

чении $a_0 \approx 150$ составляет практически 90%; при увеличении радиуса кольца энергетический баланс приближается к данным по взрыву с цилиндрической симметрией.

Приведенные результаты исследований подтверждают реальность предложенного в работе метода и полученного на его основе уравнения (2.5) пульсации тороидальной полости в сжимаемой жидкости.

Автор выражает благодарность В. Т. Кузавову за помощь при проведении экспериментов.

Поступила 7 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Кедринский В. К. О пульсации тороидального газового пузыря в жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
2. Коул Р. Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950.
3. Кузнецов Н. М., Шведов К. К. Изэнтропическое расширение продуктов детонации гексогена.—ФГВ, 1967, № 2.

УДК 532.529.5:533.6.011.72

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОГО МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Р. Р. Айдагулов, Н. С. Хабеев, В. Ш. Шагапов

(Москва, Уфа)

Для описания структуры ударной волны в жидкости с пузырьками используется односкоростная с двумя давлениями модель двухфазной смеси [1] и уравнение теплопроводности внутри пузырьков. Ударные волны в жидкости с пузырьками газа теоретически и экспериментально исследовались в работах [1—4]. В [5] исследовалась структура ударной волны в указанной среде с учетом сжимаемости несущей фазы, двухскоростных и двухтемпературных эффектов и было показано, что при учете тепловой неравновесности роль двухскоростных эффектов становится незаметной на фоне гораздо более сильной тепловой диссипации. В связи с этим здесь для простоты рассмотрение проводится в рамках односкоростной модели [6]. Цель данного исследования — уточнение результатов работы [6] и проверка приемлемости использования определяемого из приближения тонкого теплового пограничного слоя фиксированного коэффициента теплообмена или числа Нуссельта для нестационарного теплообмена между пульсирующим пузырьком и жидкостью.

1. Основные уравнения. Рассматривается движение жидкости со взвешенными в ней пузырьками газа при следующих основных допущениях [1]: 1) расстояния, на которых параметры потока меняются существенно, много больше расстояний между пузырьками, которые, в свою очередь, гораздо больше размеров пузырьков (т. е. объемные содержания газовой фазы α_2 достаточно малы, $\alpha_2 < 0,1$); 2) смесь монодисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса R ; 3) вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсациях пузырьков.

Кроме того, предполагается, что массообмен между фазами отсутствует, а температура жидкости T_1 (в отличие от температуры газа в пузырьке)

постоянна. Последнее ($T_1 = \text{const}$) всегда выполняется при не очень высоких давлениях из-за преобладающего массового содержания жидкости (которая становится термостатом) и существенно упрощает задачу, так как отпадает необходимость рассмотрения уравнения энергии жидкости.

Расчеты [7] показали, что даже при очень сильном сжатии пузырька ($p_e/p_0 \sim 10$), когда в центре пузырька достигаются высокие значения температуры (газа), температура поверхности пузырька T_σ повышается незначительно ($T_\sigma \sim 1,1 T_0$). Давление в пузырьке достигает при этом значений, значительно превосходящих парциальное давление насыщенных паров, соответствующее таким значениям температуры поверхности пузырька. Это обстоятельство свидетельствует в пользу допущения о несущественности межфазного массообмена.

Для рассматриваемой смеси в рамках представлений сплошной среды, следуя [1], запишем дифференциальные уравнения сохранения массы каждой фазы и импульса всей смеси в одномерном стационарном движении

$$(1.1) \quad \begin{aligned} d(\rho_1 v)/dx &= 0, \quad d(\rho_2 v)/dx = 0, \\ \rho_i &= \rho_i^0 \alpha_i, \quad i = 1, 2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ (\rho_1 + \rho_2) v dv/dx &= - dp_1/dx, \end{aligned}$$

где индекс $i = 1, 2$ относится к параметрам соответственно жидкости и газа; α_i , p_i , ρ_i и ρ_i^0 — объемное содержание, давление, средняя и истинная плотность i -й фазы; v — скорость. Примем уравнения состояния фаз

$$(1.2) \quad p_2 = (\gamma - 1) c_{V_2} \rho_2^0 T_2, \quad u_2 = c_{V_2} T_2, \quad \rho_1^0 = \text{const},$$

где c_{V_2} , u_2 , T_2 , γ — удельная теплоемкость при постоянном объеме, удельная внутренняя энергия, температура и показатель адиабаты газа.

