УДК 519.6

Использование схемы Лакса–Фридрихса с малой диссипацией для моделирования релятивистских течений газа*

И.М. Куликов, Д.А. Караваев

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: kulikov@ssd.sscc.ru (Куликов И.М.), kda@opg.sscc.ru (Караваев Д.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 16, 2023.

Куликов И.М., Караваев Д.А. Использование схемы Лакса–Фридрихса с малой диссипацией для моделирования релятивистских течений газа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 4. — С. 389–400.

Схема Лакса–Фридрихса традиционно является альтернативой схеме Годунова, так как не требует решения задачи Римана. Использование в случае уравнений специальной релятивистской гидродинамики в схемах Рое, Русанова и в семействе схем Хартена–Лакса–Ван Леера естественного ограничения скорости распространения волн скоростью света приводит нас к конструкции, эквивалентной схеме Лакса–Фридрихса. Важнейшим свойством схемы является ее абсолютная робастность, компенсируемая повышенной диссипативностью. В работе мы предлагаем использовать кусочно-параболическую реконструкцию физических переменных, что позволяет получить простую абсолютно робастную схему высокого порядка точности на гладких решениях и с малой диссипацией на разрывах. Верификации на специальном наборе тестов и на задаче об эволюции релятивистской струи подтверждают такие свойства построенной схемы.

DOI: 10.15372/SJNM20230404
EDN: IQBSRI

Ключевые слова: *математическое моделирование, вычислительная астрофизика, специальная релятивистская гидродинамика.*

Kulikov I.M., Karavaev D.A. Using low dissipation Lax–Friedrichs scheme for numerical modeling of relativistic flows // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 4. — P. 389–400.

The Lax–Friedrichs scheme is traditionally considered an alternative to the Godunov scheme, since it does not require solving the Riemann problem. In the equations of special relativistic hydrodynamics, the speed of light is a natural limitation of the wave propagation speed. The use of such an upper estimate of the slopes of characteristics in the schemes of Roe, the Rusanov type, or the Harten–Lax–Van Leer family leads to a construction equivalent to the Lax–Friedrichs scheme. Due to the absolute robustness of the scheme, a number of software implementations have been developed on its basis for modeling relativistic gas flows. In this paper, we propose a piecewise parabolic reconstruction of the physical variables to reduce dissipation of the numerical method. The use of such a reconstruction in the Lax–Friedrichs scheme allows us to obtain an absolutely robust simple scheme of high-order accuracy on smooth solutions and with small dissipation at the discontinuities. The computational experiments carried out in the article confirm these properties of the scheme.

Keywords: *numerical modeling, computational astrophysics, special relativistic hydrodynamics.*

*Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00014) https://rscf.ru/project/23-11-00014/.

1. Введение

В работах [1, 2] предложена методика численного решения уравнений специальной релятивистской гидродинамики на основе метода Годунова с использованием кусочно-параболической реконструкции физических переменных. Применение таких схем показало малую диссипативность численного решения в окрестности ударных волн, что позволяет использовать либо небольшие сетки для воспроизведения релятивистских течений газа в трехмерном случае, либо эффективно использовать достаточно подробные сетки для обнаружения сложных конфигураций ударных волн и разрывов. Основной сложностью при конструировании метода является нахождение спектра матрицы Якоби в задаче Римана. Так, при использовании схемы типа Рое [2] требуется нахождение полного спектрального разложения. При использовании схем семейства Хартена–Лакса–Ван Леера [1] достаточно знание только собственных чисел. Разумеется, для модели идеального газа решение спектральной задачи имеет аналитическое решение и подробно описано в литературе [3]. Однако при усложнении модели в части уравнения состояния или магнитного поля такое разложение в общем случае не может быть записано в аналитической форме [4].

В различных программных реализациях численного решения уравнений специальной релятивистской гидродинамики достаточно активно используется схема Лакса–Фридрихса с различными подходами к увеличению ее порядка точности [5, 6] и расширением на более сложные математические модели [7]. Использование схемы Лакса–Фридрихса оправдано при воспроизведении релятивистских потоков, так как в этом случае имеет место фундаментальное ограничение скорости распространения газа скоростью света. Более того, при использовании скорости света для оценки сверху наклонов характеристик в схемах Хартена–Лакса–Ван Леера естественным образом выводится схема Лакса–Фридрихса. При этом схема не накладывает ограничений на уравнение состояния и является абсолютно робастной при выполнении условия Куранта. Разумеется, такая схема является более диссипативной при сравнении с другими схемами на основе решения задачи Римана, но для уменьшения такой диссипации мы будем использовать подход на основе кусочно-параболической реконструкции [8].

В настоящей работе мы предлагаем комбинацию схемы Лакса–Фридрихса с использованием кусочно-параболической реконструкции физических переменных для получения численной схемы решения уравнений специальной релятивистской гидродинамики с малой диссипацией. Такая схема является абсолютно робастной и не требует решения задачи Римана. Верификация на специальном расширенном наборе тестов позволяет экспериментально доказать не только робастность, но и малую диссипативность построенной схемы. В качестве астрофизического приложения рассмотрена задача об эволюции релятивистской струи, распространяющейся в межзвездном пространстве. Особенностью такой задачи является формирование достаточно большой области низкой плотности с дорелятивистскими скоростями. Именно такие области с большим трудом воспроизводятся численно.

Во втором пункте выписаны уравнения специальной релятивистской гидродинамики и кратко описана используемая схема. Третий пункт посвящен верификации построенной численной схемы на наборе одномерных тестов. В четвертом пункте представлены результаты моделирования релятивистской струи. Пятый пункт посвящен двум дискуссионным вопросам использования эквивалентности энергии и массы, а также использованию уравнения для энтропии при воспроизведении разреженных областей с дорелятивистскими скоростями. В шестом пункте приведено заключение.

