УДК 534.014

О ВИБРАЦИОННОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

С. А. Герасимов

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Рассмотрено вертикальное вибрационное перемещение в среде с сопротивлением в поле силы тяжести. Определены параметры критического режима вибрационного перемещения, характеризующегося неизменным положением центра тяжести системы относительно поверхности земли.

Ключевые слова: поле силы тяжести, вибрационное движение, среда с сопротивлением.

Введение. В работах [1, 2] исследовалось горизонтальное вибрационное перемещение в жидкости, однако остался неизученным наиболее интересный и общий случай такого движения — движение в поле силы тяжести [3, 4]. До сих пор рассматривался вариант вибрационного движения с квадратичным по скорости сопротивлением движению [3]. При очень больших частотах колебаний несбалансированного рабочего тела скорость платформы относительно среды может быть значительной, что предполагает квадратичную зависимость силы сопротивления от скорости. Причина некорректности модели [3], по-видимому, заключается в физическом смысле внутренней силы, под действием которой происходит вибрационное перемещение. Авторы работы [3] предложили взрывной механизм возбуждения колебаний несбалансированного тела, описываемый силой, представляющей собой сумму дельта-функций, сдвинутых относительно друг друга на величину периода колебаний. При этом эффекты отдачи не учитываются, следовательно, такая сила не может играть роль периодической внутренней силы. Интеграл от любой периодической внутренней силы, взятый в пределах периода колебаний, должен быть равен нулю. Утверждение, обратное данному, противоречило бы не только условию периодического движения, но и закону сохранения импульса. В любом случае исследование вибрационного перемещения в поле силы тяжести, вызванного гармонической внутренней силой, представляет интерес.

Вибрационное перемещение в поле силы тяжести. Наличие среды, создающей сопротивление движению в прямом и обратном направлениях, — условие необходимое, но недостаточное для вибрационного перемещения [4]. Будем полагать, что коэффициент сопротивления среды λ, связывающий силу сопротивления среды $\boldsymbol{F}_r$ со скоростью $\boldsymbol{v}$ платформы:

$$\boldsymbol{F}_r = -\lambda \boldsymbol{v},$$

различен для различных направлений движения платформы:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_+, & v > 0, \\ \lambda_-, & v < 0. \end{cases}$$

Кроме силы сопротивления, платформа испытывает воздействие силы тяжести $M\boldsymbol{g}$ и силы $\boldsymbol{F}_{m-M}$, с которой несбалансированное рабочее тело массы m действует на платформу массы M (рис. 1). Уравнение движения платформы имеет вид

$$M \frac{d^2\boldsymbol{y}}{dt^2} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{m-M} + \boldsymbol{F}_r. \qquad (1)$$

