

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.832.7, 550.83.015, 550.83.017

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ
ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КАРОТАЖА СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОЛОЖЕНИИ
ТОКОВОГО ЭЛЕКТРОДА В СКВАЖИНЕ И АНИЗОТРОПИИ СРЕДЫ

А.Д. Каринский, Д.С. Даев

*Российский государственный геолого-разведочный университет им. Серго Орджоникидзе,
117997, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 23, Россия*

Основой теории каротажа сопротивления (КС) первоначально послужило решение задачи Фока—Штефанеску. Это — прямая задача теории стационарного электрического поля \mathbf{E} , в которой модель среды — изотропная, кусочно-однородная, с одной границей — поверхностью неограниченного по высоте кругового цилиндра. Цилиндр — модель скважины, заполненной буровым раствором, с удельным электрическим сопротивлением (УЭС) $\rho = \rho_c$. Остальная часть геоэлектрической модели с $\rho = \rho_n$ соответствует пройденным скважиной горным породам. Источником первичного поля \mathbf{E} является заряд точечного токового электрода A , расположенного на оси скважины.

В работе приведено решение прямой задачи для поля \mathbf{E} в случае, когда электрод A расположен в произвольной точке скважины, а окружающая ее среда — анизотропна с осью анизотропии, параллельной оси скважины. На основе полученного решения были разработаны программы численных расчетов. Приведены полученные на основе расчетов кривые зондирования, иллюстрирующие влияние на результаты КС смещения электродов с оси скважины на ее границу. Показано, как влияет анизотропия окружающей модель скважины среды на «показания» градиент-зондов и потенциал-зондов КС при расположении электродов на стенке скважины.

Каротаж сопротивления, электроды на границе скважины, анизотропия, математическое моделирование.

THE EFFECTS OF TOOL ECCENTRICITY AND FORMATION ANISOTROPY
ON RESISTIVITY LOGS: FORWARD MODELING

A.D. Karinskiy and D.S. Daev

The theory of resistivity logging (RL) originally stems from the Fock–Stefănescu forward problem solution for the stationary electric field \mathbf{E} in a piecewise homogeneous isotropic medium, with a single boundary corresponding to the surface of a cylinder unlimited by height. The cylinder simulates a borehole filled with drilling mud of resistivity $\rho = \rho_b$, which penetrates a formation with resistivity of rocks $\rho = \rho_r$. The primary field \mathbf{E} is produced by the charge of a current electrode A placed on the cylinder axis. In this paper the forward problem for the field \mathbf{E} is investigated for the electrode A at an arbitrary point off the axis of a borehole embedded in a transversely isotropic formation, with an anisotropy axis parallel to the borehole axis. The solution of forward problem is used in algorithms and respective software for processing resistivity logs affected by electrode eccentricity and formation anisotropy. The changes caused to apparent resistivity by the two effects are estimated in percent for axial and lateral electrode dispositions.

Resistivity logging, electrodes, borehole wall, anisotropy, eccentricity, forward modeling

ВВЕДЕНИЕ

При обосновании каротажа сопротивления (КС) основой его теории и методики интерпретации результатов измерений послужило решение прямой задачи для стационарного электрического поля \mathbf{E} в модели изотропной среды с одной цилиндрической границей. Неограниченный по высоте круговой цилиндр с удельным электрическим сопротивлением $\rho = \rho_c$ — модель скважины, заполненной буровым раствором, остальная среда — однородные по удельному электрическому сопротивлению ρ горные породы. Источник первичного поля \mathbf{E} — точечный токовый электрод, расположенный на оси симметрии среды. Эта задача получила название «задача Фока–Штефанеску» [Альпин, 1971]. Ее решение может послужить для интерпретации результатов КС, если длина зонда значительно меньше толщины пройденного скважиной непроницаемого пласта. В дальнейшем на основе подхода, примененного при решении этой задачи, были получены решения задач для случая, когда токовый точечный электрод расположен на оси симметрии модели кусочно-однородной изотропной среды с несколькими коаксиальными цилиндрическими границами. Разделяемые этими границами области пространства могут моделировать скважину, зону проникновения (фильтрата промывочной жидкости), окаймляющую зону и неизменную часть проницаемого пласта.

Однако фактически при КС, даже в вертикальных скважинах при их большой глубине, токовые, а также измерительные электроды расположены не на оси, а на стенке скважины. Вопрос о том, как «смещение» электродов с оси скважины влияет на результаты КС, пока недостаточно изучен. Некоторые результаты наших исследований по этой тематике для применяемых на практике зондов КС были представлены в докладе на одной из конференций «Новые идеи в науках о Земле» [Даев, Каринский, 2013].