2. Численная схема

Введем множество физических переменных: ρ — плотность, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости, p — давление; зафиксируем γ — показатель адиабаты и примем скорость света $c \equiv 1$. Фактор Лоренца Γ вычисляется по формуле:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Введем понятие специальной энтальпии h по формуле:

$$h = 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}.$$

Для записи уравнений специальной релятивистской гидродинамики введем вектор консервативных переменных U и их поток F_ξ по направлению ξ, согласно формулам:

$$U = \begin{pmatrix} D \\ M_x \\ M_y \\ M_z \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma\rho \\ \Gamma^2\rho h v_x \\ \Gamma^2\rho h v_y \\ \Gamma^2\rho h v_z \\ \Gamma^2\rho h - p \end{pmatrix}, \qquad F_\xi = \begin{pmatrix} D v_\xi \\ M_x v_\xi + p\delta_{x\xi} \\ M_y v_\xi + p\delta_{y\xi} \\ M_z v_\xi + p\delta_{z\xi} \\ E v_\xi + p v_\xi \end{pmatrix},$$

где $\delta_{\psi\xi}$ – символ Кронекера. В этом случае уравнения специальной релятивистской гидродинамики в форме законов сохранения записываются в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{\xi = x,y,z} \frac{\partial F_\xi}{\partial \xi} = 0.$$

Для одномерного аналога уравнений запишем схему Годунова:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n}}{\tau} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = 0.$$

Для конфигурации из левой (L) и правой (R) ячеек поток F вычисляется по схеме Лакса-Фридрихса:

$$F^n = \frac{F_{\mathrm{L}}^n + F_{\mathrm{R}}^n}{2} + \frac{U_{\mathrm{L}}^n - U_{\mathrm{R}}^n}{2}.$$

Для уменьшения диссипации численного решения используется кусочно-параболическое представление физических переменных [9]:

$$F^n = \frac{F_{\mathrm{L}}^n(-c\tau) + F_{\mathrm{R}}^n(c\tau)}{2} + \frac{U_{\mathrm{L}}^n(-c\tau) - U_{\mathrm{R}}^n(c\tau)}{2}.$$

Интегрирование вдоль характеристик $\pm c\tau$ подробно приведены в работах [1, 2]. Шаг по времени определяется из условия Куранта $CFL = \tau/h < 1$. Для проведения тестирования на одномерных задачах использовалось число Куранта $CFL = 0.1$, для многомерных вычислительных экспериментов использовано $CFL = 0.2$.

3. Верификация

Верификацию численного метода проведем на системе тестов о распаде произвольного разрыва из работы [10] путем сравнения с аналитическим решением из работы [11]. Во всех вычислительных экспериментах рассматривается область $[-0.5; 0.5]$, в которой введено 400 ячеек. Начальный разрыв находится в точке $x_0 = 0$.

3.1. Тест 1: релятивистская ударная волна (первая задача)

Рассмотрим эволюцию релятивистского газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ до момента времени $t = 0.4$. В начальный момент времени параметры газа выбраны слева: $\rho^{\mathrm{L}} = 10$, $p^{\mathrm{L}} = 40/3$, $v_x^{\mathrm{L}} = 0$, $v_y^{\mathrm{L}} = 0$, $v_z^{\mathrm{L}} = 0$; и справа: $\rho^{\mathrm{R}} = 1$, $p^{\mathrm{R}} = 10^{-8}$, $v_x^{\mathrm{R}} = 0$, $v_y^{\mathrm{R}} = 0$, $v_z^{\mathrm{R}} = 0$. На рисунке 1 изображены результаты сравнения численного и аналитического решений.