Вместо уравнения притока тепла второй фазы, использованного в [6], здесь применяется уравнение теплопроводности внутри пузырьков

$$(1.3) \quad c_{p_2} \rho_2^0 v \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\rho_2^0}{\rho_{20}^0 \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_2 \frac{\rho_2^0 y^4}{\rho_{20}^0 \xi^2} \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \right) + v \frac{dp_2}{dx},$$

где c_{p_2} — теплоемкость газа при постоянном давлении; y — сферическая эйлерова координата, $0 \leq y \leq R(t)$; λ_2 — коэффициент теплопроводности газа; ξ — лагранжева координата, $0 \leq \xi \leq R_0$. Индекс 0 внизу относится к равновесному состоянию перед волной. Для малых объемных содержаний газа ($\alpha_2 < 0,1$) и для не очень сильных волн ($p_e/p_0 < 10$), как показано в [7], граничное условие на поверхности пузырька можно ставить в виде $T_2(R, t) = T_0$, так как жидкость обладает значительно большей теплопроводностью и значительно меньшей температуропроводностью, чем газ.

Уравнение неразрывности для газа в лагранжевых координатах

$$(1.4) \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\rho_{20}^0 \xi^2}{\rho_2^0 y^2}.$$

Давление в пузырьке предполагается однородным (гомобаричность [7]), что обеспечивается, если радиальная скорость стенок пузырька значительно меньше скорости звука в газе.

В дальнейшем удобно пользоваться дифференциальным уравнением для давления, которое является интегралом уравнения (1.3) при сделанных допущениях и граничных условиях

$$(1.5) \quad v dp_2/dx = - [3(\gamma - 1)/R] q_R - (3\gamma p_2/R) v dR/dx,$$

где q_R — поток тепла из пузырька в жидкость.

Давления фаз и размер пузырьков должны быть связаны условием совместного деформирования. Таким условием в данном случае является уравнение Рэлея, соответствующее пульсациям одиночного сферического пузырька в безграничной несжимаемой жидкости. Для рассматриваемого случая оно имеет вид

$$(1.6) \quad Rvdw/dx + 3w^2/2 + 4v_1w/R = (p_2 - p_1 - 2\sigma/R)/\rho_1^0, \\ vdR/dx = w,$$

где w — радиальная скорость стенок пузырька; v_1 и σ — коэффициенты вязкости жидкости и поверхностного натяжения.

Система уравнений замкнута. Перейдем к безразмерным переменным и параметрам

$$(1.7) \quad P_i = p_i/p_{20}, \quad V = v/a_*, \quad W = w/a_*, \quad a_*^2 = p_{20}/\rho_{10}, \\ X = x/R_0, \quad \eta = \xi/R_0, \quad r = R/R_0, \quad \delta = y/R_0, \\ \Theta_i = T_i/T_0, \quad S = 2\sigma/R_0p_{20}, \quad \kappa = v_1/R_0a_*, \\ M_2 = \rho_2/\rho_1, \quad M_{20} = \rho_{20}^0/\rho_{10}^0, \quad z_i = \rho_i^0/\rho_{i0}^0.$$

Система имеет первые интегралы, следующие из (1.1),

$$(1.8) \quad \alpha_1 V = \alpha_{10} V_0, \quad z_2 \alpha_2 V = \alpha_{20} V_0, \\ \alpha_{10} V_0 V (1 + M_{20}) + P_1 = \alpha_{10} V_0^2 (1 + M_{20}) + P_{10}.$$

