротекстура, имеющая вид двумерной волнистости, оказывает сильное влияние на осредненные характеристики пленочного течения (см. рис. 3). Обнаруженные эффекты существенно зависят от угла наклона мелкой текстуры и могут быть противоположными для горизонтальной и вертикальной текстур. Так, например, средний расход вдоль крупного ребра увеличивается, а средний расход поперек крупного ребра уменьшается с увеличением амплитуды двумерной волнистой микротекстуры с горизонтальным направлением. Для вертикальной и наклонной двумерных волнистостей характерны противоположные тенденции. Аналогичный эффект наблюдается для средней толщины пленки: она существенно увеличивается с ростом амплитуды микротекстуры для случаев горизонтальной и наклонной ориентаций, а в случае вертикальной ориентации двумерной волнистости демонстрирует противоположную тенденцию.

Трехмерная микротекстура «холмистого» типа оказывает малое влияние на растекание жидкой пленки по единичному элементу структурированной насадки (см. рис. 4). Осредненные расходы жидкости вдоль и поперек крупных ребер слабо зависят от амплитуды и угла наклона мелкой текстуры этого типа. Только средняя толщина пленки

демонстрирует чувствительность по отношению к изменению амплитуды микроповерхности «холмистого» типа. Более детальное представление результатов приведено на рис. 5 (масштаб y -осей изменен по сравнению с рис. 4), они демонстрируют зависимость расхода жидкости поперек крупного ребра от амплитуды, угла наклона и типа микроповерхности «холмистого» типа.

Выводы

Исследована гидродинамика течения для микротекстур в виде волнистой двухмерной поверхности и в виде трехмерной поверхности «холмистого» типа. Рассмотрено влияние инерции, поверхностного натяжения, геометрии крупного гофрирования и микротекстуры на осредненные характеристики пленочного течения вязкой жидкости. Модель, предложенная в статье, позволяет рассчитывать растекание жидкости по единичному элементу структурированной насадки, что имеет большое практическое значение для анализа общей эффективности разделения смеси [1–10].

Получены новые уравнения для расчета трехмерного пленочного течения вдоль пластины с крупными ребрами и наличием микротекстуры. Основное внимание уделено влиянию, которое оказывают микротекстуры различного вида на растекание пленки. При расчетах варьировались тип, амплитуда, угол наклона микротекстуры и число Рейнольдса жидкости.

Обнаружено, что трехмерная микротекстура «холмистого» типа оказывает малое влияние на растекание жидкой пленки по единичному элементу структурированной насадки. Осредненные расходы жидкости вдоль и поперек крупных ребер слабо зависят от амплитуды и угла наклона микротекстуры этого типа. Только средняя толщина пленки демонстрирует чувствительность по отношению к изменению амплитуды микротекстуры «холмистого» типа. Это очень сильно отличается от эффектов, которые оказывает волнистая двухмерная микротекстура на растекание пленки вдоль и поперек крупных ребер. В этом случае влияние волнистости на гидродинамику растекания существенно зависит от амплитуды и угла наклона микротекстуры.