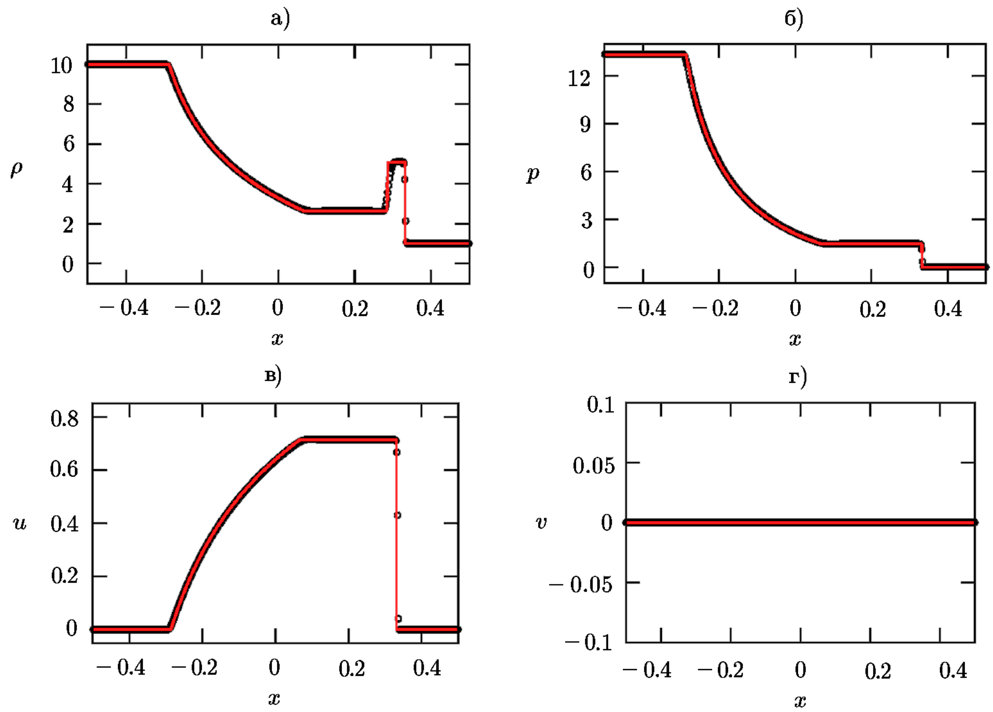

Рис. 1. Тест 1. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками

Тест направлен на исследование возможности численного метода воспроизводить умеренную ударную волну, формируемую в статичном газе только за счет разности давлений. Численный метод успешно справился с этим тестом, без особенностей воспроизведя контактный разрыв и основание волны разрежения. Ударная волна имеет диссипацию всего на две ячейки, что соответствует аналогичным методам на основе схем Рое [2] и семейства схем Хартена–Лакса–Ван Леера [1].

3.2. Тест 2: релятивистская ударная волна (вторая задача)

Рассмотрим эволюцию релятивистского газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ до момента времени $t = 0.4$. В начальный момент времени параметры газа выбраны слева: $\rho^{\mathrm{L}} = 1$, $p^{\mathrm{L}} = 1000$, $v_x^{\mathrm{L}} = 0$, $v_y^{\mathrm{L}} = 0$, $v_z^{\mathrm{L}} = 0$; и справа: $\rho^{\mathrm{R}} = 1$, $p^{\mathrm{R}} = 0.01$, $v_x^{\mathrm{R}} = 0$, $v_y^{\mathrm{R}} = 0, v_z^{\mathrm{R}} = 0$. На рис. 2 изображены результаты сравнения численного и аналитического решений.

Тест является усложнением предыдущего за счет большего значения давления слева. Такое соотношение давления приводит к образованию тонкой оболочки, которая воспроизводится до амплитуды $\rho \sim 7.3$, что соответствует другим программным реализациям [10]. В целом численное решение воспроизведено без особенностей.

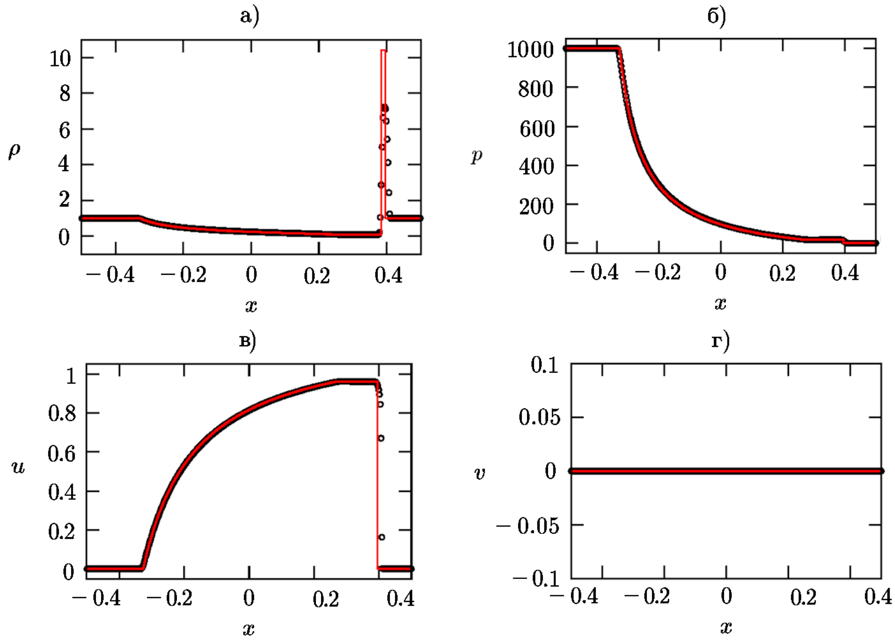

Рис. 2. Тест 2. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками

3.3. Тест 3: центральное столкновение потоков газа

Рассмотрим эволюцию релятивистского газа с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$ до момента времени $t = 0.4$. В начальный момент времени параметры газа выбраны слева: $\rho^{\mathrm{L}} = 1$, $p^{\mathrm{L}} = 0.001$, $v_x^{\mathrm{L}} = 0.999999995$, $v_y^{\mathrm{L}} = 0$, $v_z^{\mathrm{L}} = 0$; и справа: $\rho^{\mathrm{R}} = 1$, $p^{\mathrm{R}} = 0.001$, $v_x^{\mathrm{R}} = -0.999999995$, $v_y^{\mathrm{R}} = 0$, $v_z^{\mathrm{R}} = 0$. На рис. 3 изображены результаты сравнения численного и аналитического решений.