Следует отметить, что пузырьковая структура существует при $\alpha_2 \leq 0,4$, а при умеренных давлениях ($p \sim 10-30$ бар) отношение истинных плотностей фаз $\langle \rho_2^0 \rangle / \rho_1^0 \ll 1$ (при $p = 1$ бар, $\langle \rho_2^0 \rangle / \rho_1^0 \sim 10^{-3}$). В этом случае массовым содержанием газа можно пренебречь по сравнению с 1, так как

$$(1.9) \quad M_{20} = (\rho_{20}^0 / \rho_{10}^0) \alpha_2 \ll 0(\alpha_2) \ll 1.$$

С учетом (1.7), (1.9) из (1.3)–(1.6) получим систему уравнений относительно безразмерных переменных

$$(1.10) \quad dr/dX = W/V, \quad \partial\delta/\partial\eta = (\eta/\delta)^2/z_2;$$

$$(1.11) \quad dW/dX = (P_2 - P_1 - 1,5W^2 - S/r - 4\kappa W/r)/rV;$$

$$(1.12) \quad dP_2/dX = -(3(\gamma - 1)/P_{20}a_*rV)q_R - (3\gamma P_2/r)dr/dx;$$

$$(1.13) \quad \frac{d\Theta_2}{dX} = \frac{D_2 r^3 z_2}{R_0 a_* V \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{z_2 \delta^4}{\eta^2} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} z_2^3 \frac{dP_2}{dX};$$

$$(1.14) \quad \Theta_2(r, X) = 1.$$

Остальные переменные, не входящие под знак производной, определяются конечными соотношениями, следующими из (1.2), (1.8),

$$P_2 = z_2 \Theta_2, \quad V = V_0(\alpha_{10} + \alpha_{20}/z_2), \\ \alpha_2 = \alpha_{20}/(\alpha_{10} z_2 + \alpha_{20}), \quad P_1 = P_{10} - \alpha_{10} V_0(V - V_0).$$

Далее будет рассматриваться структура плоской стационарной ударной волны, в которой среда переходит из начального равновесного состояния (соответствующие параметры снабжены индексом 0 внизу)

$$V = V_0, \quad W_0 = 0, \quad \Theta_{20} = \Theta_{10} = 1, \quad P_{20} = P_{10} + S = 1$$

в другое равновесное состояние (соответствующие параметры снабжены индексом e внизу)

$$(1.15) \quad V = V_e, \quad W_e = 0, \quad \Theta_{2e} = \Theta_{1e} = 1, \quad P_{2e} = P_{1e} + S/r_e.$$

Значения параметров в состоянии e определяются из конечных соотношений по заданным параметрам в начальном состоянии

$$\alpha_{20}, V_0, M_{20}, P_{10}, z_{10} = z_{20} = r_0 = \Theta_0 = 1.$$

Эти соотношения с учетом (1.15) принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha_{1e} V_e &= \alpha_{10} V_0, \quad \alpha_{2e} V_e z_{2e} = \alpha_{20} V_0, \quad \alpha_{1e} + \alpha_{2e} = 1, \\ z_{2e} &= P_{2e} = r_e^{-3}, \quad \alpha_{10} V_0 (V_0 - V_e) = P_{1e} - P_{10}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай малого влияния капиллярных эффектов ($S \ll 1$), что вполне оправдано для не очень мелких пузырей ($R_0 \sim 1$ мм) применительно к экспериментам [2, 3]. Тогда из этих соотношений можно получить

$$P_e = P_{1e} = P_{2e} = \alpha_{10} \alpha_{20} V_0^2.$$

2. Расчет структуры ударной волны. Для исследования асимптотического поведения системы в окрестности начального равновесного состояния система линеаризуется относительно значений параметров в точке O и решение ищется в виде затухающей при $X \rightarrow -\infty$ экспоненты (пространственная координата точки O есть $X = -\infty$, а точки $e - X = +\infty$)

$$\begin{aligned} (2.1) \quad V &= V_0 + A_V \exp(hX), \quad r = 1 + A_r \exp(hX), \\ W &= A_W \exp(hX), \quad P_i = 1 + A_{P_i} \exp(hX), \\ z_2 &= 1 + A_{z_2} \exp(hX), \quad \Theta_2 = 1 + A_{\Theta_2} \exp(hX) \quad (i = 1, 2), \quad (\operatorname{Re} h > 0) \end{aligned}$$