Список литературы

1. Fair J.R., Bravo J.R. Distillation columns containing structured packing // Chem. Eng. Progr. 1990. Vol. 86. P. 19–29.
2. DeSantos J.M., Melli T.R., Scriven L.E. Mechanics of gas-liquid flow in packed-bed contactors // Ann. Rev. Fluid Mech. 1991. Vol. 23. P. 233–260.
3. Shah R.K., Focke W.W. Plate heat exchangers and their design theory // Heat transfer equipment design. Washington: Hemisphere, 1988. P. 227–254.
4. Webb R.L. Principles of enhanced heat transfer. N. Y.: Wiley, 1994. 556 p.
5. Zhao L., Cerro R.L. Experimental characterization of viscous film flows over complex surfaces // J. Multiphase Flow. 1992. Vol. 6. P. 495–516.
6. Shetty S., Cerro R.L. Flow of a thin film over a periodic surface // J. Multiphase Flow. 1993. Vol. 6, P. 1013–1027.
7. Fair J.R., Seibert A.F., Behrens M., Saraber P.P., Olujic Z. Structured packing performance — experimental evaluation of two predictive models // Ind. Eng. Chem. Res. 2000. Vol. 39. P. 1788–1796.
8. Stoter C.F. Modelling of maldistribution in structured packing: From detail to column design // Ph.D. Dissertation, Delft Technical University, Delft, The Netherlands, 1993. 183 p.
9. Higer A., Krishna R., Taylor R. Nonequilibrium cell model for packed distillation columns — the influence of maldistribution // Ind. Eng. Chem. Res. 1999. Vol. 38. P. 3988–3999.
10. Trifonov Y., Sunder S., Houghton P. Modeling of mixture separation in a column with structured packing. Effects of liquid maldistribution // Distillation and Absorption. 2006. Institution of Chemical Engineers, Symposium Series. 2006. No. 152. P. 764–772.
11. Valluri P., Matar O.K., Hewitt G.F., Mendes M.A. Thin film flow over structured packings at moderate Reynolds numbers // Chem. Engng Sci. 2005. Vol. 60. P. 1965–197.
12. Aksel N., Schorner M. Films over topography: from creeping flow to linear stability, theory, and experiments, a review // Acta Mechanica. 2018. Vol. 6. P. 1013–1027.
13. Vlachogiannis M., Bontozoglou V. Experiments on laminar film flow along a periodic wall // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 457. P. 133–156.
14. Wierschem A., Aksel N. Influence of inertia on eddies created in films creeping over strongly undulated substrates // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16. P. 4566–4574.
15. Tougo H. Long waves on a film flow of a viscous fluid down an inclined uneven wall // J. Phys. Soc. Japan. 1978. Vol. 44. P. 1014–1019.