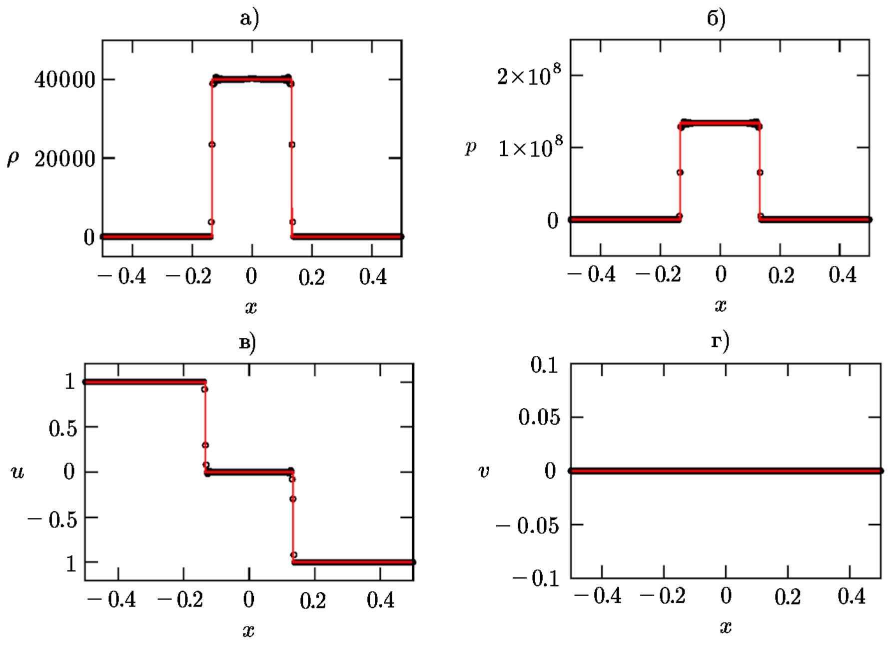

Рис. 3. Тест 3. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками

Тест направлен на исследование возможности численного метода воспроизводить образование двух ударных волн с остановкой газа за их фронтами. Начальное значение фактор-Лоренца составляет $\Gamma \sim 10^4$, что соответствует ультрарелятивистскому течению газа. Большинство методов [10] дают значительную осцилляцию на фронте ударных волн, в то время как диссипативные свойства схемы Лакса–Фридрихса снимают такую проблему. Заметим, что использование кусочно-параболического представления физических переменных дает диссипацию всего на одну ячейку.

3.4. Тест 4: сильная обратная ударная волна

Рассмотрим эволюцию релятивистского газа с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$ до момента времени $t = 0.4$. В начальный момент времени параметры газа выбраны слева: $\rho^{\mathrm{L}} = 1$, $p^{\mathrm{L}} = 1$, $v_x^{\mathrm{L}} = 0.9$, $v_y^{\mathrm{L}} = 0$, $v_z^{\mathrm{L}} = 0$; и справа: $\rho^{\mathrm{R}} = 1$, $p^{\mathrm{R}} = 10$, $v_x^{\mathrm{R}} = 0$, $v_y^{\mathrm{R}} = 0$, $v_z^{\mathrm{R}} = 0$. На рис. 4 изображены результаты сравнения численного и аналитического решений.

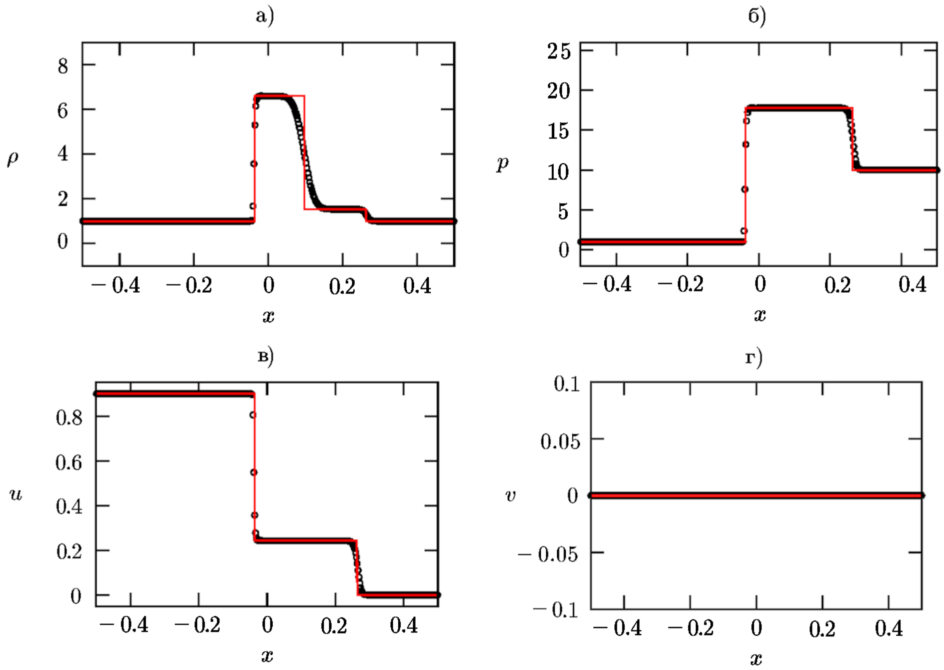

Рис. 4. Тест 4. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками

Тест направлен на исследование возможности численного метода воспроизводить ударную волну, полученную в результате отражения. В большинстве численных методов имеют место осцилляции на фронте обратной ударной волны [10]. Как видно из рис. 4, схема Лакса–Фридрихса не дает таких осцилляций. Побочным эффектом повышенной диссипации схемы является дополнительное “размазывание” контактного разрыва, хотя это имеет место и в других схемах.

3.5. Тест 5: ударная волна с ненулевой тангенциальной скоростью (легкий тест)

Рассмотрим эволюцию релятивистского газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ до момента времени $t = 0.4$. В начальный момент времени параметры газа выбраны слева:

$\rho^{\mathrm{L}} = 1$, $p^{\mathrm{L}} = 1000$, $v_x^{\mathrm{L}} = 0$, $v_y^{\mathrm{L}} = 0$, $v_z^{\mathrm{L}} = 0$; и справа: $\rho^{\mathrm{R}} = 1$, $p^{\mathrm{R}} = 0.01$, $v_x^{\mathrm{R}} = 0$, $v_y^{\mathrm{R}} = 0.99$, $v_z^{\mathrm{R}} = 0$. На рис. 5 изображены результаты сравнения численного и аналитического решений.