После линеаризации система основных уравнений запишется следующим образом:

$$(2.2) \quad hA_r = A_W/V_0;$$

$$(2.3) \quad hA_W = (A_{P_2} + \alpha_{10} V_0 A_V - 4\kappa A_W)/V_0;$$

$$(2.4) \quad hA_{P_2} = 3\gamma \left[2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=1} / V_0 \operatorname{Pe} - hA_r \right];$$

$$(2.5) \quad hA_{\Theta_2} = \frac{\gamma-1}{\gamma} hA_{P_2} + 2\nabla^2 A_{\Theta_2} / V_0 \operatorname{Pe};$$

$$(2.6) \quad A_{P_2} = A_{z_2} + A_{\Theta_2};$$

$$(2.7) \quad A_V = -\alpha_{20} V_0 A_{z_2}, \quad A_{P_1} = -\alpha_{10} V_0 A_V,$$

где $\nabla^2 \Theta = \Theta_{\eta\eta} + 2\Theta_{\eta}/\eta$; $\operatorname{Pe}_* = 2R_0 a_* / D_2$ — число Пекле.

Решение уравнения (2.5), удовлетворяющее граничному условию (1.14) и условию конечности температуры в центре пузырька, имеет вид

$$(2.8) \quad A_{\Theta_2} = A \operatorname{sh}(\eta G^{1/2}) / \eta + [3(\gamma-1)/G] (AB - GA_r),$$

где

$$(2.9) \quad G = hV_0 \operatorname{Pe}/2; \quad B = G^{1/2} \operatorname{ch} G^{1/2} - \operatorname{sh} G^{1/2};$$

$$A = 3(\gamma-1)A_r / [\operatorname{sh} G^{1/2} + 3(\gamma-1)B/G].$$

Получено однопараметрическое семейство (амплитуды возмущений всех параметров можно выразить через одну из амплитуд). Условие существования нетривиального решения приводит к трансцендентному уравнению

$$(2.10) \quad V_0^2 h^2 = 3P_e - 3\gamma/[1 + 3(\gamma-1)B_1/G] - 4\kappa V_0 h,$$

где $B_1 = G^{1/2} \operatorname{cth} G^{1/2} - 1$ (это уравнение получено в пренебрежении капиллярными эффектами ($S \ll 1$) и массовым содержанием газовой фазы ($M_{20} \ll 1$)).

Для маловязких жидкостей и для не очень мелких пузырей ($R_0 \sim \sim 1$ мм) применительно к экспериментам [2, 3] $\kappa \ll 1$. Поэтому последним членом в правой части уравнения (2.10) можно пренебречь. В этом случае уравнение (2.10) можно переписать в виде

$$(2.11) \quad \varphi(\lambda) = \lambda + B\lambda/(\lambda^2 - A) + C(\lambda^{1/2} \operatorname{cht} \lambda^{1/2} - 1) = 0,$$

где $\lambda = hV_0 \operatorname{Re}/2$; $A = (3/4)P_e \operatorname{Re}^2$; $B = (3/4)\gamma \operatorname{Re}^2$; $c = 3(\gamma - 1)$. Функция $\varphi(\lambda)$ мероморфная, так как $\varphi_1(\lambda) = \lambda^{1/2} \operatorname{cth} \lambda^{1/2}$ — аналитическая функция.

Для решения типа уравнения (2.1) удовлетворяют лишь корни с положительной действительной частью. Докажем существование и единственность корня уравнения (2.11) в правой полуплоскости.