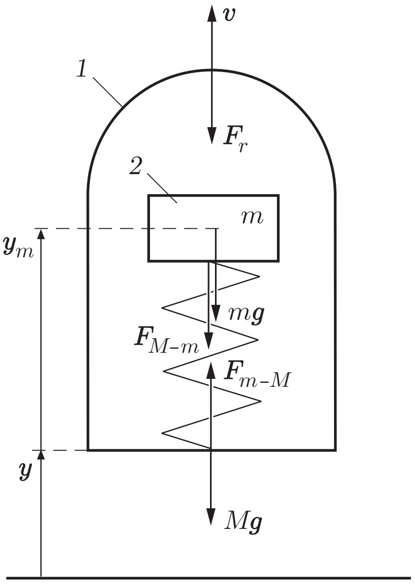

Рис. 1

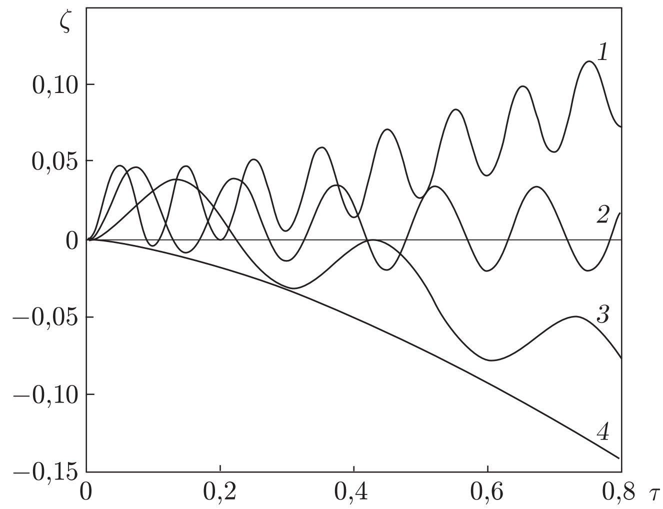

Рис. 2

Рис. 1. Вибрационное перемещение в поле силы тяжести:
1 — платформа; *2* — несбалансированное рабочее тело

Рис. 2. Зависимость координаты платформы ζ от времени при различных периодах колебаний рабочего тела:
1 — $\theta = 0{,}1$; *2* — $\theta = 0{,}152$; *3* — $\theta = 0{,}3$; *4* — $\theta \to \infty$

Рабочее тело испытывает воздействие только силы тяжести $m\boldsymbol{g}$ и силы $\boldsymbol{F}_{m-M}$, создаваемой платформой:

$$m\,\frac{d^2(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}_m)}{dt^2} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{M-m} \tag{2}$$

($\boldsymbol{y}_m$ — вектор, определяющий положение рабочего тела относительно платформы). Положение платформы относительно поверхности земли определяется вектором $\boldsymbol{y}$. Объединив уравнения движения (1) и (2) с учетом соотношения $\boldsymbol{F}_{M-m} + \boldsymbol{F}_{m-M} = 0$, для случая гармонических вынужденных колебаний $\big(y_m = y_m^0 + a\cos(2\pi t/T)\big)$ тела массы m уравнение движения платформы можно записать в виде

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \left(\frac{1-\delta}{2}\,\operatorname{sign}\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) + \frac{1+\delta}{2}\right)\frac{d\zeta}{d\tau} + \eta - \frac{1}{\theta^2}\cos\frac{2\pi\tau}{\theta} = 0. \tag{3}$$

Здесь η — приведенная сила тяжести: $\eta = M_0^3 g/(4\pi^2 m a \lambda_+^2)$;

$$\zeta = \frac{M_0}{4\pi^2 ma}\,y; \quad \delta = \frac{\lambda_-}{\lambda_+}; \quad \tau = \frac{\lambda_+}{M_0}\,t; \quad \theta = \frac{\lambda_+}{M_0}\,T; \quad M_0 = m + M.$$

Несмотря на неаналитический характер коэффициента, стоящего в (3) перед приведенной скоростью $d\zeta/d\tau$, численное решение этого уравнения не вызывает затруднений. Пример решения уравнения (3) при $\delta = 4$, $\eta = 1$ приведен на рис. 2. Здесь представлены три режима вибрационного перемещения в поле силы тяжести. При больших частотах колебаний рабочего тела возможен подъем системы относительно поверхности (кривая *1*). Падению системы в поле силы тяжести соответствуют низкие частоты (кривая *3*). Падение не является свободным из-за сопротивления среды и влияния колебаний рабочего тела на платформу. Для сравнения на рис. 2 показана зависимость приведенной высоты ζ

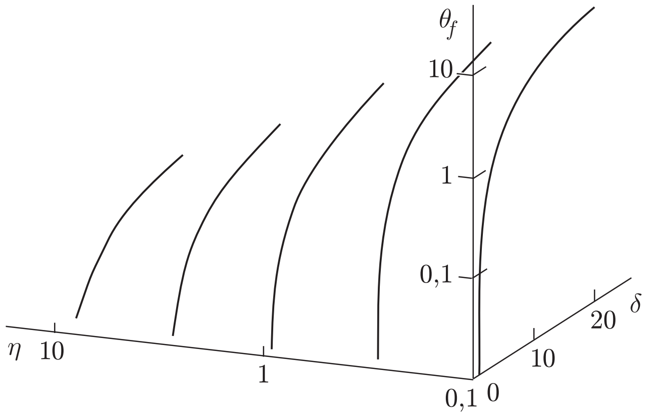

Рис. 3. Зависимость критического приведенного периода колебаний θ_f от параметра асимметрии δ

системы от времени при нулевой частоте колебаний, т. е. в отсутствие вибраций рабочего тела (кривая *4*). Существует критический режим вибрационного перемещения, характеризующийся неизменным положением центра масс над поверхностью земли (кривая *2*). Описание этого режима является основной задачей настоящей работы.