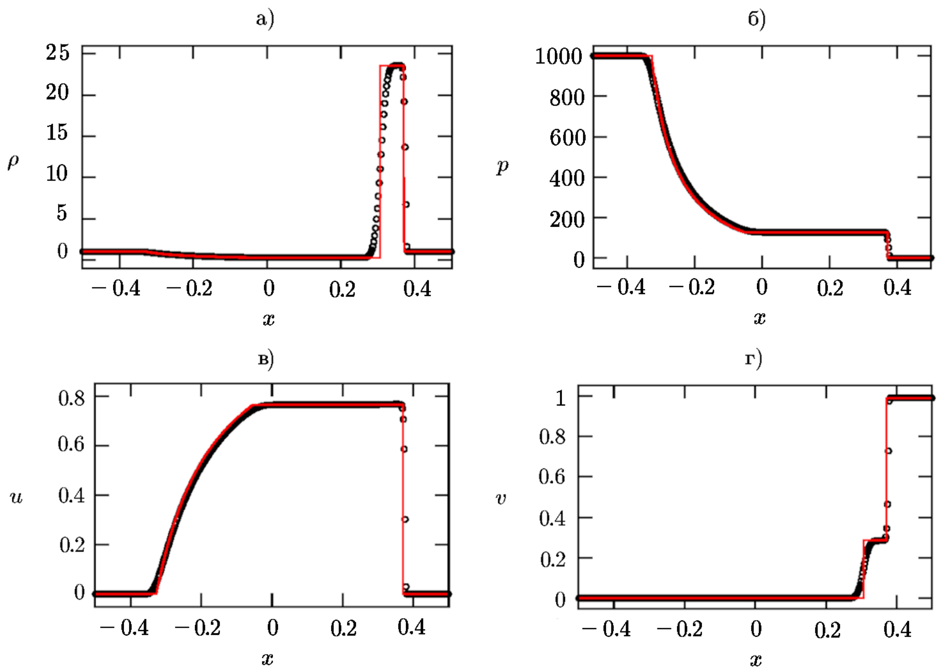

Рис. 5. Тест 5. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками

Тест направлен на проверку работоспособности метода воспроизводить сильные сдвиговые течения. Особенностью теста является наличие ненулевой поперечной скорости, находящейся в холодном газе справа. Ударная волна приходит из левой части. Диссипация ударной волны в функциях продольной и поперечной скоростей происходит на две ячейки, в то время как в плотности — на три ячейки. Пик плотности смоделирован с правильной амплитудой. Схема свободна от численных артефактов.

3.6. Тест 6: ударная волна с ненулевой тангенциальной скоростью (сложный тест)

Рассмотрим эволюцию релятивистского газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ до момента времени $t = 0.6$. В начальный момент времени параметры газа выбраны слева: $\rho^{\mathrm{L}} = 1$, $p^{\mathrm{L}} = 1000$, $v_x^{\mathrm{L}} = 0$, $v_y^{\mathrm{L}} = 0.9$, $v_z^{\mathrm{L}} = 0$; и справа: $\rho^{\mathrm{R}} = 1$, $p^{\mathrm{R}} = 0.01$, $v_x^{\mathrm{R}} = 0$, $v_y^{\mathrm{R}} = 0.9$, $v_z^{\mathrm{R}} = 0$. На рис. 6 изображены результаты сравнения численного и аналитического решений.

Предыдущий тест усложнен тем, что поперечная скорость присутствует и в горячей области. Это приводит к очень сильным ограничениям на пространственное разрешение. Так, при использовании 400 ячеек (см. рис. 6) фронт ударной волны просто не воспроизводится. Такой же эффект имеет место и при использовании других кодов и методов [10].

Мы увеличили пространственное разрешение до 12800 ячеек для достижения качественного соответствия численного решения аналитическому. На рис. 7 изображены результаты сравнения численного и аналитического решений для пространственного разрешения 12800 ячеек.