Отметим, что многие горные породы анизотропны по удельному электрическому сопротивлению (УЭС) ρ . В частности, у терригенных осадочных пород, которые могут быть коллекторами нефти и газа, анизотропия обычно обусловлена чередованием различающихся по литологии тонких прослоев, например, алевролитов и аргиллитов или аргиллитов и песчаников. Обычно применяемой для анизотропных горных пород моделью среды является среда с осевой анизотропией. Удельное электрическое сопротивление ρ такой среды характеризуют два значения: ρ_n вдоль оси анизотропии n (ориентированной по нормали к напластованию тонкослоистых пород) и ρ_t — по любому, ортогональному этой оси, направлению t . Коэффициент анизотропии $\lambda = \sqrt{\rho_n/\rho_t}$.

В типичных условиях, при субгоризонтальном залегании пластов и прослоев, слагающих осадочный чехол, направление оси n в тонкослоистых породах близко к вертикальному. Поэтому можно допустить, что в вертикальных скважинах ось скважины и ось анизотропии n пройденных скважиной пород параллельны. Полученные ранее результаты математического моделирования для этих условий показали следующее. При расположении токовых и измерительных электродов на оси симметрии среды (на оси модели скважины) из параметров электрической анизотропии окружающей модель скважины среды основное влияние на результаты КС оказывает значение ρ_t (парадокс анизотропии).

В последние годы существенно возросли такие характеристики ЭВМ, и в частности персональных компьютеров, как скорость вычислений, объем оперативной памяти и др. Совершенствуются также методы расчетов, применяемые при математическом моделировании. Поэтому появилась возможность на основе 3D-математического моделирования выявить особенности влияния параметров среды на результаты электрических и электромагнитных методов исследования скважин для моделей, приближающихся к реальным условиям измерений. Примерами таких исследований являются опубликованные работы [Эпов и др., 2007, 2015].

В этой работе приведено решение прямой задачи для стационарного поля \mathbf{E} для одномерной модели «скважина—анизотропный пласт неограниченной толщины» при смещенном с оси скважины точечном токовом электроде. Проведено сравнение расчетных «двухслойных» кривых зондирования для предельных градиент-зондов и потенциал-зондов КС при расположении электродов на оси модели и на стенке скважины. Для случая, когда электроды расположены на стенке скважины, количественно охарактеризовано влияние электрической анизотропии среды на «показания» этих зондов.

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

На рис. 1, *a* показана модель, для которой было получено решение прямой задачи стационарного электрического поля \mathbf{E} . Изотропная область V_1 с УЭС $\rho_c = \rho_1$ в форме неограниченного по высоте кругового цилиндра — модель скважины. «Внешняя» область пространства V_2 , анизотропная по УЭС ρ , с осью анизотропии n , параллельной оси скважины, и УЭС ρ_n, ρ_t . Токовый точечный электрод A расположен в области V_1 на расстоянии r_A от оси симметрии Z модели среды.

Стационарное электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} представим в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^n + \mathbf{E}^b = -\text{grad}U, \quad U_{1,2} = U^n + U_{1,2}^b, \quad (1)$$

где $U_{1,2}$ и $U_{1,2}^b$ — потенциалы суммарного (\mathbf{E}) и вторичного (\mathbf{E}^b) полей соответственно в областях пространства V_1, V_2 . Источник первичного поля \mathbf{E}^n с потенциалом U^n — заряд e_A точечного токового электрода A с эмиссией тока I . Если электрод A расположен в среде с УЭС ρ_1 , то $e_A = \varepsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I$, где $\varepsilon_0 \approx 10^{-9}/(36 \cdot \pi)$, Ф/м — электрическая постоянная. Источники вторичного поля \mathbf{E}^b — индуцированные заряды. Это — поверхностные заряды на границе S областей V_1, V_2 (см. рис. 1, *a*), а также объемные заряды в области V_2 , если $\rho_n \neq \rho_t$ и коэффициент анизотропии $\lambda \neq 1$. В монографии А.А. Кауфмана и Г.В. Келлера [Kaufman, Keller, 1989] показано, что (в отличие от изотропной среды) объемные заряды существуют в однородной анизотропной среде, если компонента электрического поля \mathbf{E} по оси анизотропии n изменяется по оси анизотропии. В работе [Каринский, 2010] показано, как распределены индуцированные заряды в анизотропной среде при разных способах возбуждения поля \mathbf{E} .