Критический режим вибрационного перемещения. Критический режим разделяет два режима движения. Подъем системы в поле силы тяжести характеризуется положительным значением средней скорости $\langle v \rangle$ этого типа вибрационного перемещения. И наоборот, отрицательные значения средней скорости $\langle v \rangle$ соответствуют падению платформы. Поэтому, для того чтобы установить условия критического режима вибрационного перемещения в поле силы тяжести, достаточно определить условия, при которых средняя скорость равна нулю. Следует отметить некоторую особенность вычисления этого параметра, а именно: если величина η значительна, то равенство нулю приведенной средней скорости $\langle \vartheta \rangle = M_0^2 \langle v \rangle / (4\pi^2 m a \lambda_+)$ достигается только при малых приведенных периодах вибрации θ. В свою очередь это означает, что задание фиксированного интервала времени установления движения, по истечении которого вычисляется средняя за период скорость вибрационного перемещения [1], недопустимо. Время установления движения должно являться параметром численных расчетов, определяемым из условия независимости средней скорости от его значения.

На рис. 3 представлена зависимость приведенного периода колебаний θ_f, соответствующего критическому режиму, от η и δ. По существу, это результаты численного решения уравнения

$$\langle \vartheta \rangle (\eta, \delta, \theta_f) = 0, \tag{4}$$

полученные при различных η, δ. Чтобы отличить значения приведенного периода, соответствующие критическому режиму, от параметра θ, характеризующего подъем и падение системы, введено новое обозначение θ_f. Как и следовало ожидать, если полная масса системы мала, то критический режим вибрационного перемещения наступает уже при $\delta \approx 1$. Если же коэффициент сопротивления среды λ_+, соответствующий движению платформы вверх, значительно меньше коэффициента сопротивления среды λ_- при движении платформы вниз, то критический режим вибрационного перемещения может наступать при достаточно низких частотах колебаний рабочего несбалансированного тела. Наконец, критический режим вибрационного перемещения тяжелой системы (большие значения η) возникает только при достаточно высоких частотах колебаний, другими словами, при малых θ_f.

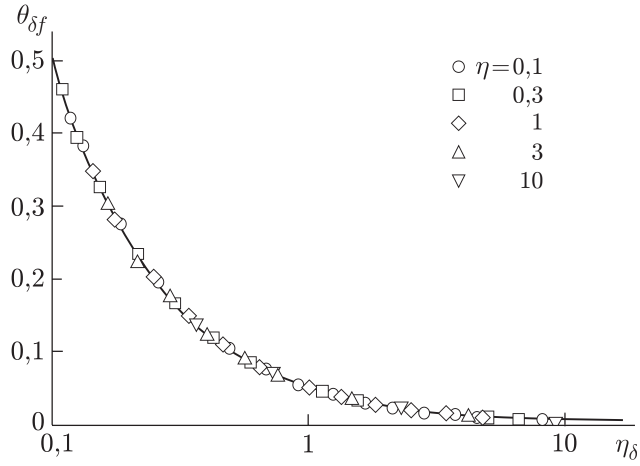

Рис. 4. Автомодельная зависимость критического периода колебаний $\theta_{\delta f}(\eta_\delta)$: точки — решение уравнения (4) при $1{,}1 \leqslant \delta \leqslant 10$, $0{,}1 \leqslant \eta \leqslant 10$; кривая — зависимость (5)