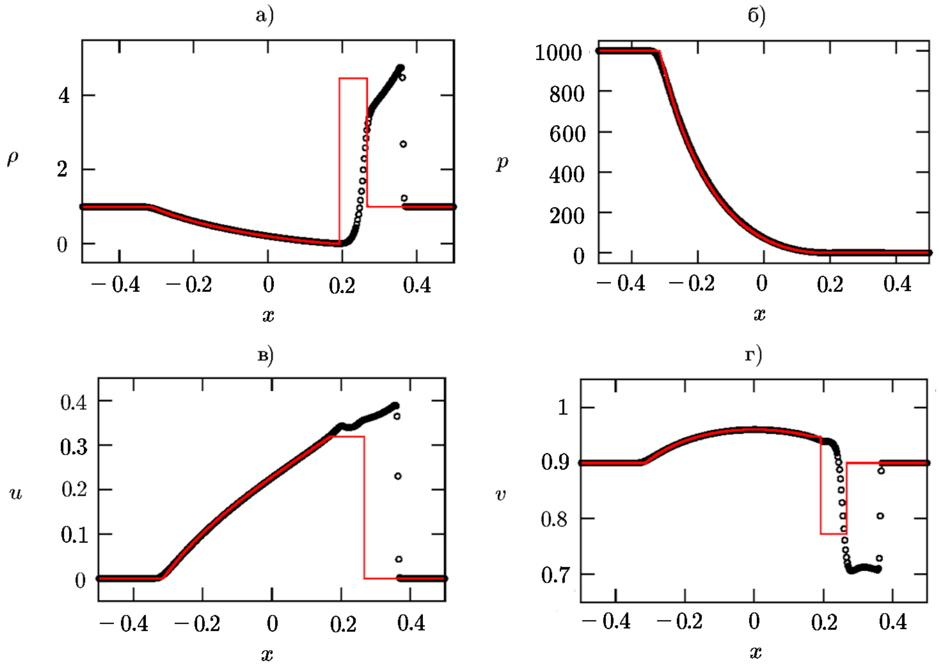

Рис. 6. Тест 6. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками

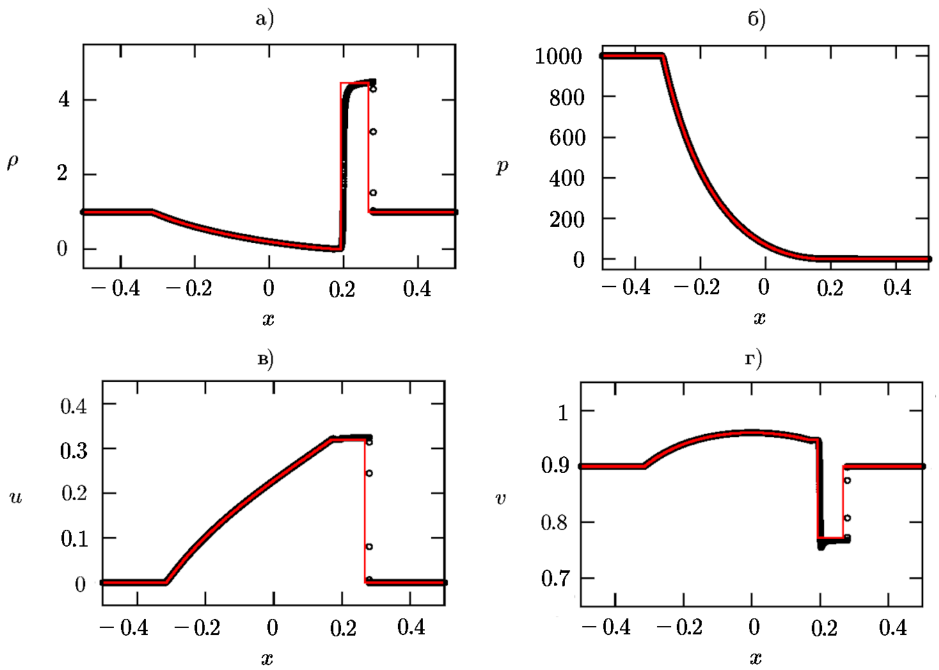

Рис. 7. Тест 6 (пространственное разрешение 12 800 ячеек). Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками

3.7. Тест 7: релятивистская задача Эйнфельдта

Рассмотрим эволюцию релятивистского газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ до момента времени $t = 0.15$. В начальный момент времени параметры газа выбраны слева: $\rho^{\mathrm{L}} = 1$, $p^{\mathrm{L}} = 0.4$, $v_x^{\mathrm{L}} = -0.8$, $v_y^{\mathrm{L}} = 0$, $v_z^{\mathrm{L}} = 0$; и справа: $\rho^{\mathrm{R}} = 1$, $p^{\mathrm{R}} = 0.4$, $v_x^{\mathrm{R}} = 0.8$, $v_y^{\mathrm{R}} = 0$, $v_z^{\mathrm{R}} = 0$. На рис. 8 изображены результаты сравнения численного и аналитического решений.

Тест направлен на исследование возможности численного метода воспроизводить область сильного разрежения из-за разлета газа в разные стороны. Этот тест является почти точным расширением гидродинамического теста Эйнфельдта. Разработанный численный метод успешно справился с тестом без особенностей, воспроизведя обе волны разрежения.