Известно [8], что для мероморфной функции

$$(2.12) \quad N - P = \Delta_C \arg \varphi(\lambda)/2\pi,$$

где N — число нулей; P — число полюсов в области, ограниченной замкнутой кривой C .

Возьмем контур, показанный на фиг. 1. Вычислим $\Delta_C \arg \varphi(\lambda)$ для этого контура при $\delta \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(2.13) \quad \Delta_C \arg \varphi(\lambda) = \Delta_{LN} + \Delta_{NS} + \Delta_{SP} + \Delta_{PL}.$$

На дуге LN при $\delta \rightarrow +\infty$

$$(2.14) \quad \varphi(\lambda) = \lambda + 0(\lambda).$$

На дуге SP

$$(2.15) \quad \varphi(\lambda) = (1 - B/A + C/3)\lambda + 0(\lambda).$$

Из (2.14), (2.15) при $1 - B/A + C/3 \neq 0$

$$(2.16) \quad \Delta_{LN} + \Delta_{SP} = 0(1);$$

$$(2.17) \quad \Delta_{NS} \arg \varphi(\lambda) = \Delta_{PL} \arg \varphi(\lambda),$$

так как $\varphi(\lambda)$ такова, что

$$(2.18) \quad \varphi(\bar{\lambda}) = \overline{\varphi(\lambda)}.$$

Из (2.12)–(2.18) получаем

$$(2.19) \quad N - P = -\Delta_{PL} \arg \varphi(\lambda)/\pi.$$

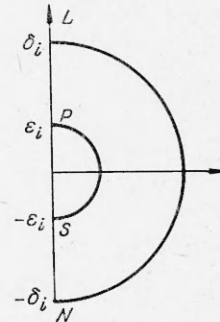
Вводя для отрезка OL параметр $\lambda = iy^2/2$, можно показать, что

$$(2.20) \quad g(y) = (1/C) \operatorname{Re} \varphi(\lambda) = -2 + y(\operatorname{sh} y + \sin y)/(\operatorname{ch} y - \cos y) > 0$$

при $y = 0$. Из (2.14), (2.15), (2.19), (2.20), подставляя вместо A, B, C их значения и учитывая, что $\varphi(\lambda)$ в правой полуплоскости имеет лишь один плюс $\lambda = +\sqrt{A}$, получим

$$N = 0,5[1 + \operatorname{sgn}(P_e - 1)].$$

Для волны сжатия ($P_e > 1$) указанный корень в правой полуплоскости существует ($N = 1$). Этот единственный в правой полуплоскости корень уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ является действительным, так как $\varphi(\lambda)$ обладает свойством (2.18), из которого следует, что если λ — корень, то $\bar{\lambda}$ — также корень уравнения



Ф и г. 1

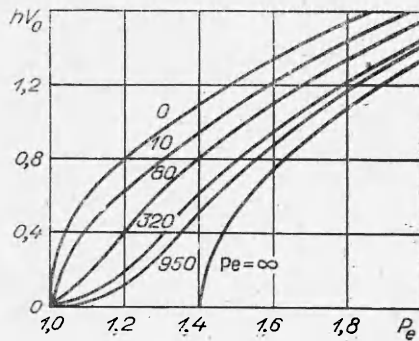
$\varphi(\lambda) = 0$. Корень уравнения (2.10) находится вычислением на ЭВМ.

На фиг. 2 приведена зависимость корня уравнения (2.10) от интенсивности волны P_e при различных числах Пекле. В адиабатическом случае уравнение (2.10) переходит в квадратное уравнение

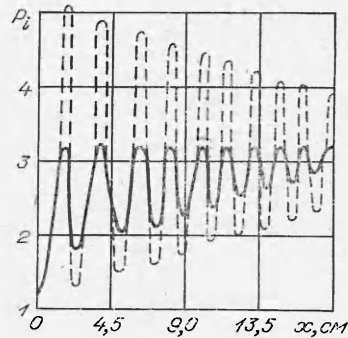
$$V_0^2 h^2 = 3(P_e - \gamma),$$

откуда видно, что в этом случае указанный корень существует лишь при $P_e > \gamma$. При наличии теплообмена корень существует при всех $P_e > 1$.