16. Wang C.Y. Liquid film flowing slowly down a wavy incline // *AIChE J.* 1981. Vol. 27. P. 207–212.
17. Pozrikidis C. The flow of a liquid film along a periodic wall // *J. Fluid Mech.* 1988. Vol. 188. P. 275–300.
18. Trifonov Y.Y. Viscous liquid film flows over a periodic surface // *Int. J. Multiphase Flow.* 1998. Vol. 24. P. 1139–1161.
19. D'Alessio S.J.D., Pascal J.P., Jasmine H.A. Instability in gravity-driven flow over uneven surfaces // *Phys. Fluids*, 2009. Vol. 21. P. 062105-1–062105-11.
20. Kalliadasis S., Ruyer-Quil C., Scheid B., Velarde M.G. Falling liquid films // *Springer Series on Applied Mathematical Sci.* 2012. Book 176. 440 p.
21. Häcker T., Uecker H. An integral boundary layer equation for film flow over inclined wavy bottoms // *Physics of Fluids*. 2009. Vol. 21. P. 092105-1–092105-15.
22. Gu F., Liu C.J., Yuan X.G., Yu G.C. CFD simulation of liquid film flow on inclined plates // *Chem. Eng. Technol.* 2004. Vol. 27. P. 1099–1104.
23. Malamataris N.A., Bontozoglou V. Computer aided analysis of viscous film flow along an inclined wavy wall // *J. Comput. Phys.* 1999. Vol. 154. P. 372–392.
24. Trifonov Y.Y. Stability of a viscous liquid film flowing down a periodic surface // *Int. J. Multiphase Flow.* 2007. Vol. 33. P. 1186–1204.
25. Trifonov Y.Y. Stability of a film flowing down an inclined corrugated plate: The direct Navier–Stokes computations and Floquet theory // *Phys. Fluids*. 2014. Vol. 26, No. 11. P. 114101-1–114101-15.
26. D'avalos-Orozco L.A. Nonlinear instability of a thin film flowing down a smoothly deformed surface // *Phys. Fluids*. 2007. Vol. 19. P. 074103-1–074103-8.
27. Helbig K., Nasarek R., Gambryan-Roisman T., Stephan P. Effect of longitudinal minigrooves on flow stability and wave characteristics of falling liquid films // *J. Heat Transfer*. 2009. Vol. 131. P. 011601-1–011601-8.
28. Tseluiko D., Blyth M.G., Papageorgiou D.T. Stability of film flow over inclined topography based on a long-wave nonlinear model // *J. Fluid Mech.* 2013. Vol. 729. P. 638–671.
29. Vlachogiannis M., Bontozoglou V. Experiments on laminar film flow along a periodic wall // *J. Fluid Mech.* 2002. Vol. 457. P. 133–156.
30. Pollak T., Aksel N. Crucial flow stabilization and multiple instability branches of gravity-driven films over topography // *Phys. Fluids*. 2013. Vol. 25. P. 024103-1–024103-12.
31. Schorner M., Reck D., Aksel N. Stability phenomena far beyond the Nusselt flow — Revealed by experimental asymptotics // *Phys. Fluids*. 2016. Vol. 28, No. 2. P. 022102-1–022102-14.
32. Veremieiev S., Wacks D.H. Modelling gravity-driven film flow on inclined corrugated substrate using a high fidelity weighted residual integral boundary-layer method // *Phys. Fluids*. 2019. Vol. 31, No. 2. P. 022101-1–022101-12.
33. Cao Z., Vlachogiannis M., Bontozoglou V. Experimental evidence for a short-wave global mode in film flow along periodic corrugations // *J. Fluid Mech.* 2013. Vol. 718. P. 304–320.
34. Reck D., Aksel N. Experimental study on the evolution of traveling waves over an undulated incline // *Phys. Fluids*. 2013. Vol. 25, No. 10. P. 102101-1–102101-14.
35. Trifonov Y.Y. Nonlinear waves on a liquid film falling down an inclined corrugated surface // *Phys. Fluids*. 2017. Vol. 29, No. 5. P. 054104-1–054104-7.
36. Dietze G.F. Effect of wall corrugations on scalar transfer to a wavy falling liquid film // *J. Fluid Mech.* 2019. Vol. 859. P. 1098–1128.
37. Трифонов Ю.Я. Стеkanie вязких пленок по волнистым поверхностям // *Прикл. механ. и техн. физика*. 2004. Vol. 45, No. 3. P. 97–110.
38. Luo H.X., Pozrikidis C. Gravity-driven film flow down an inclined wall with three-dimensional corrugations // *Acta Mech.* 2007. Vol. 188. P. 209–225.
39. Blyth M.G., Pozrikidis C. Film flow down an inclined plane over a three-dimensional obstacle // *Phys. Fluids*. 2006. Vol. 18. P. 052104-1–052104-14.
40. Veremieiev S., Thompson H.M., Lee Y.C., Gaskell P.H. Inertial thin film flow on planar surfaces featuring topography // *Comput. Fluids*. 2010. Vol. 39, No. 3. P. 431–450.
41. Veremieiev S., Thompson H.M., Lee Y.C., Gaskell P.H. Inertial two- and three-dimensional thin film flow over topography // *Chem. Eng. Process.* 2011. Vol. 50, No. 5–6. P. 537–542.
42. Decre M.M.J., Baret J.C. Gravity-driven flows of viscous liquids over two-dimensional topographies // *J. Fluid Mech.* 2003. Vol. 487. P. 147–166.
43. Heining C., Pollak T., Aksel N. Pattern formation and mixing in three-dimensional film flow // *Phys. Fluids*. 2012. Vol. 24, No. 4. P. 042102.
44. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1967. No. 1. P. 43–51.
45. Демехин Е.А., Шкадов В.Я. О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1984. No. 5. P. 21–27.

*Статья поступила в редакцию 18 марта 2019 г.,
после доработки — 21 мая 2019 г.,
принята к публикации 4 июня 2019 г.*