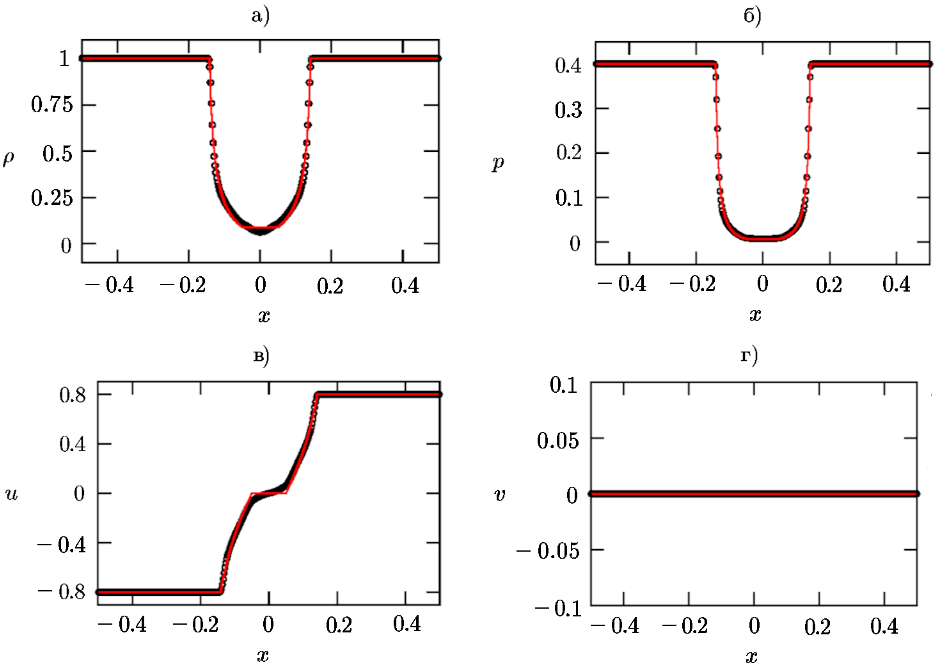

Рис. 8. Тест 7. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками

4. Моделирование релятивистской струи

Рассмотрим галактическую струю с плотностью $\rho_J = 10^{-3}\,\text{см}^{-3}$ радиуса $R_J = 200$ парсек, движущуюся с фактором Лоренца $\Gamma = 5$ и релятивистским числом Маха $\mathcal{M} = 8$. Атмосфера галактики имеет температуру $T_A = 10^7$ Кельвинов и плотность $\rho_A = 10^{-2}\,\text{см}^{-2}$. Показатель адиабаты выбран $\gamma = 5/3$. На рис. 9 представлены результаты моделирования эволюции галактической струи.

Из результатов моделирования видно, что вперед уходит ударная волна, скорость распространения которой соответствует скорости света. За ударным фронтом идет оболочка, разделяющая ударный фронт и горячую область, где достигается максимальная температура. Внутренняя часть течения имеет низкую плотность (в зарубежной литературе — кокон) и ограничена контактной поверхностью. На внешней стороне кокона ближе к основанию распространяются течения типа обратного течения, которые, в свою очередь, взаимодействуют с потоком струи. Характерное время развития неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца у основания струи составляет 6000 лет, что соответствует результатам вычислительного эксперимента.

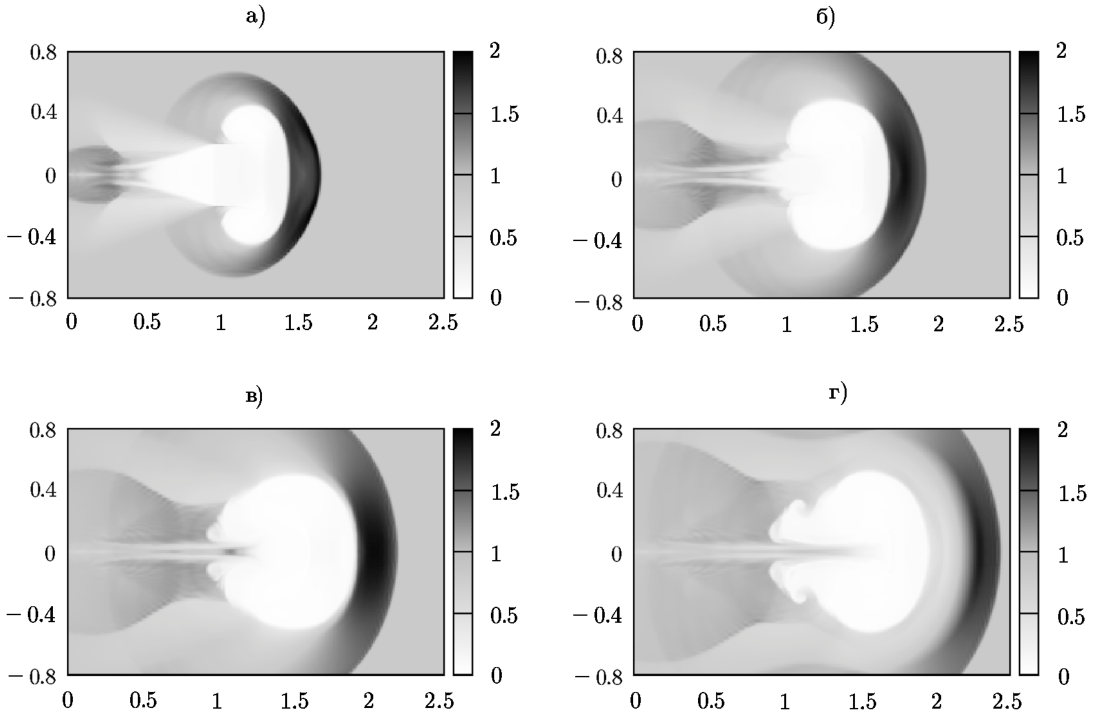

Рис. 9. Плотность газа в экваториальной плоскости в $10^{-2}\,\text{см}^{-3}$ на моменты времени: 3000 лет (а), 4500 лет (б), 6000 лет (в), 7500 лет (г)

5. Дискуссия

Верификация построенной численной методики на тестах показывает, что при воспроизведении сильных ударных волн в релятивистском газе диссипативные свойства схемы Лакса–Фридрихса являются преимуществом, так как схема свободна от нефизичных осцилляций. В случае слабых волн использование кусочно-параболической реконструкции позволяет получать диссипацию на малое число ячеек. Ранее в работе [1] мы поднимали вопрос об использовании эквивалентности массы и энергии с альтернативной записью уравнения энергии в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\Gamma^2\rho h - p - \Gamma\rho\big) + \sum_{\xi=x,y,z}\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\rho h\Gamma^2 v_\xi - \rho\Gamma v_\xi\big) = 0.$$

В ряде работ (например, [3]) утверждается, что такая запись эффективна при воспроизведении разреженных областей с нерелятивистскими скоростями. В работе [12] для решения подобной проблемы предлагается использовать дополнительное уравнение для релятивистской энтропии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\sigma D) + \sum_{\xi=x,y,z}\frac{\partial}{\partial \xi}\,(\sigma D v_\xi) = 0,$$

где $\sigma = p/\rho^\gamma$ — функция энтропии. Исходя из неубывания энтропии, решение последнего уравнения использовалось для регуляризации решения

$$p = \sigma\rho^\gamma, \quad p < \sigma\rho^\gamma.$$

На рис. 10 изображены результаты сравнения регуляризации численного решения при использовании дополнительного уравнения для релятивистской энтропии (рис. 10 а) и альтернативной записи уравнения для полной энергии (рис. 10 б). Черным цветом изображено численное решение без регуляризации, серым цветом изображено численное решение с соответствующей регуляризацией.