Интегральные кривые системы основных уравнений допускают смещение вдоль оси X . Поэтому фиксируем при $X = 0$ некоторое значение



Ф и г. 2



Ф и г. 3

безразмерного радиуса пузырька r , причем r надо взять достаточно близким к 1, чтобы в области $X \leq 0$ выполнялось линейное решение. Из (2.2)—(2.9) по амплитуде возмущения радиуса пузырька и значению корня уравнения (2.10) можно определить значения остальных параметров при $X = 0$.

Эти величины определяют начальные условия для численного решения нелинейной задачи в области $X > 0$. Задача решалась конечно-разностным методом в лагранжевых переменных, при этом внутренность пузыря разбивалась на сферические слои (аналогично [7] с использованием граничного условия на поверхности в форме $T_2(R, t) = T_0$). Уравнение притока тепла (1.13) переходит при этом в систему n обыкновенных дифференциальных уравнений (n — число слоев), а уравнение неразрывности (1.10) в систему n алгебраических уравнений. В результате имеем задачу Коши для системы ($n + 3$) обыкновенных дифференциальных уравнений (1.10)—(1.13). Эта задача решалась на ЭВМ методом Рунге — Кутты. Число слоев варьировалось и выбиралось из условия, чтобы его увеличение практически не влияло на результаты.

Равновесным состояниям перед и за ударной волной соответствуют точки O и e , являющиеся особыми точками системы дифференциальных уравнений. Исследование асимптотики при $X \rightarrow -\infty$ было необходимо для выхода из особой точки.

Рассчитывались варианты структуры ударной волны в растворе 1 : 1 глицерина с водой, содержащем воздушные пузырьки, применительно к экспериментам Нордзи [2] и соответствующим расчетам [6].

Использовались следующие значения термодинамических параметров:

$$\begin{aligned} \rho_{10}^0 &= 1126 \text{ кг/м}^3, \quad \nu_1 = 75 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, \\ T_0 &= 300 \text{ К}, \quad c_{V_2} = 716 \text{ м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{град}), \\ \lambda_2 &= 2,42 \cdot 10^{-2} \text{ кгм}/(\text{с}^3 \cdot \text{град}), \quad \gamma = 1,4. \end{aligned}$$

На фиг. 3 в качестве примера приведена рассчитанная структура волны со следующими значениями параметров, определяющих исходное состояние смеси (интенсивность волны $P_e = p_e/p_{20}$, ее скорость v_0 относительно среды перед фронтом):

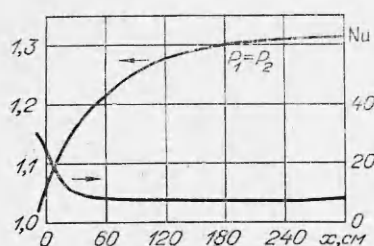
$$R_0 = 1,55 \text{ мм}, \alpha_{20} = 0,0423,$$

$$p_0 = 0,358 \text{ бар}, P_e = 3,32,$$

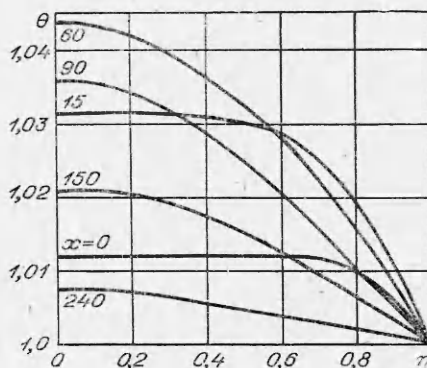
$$a_* = 5,64 \text{ м/с}, V_0 = 9,05 (v_0 = 50,9 \text{ м/с}),$$

штриховая кривая — давление в пузырьках P_2 , сплошная — давление в жидкости P_1 .