Следует отметить, что практическая ценность результатов, представленных на рис. 3, невелика. Удобным способом представления и описания экспериментальных и теоретических результатов является автомодельный подход [1, 2], основанный на симметрии горизонтального вибрационного перемещения при одновременной замене λ_+ на λ_- и λ_- на λ_+. При движении в вертикальном направлении (т. е. в поле силы тяжести) такая симметрия, естественно, нарушается. Правило преобразования остается неизменным лишь для приведенного периода θ_f. В соответствии с ним универсальная переменная, соответствующая критическому периоду вибраций, имеет вид $\theta_{\delta f} = \theta_f/(1+1/\delta)$. Для того чтобы записать соответствующую переменную для приведенной силы тяжести всей системы η, необходимо учесть, что при одновременной замене $\lambda_+ \leftrightarrow \lambda_-$ уравнение движения (3) остается неизменным только в том случае, если величина η также меняет знак. В то же время η зависит от квадрата коэффициента сопротивления среды. Это означает, что антисимметричным должно быть преобразование не коэффициента λ_+, а его квадрата λ_+^2. Антисимметричному преобразованию скорости вибрационного перемещения в горизонтальном направлении соответствует замена $\lambda_+ \to \lambda_+\lambda_-(\lambda_- - \lambda_+)/(\lambda_- + \lambda_+)^2$ [2]. Преобразованию приведенной силы тяжести должна соответствовать аналогичная замена, поскольку критический режим вибрационного перемещения в первом приближении можно представить как наложение двух движений: падения системы в поле силы тяжести с нулевой частотой колебаний и вибрационного перемещения в обратном направлении при η=0. Единственная замена, которая соответствует такой модели и сохраняет размерность коэффициента сопротивления среды, имеет вид

$$\lambda_+^2 \to \lambda_+\lambda_-(\lambda_- - \lambda_+)/(\lambda_- + \lambda_+).$$

Тогда приведенная сила тяжести записывается в виде переменной

$$\eta_\delta = \eta(\delta+1)/(\delta(\delta-1)),$$

зависящей, как предполагается, только от приведенного периода осцилляций $\theta_{\delta f} = \theta_f/(1+1/\delta)$, соответствующего критическому режиму вибрационного перемещения.

Изложенный выше подход может быть использован для приближенного описания результатов расчета, которые приведены в виде зависимости $\theta_{\delta f}(\eta_\delta)$ на рис. 4. При этом следует отметить два важных обстоятельства. Во-первых, при изменении приведенной силы тяжести более чем на два порядка и параметра асимметрии системы более чем в десять раз критический приведенный период осцилляций определяется простой зависимостью

$$\theta_{\delta f} \approx 1/(20\eta_\delta), \tag{5}$$

которая может быть записана в виде

$$T_f \approx \pi^2 ma(\lambda_- - \lambda_+)/(5M_0^2 g).$$

Во-вторых, описанный выше подход, основанный на свойстве симметрии, оказался справедливым не только при больших значениях приведенных периодов и параметров асимметрии системы. По-видимому, это обусловлено характером зависимости (5), который, по существу, приводит к тому, что автомодельное представление не является единственным.

Если в отсутствие колебаний несбалансированного груза максимальная скорость падения всей системы в воздухе с коэффициентом сопротивления λ_- составляет v_m, то $\lambda_- v_m = M_0 g$. Это означает, что вибрационный подъем такой системы в поле силы тяжести может быть реализован при периодах колебаний, меньших $T_f = \pi^2 ma(1 - 1/\delta)/(5M_0 v_m)$. При отношении масс $m/M_0 = 1/2$, амплитуде колебаний $a = 1$ м, параметре асимметрии $\delta = 2$ и скорости $v_m = 1$ м/с значение $T_f \approx 0{,}5$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Герасимов С. А.** Автомодельность вибрационного перемещения в среде с сопротивлением // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 108–111.
2. **Герасимов С. А.** Диссипация энергии при вибрационном перемещении в жидкости // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 83–86.
3. **Нагаев Р. Ф., Тамм Е. А.** Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // Машиноведение. 1980. № 4. С. 3–8.
4. **Blekhman I. I.** Vibrational mechanics. Singapore: World Scientific, 2000.

Поступила в редакцию 22/I 2003 г.