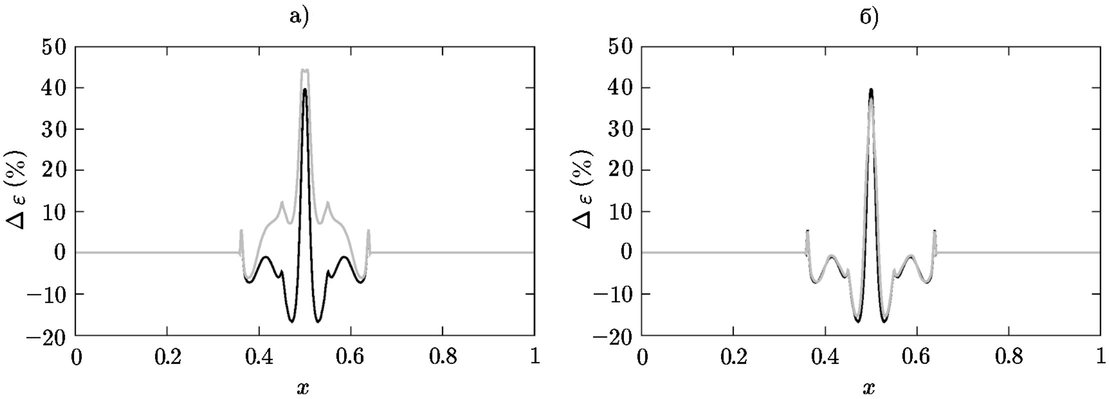

Рис. 10. Тест Эйнфельдта. Погрешность во внутренней энергии (в процентах) при использовании различных способов регуляризации

В случае использования альтернативной записи уравнения для полной энергии численное решение существенно не изменяется, имеет тот же характер и улучшено на два процента. При использовании уравнения для энтропии спад внутренней энергии $\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}$ заметно меньше (примерно на 12 %), при этом имеет рост на 5 % в центре области. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что при необходимости воспроизведения разреженных холодных областей течения газа с нерелятивистскими скоростями целесообразно использование переопределенной системы уравнений с дополнительным уравнением для энтропии.

6. Заключение

Представлена схема типа Лакса–Фридрихса с использованием кусочно-параболического представления решения для решения уравнений специальной релятивистской гидродинамики. Несмотря на повышенную диссипативность схемы Лакса–Фридрихса среди схем подобного класса, именно ее диссипативные и робастные свойства позволяют воспроизвести сложные течения релятивистского газа без лишних осцилляций и других численных артефактов. При этом кусочно-параболическое представление позволяет значительно уменьшить диссипацию до двух ячеек на слабых ударных волнах и до одной ячейки на сильных ударных волнах, что соответствует схемам типа PPM и WENO.

Литература

1. **Kulikov I.M., Karavaev D.A.** A piecewise-parabolic reconstruction of the physical variables in a low-dissipation HLL method for the numerical solution of the equations of special relativistic hydrodynamics // Numerical Analysis and Applications. — 2023. — Vol. 16, № 1. — P. 45–60.
2. **Kulikov I.M.** A low-dissipation numerical scheme based on a piecewise parabolic method on a local stencil for mathematical modeling of relativistic hydrodynamic flows // Numerical Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 13, № 2. — P. 117–126.
3. **Lamberts A., Fromang S., Dubus G., Teyssier R.** Simulating gamma-ray binaries with a relativistic extension of RAMSES // Astronomy & Astrophysics. — 2013. — Vol. 560. — Article № A79.
4. **Anton L., Miralles J., Marti J. et al.** Relativistic magnetohydrodynamics: renormalized eigenvectors and full wave decomposition Riemann solver // The Astrophysical J. Supplement Series. — 2010. — Vol. 188. — P. 1–31.
5. **Guercilena F., Radice D., Rezzolla L.** Entropy-limited hydrodynamics: a novel approach to relativistic hydrodynamics // Computational Astrophysics and Cosmology. — 2017. — Vol. 4. — Article № 3.
6. **Guermond J.-L., Pasquetti R., Popov B.** Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws // J. Comput. Physics. — 2011. — Vol. 230. — P. 4248–4267.
7. **Wu K.** Design of provably physical-constraint-preserving methods for general relativistic hydrodynamics // Physical Review D. — 2017. — Vol. 95. — Article № 103001.
8. **Kulikov I., Vorobyov E.** Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // J. Comput. Physics. — 2016. — Vol. 317. — P. 318–346.
9. **Kriksin Y.A., Tishkin V.F.** Variational entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for gasdynamic equations // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2019. — Vol. 11. — P. 1032–1040.
10. **Lora-Clavijo F., Cruz-Osorio A., Guzman F.** CAFE: a new relativistic MHD code // The Astrophysical J. Supplement Series. — 2015. — Vol. 218. — Article № 24.
11. **Marti J., Mueller E.** The analytical solution of the Riemann problem in relativistic hydrodynamics // J. Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 258. — P. 317–333.
12. **Huber D., Kissmann R.** Special relativistic hydrodynamics with CRONOS // Astronomy & Astrophysics. — 2021. — Vol. 653. — Article № A164.

Поступила в редакцию 04 июня 2023 г.
После исправления 22 июня 2023 г.
Принята к печати 05 сентября 2023 г.