В [5] показано, что в сильных волнах ($P_e \sim 2-3$) в момент первого максимального сжатия пузырьков происходит дробление каждого пузырька на 2 одинаковых. Этот эффект учтен при расчетах: в момент первого максимального сжатия пузырька вводился разрыв, где скачком уменьшался размер пузырька в $\sqrt[3]{2}$ раза, а остальные параметры не менялись (радиальная скорость дробящихся и раздробившихся пузырьков в момент дробления равна нулю). Такая схема учета дробления пузырьков в волне является сильно упрощенной. В ней не учитывается изменение энергии в системе при дроблении и обмен энергией с волной. Однако она не противоречит энергетическому балансу в системе (в случае, когда можно пренебречь поверхностным натяжением). Действительно, в момент максимального сжатия энергия в системе складывается из кинетической энергии макроскопического движения $(\rho_1 + \rho_2)v^2/2$ и внутренней энергии пузырей, определяемой давлением в них, а энергия пульсационного движения в этот момент равна нулю. Первые две составляющих энергии (при фиксированных значениях остальных параметров) не зависят от степени диспергованности второй фазы (размеров пузырьков), а третья — в момент дробления равна нулю.



Ф и г. 4



Ф и г. 5

На фиг. 4 приведена структура волны ($Nu = 2Rq_R / [\lambda_2(T_0 - \langle T_2 \rangle)]$ — безразмерный тепловой поток — число Нуссельта) со следующими значениями параметров:

$$R_0 = 1,4 \text{ мм}, \alpha_{20} = 0,0246, p_0 = 0,902 \text{ бар},$$

$$P_e = 1,32, \quad a_* = 8,95 \text{ м/с},$$

$$V_0 = 7,42 \quad (v_0 = 66,2 \text{ м/с}).$$

Фиг. 3 дает пример ударной волны с пульсационной, а фиг. 4 — с монотонной структурой. На фиг. 5 представлено распределение температуры внутри воздушных пузырьков в слабой волне на различных расстояниях.

Результаты данного исследования показали приемлемость использованных ранее в [6] приближенных формул для коэффициента межфазного теплообмена в рамках двухтемпературной модели. В случае ударной волны с пульсационной структурой (см. фиг. 3) безразмерный тепловой поток (число Нуссельта) также колеблется, принимая в некоторые промежутки времени (из-за возникновения «температурных ям» в пузырьке, как показано в [7]) даже отрицательные значения. Однако осредненное за период значение числа Нуссельта и теплообмен пузырька с жидкостью в среднем хорошо описываются приближенной формулой [6]. Кривые радиус — время, рассчитанные с использованием уравнения (1.3) и приближенных формул [6], практически совпадают (имеют одинаковую частоту и декремент затухания колебаний). В случае волны с монотонной структурой значение числа Нуссельта вначале совпадает с использованным в [6] значением ($Nu = 30$), а затем согласуется с ним лишь по порядку величины. Однако это не приводит к существенным ошибкам в результатах, хотя позволяет значительно упростить расчеты, что особенно важно при исследовании нестационарных волн.

Авторы выражают благодарность Р. И. Нигматулину за постановку задачи и внимание к работе, А. Г. Петрову за полезное обсуждение.

Поступила 13 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Noordzij L. Shock waves in bubble-liquid mixtures. Phys. Comm. Twente Univ. Techn., 1971.
2. Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусев Б. Г., Шрейбер И. Р. О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде. — Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 2.
3. Noordzij L. Shock waves in mixtures of liquids and air bubbles. Twente, 1973.
4. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М., Симаков С. М., Тимофеев Е. И. Разрушение воздушных пузырьков в жидкости ударной волной. — Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 4.
5. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 6.
6. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
7. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Теплообмен газового пузырька с жидкостью. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 5.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.