Воспользуемся декартовыми (x, y, z) и цилиндрическими (r, φ, z) координатами с общими осью Z , началом координат 0 и с началом отсчета азимутальной координаты φ от направления оси X . Пусть электрод A лежит в плоскости $z = 0$ на оси X и на расстоянии r_A от начала координат, а точка наблюдения M имеет произвольные координаты $\{x, y, z\}$, $\{r, \varphi, z\}$ (см. рис. 1). Тогда для координат точек A и M справедливы равенства: $x_A = r_A, y_A = 0, z_A = 0, \varphi_A = 0$; $x_M = x = r \cdot \cos\varphi$, $y_M = y = r \cdot \sin\varphi, z_M = z$. На рис. 1, *б* в плоскости $z = 0$ показаны положения точки A и проекции M' точки M на эту плоскость.

$$\text{Известно, что потенциал } U^n = \frac{C}{L} = \frac{C}{\sqrt{(x-x_A)^2 + y^2 + z^2}}, \quad C = \frac{\rho_1 I}{4\pi}.$$

Расстояние между точками A и M : $L = \sqrt{l^2 + z^2}$, где $l^2 = r_A^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r_A \cdot \cos\varphi$. Используя интеграл Вебера

$$\frac{1}{\sqrt{l^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(ml) \cos(mz) dm,$$

(где $K_0(ml)$ — функция Макдональда нулевого порядка), можем представить выражение для потенциала U^n в следующем виде

$$U^n = \frac{2C}{\pi} \int_0^\infty K_0\left(m\sqrt{r^2 + r_A^2 - 2 \cdot r \cdot r_A \cdot \cos\varphi}\right) \cos(mz) dm.$$

В соответствии с теоремой сложения для функций Бесселя

$$\begin{aligned} K_0\left(m\sqrt{r^2 + r_A^2 - 2 \cdot r \cdot r_A \cdot \cos\varphi}\right) &= K_0(mr_A) I_0(mr) + 2 \sum_{n=1}^\infty K_n(mr_A) I_n(mr) \cos(n\varphi) = \\ &= 2 \sum_{n=0(0.5)}^\infty K_n(mr_A) I_n(mr) \cos(n\varphi), \end{aligned}$$

где $I_n(\zeta), K_n(\zeta)$ — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда порядка n аргумента ζ . В правой части последнего равенства обозначение $n = 0(0.5)$ в ряде \sum указывает на то, что соответству-

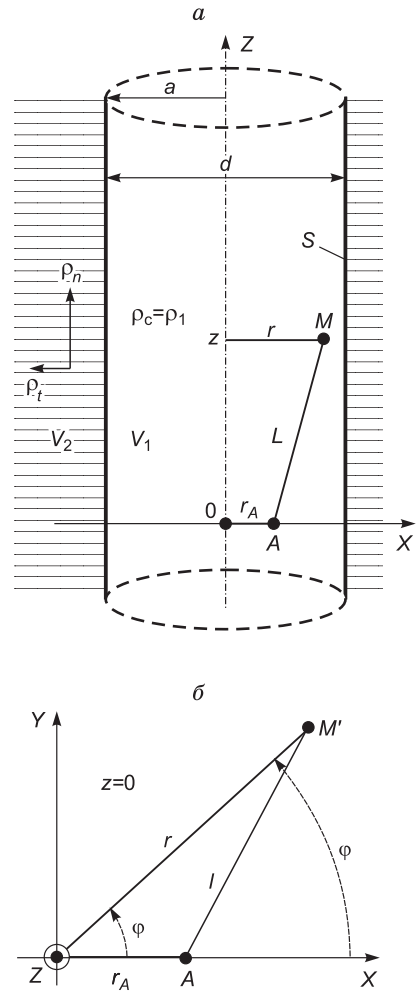


Рис. 1. Модель среды и положение точек A и M

ющий значению $n = 0$ член ряда следует умножить на 0.5. Итак, потенциал первичного поля \mathbf{E}^n в точке M можем представить в следующем виде

$$U^n = \frac{\rho_1 I}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\sum_{n=0(0.5)}^\infty K_n(mr_A) I_n(mr) \cos(n\varphi) \right] \cos(mz) dm. \quad (2)$$

При постановке краевой задачи, соответствующей показанной на рис. 1 модели, было принято во внимание следующее. Для стационарного электрического поля справедливо уравнение непрерывности электрического тока: $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, где \mathbf{j} — вектор плотности электрического тока. В изотропной области V_1 по закону Ома в дифференциальной форме $\mathbf{j}^{(1)} = \mathbf{E}^{(1)}/\rho_1 = -\operatorname{grad} U_1/\rho_1$. Тогда $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U_1/\rho_1) = 0$. В однородной изотропной среде ($\rho_1 = \text{const}$) получаем для U_1 при $L \neq 0$ уравнение Лапласа: $\operatorname{div} \operatorname{grad} U_1 = \nabla^2 U_1 = 0$. Это же уравнение (при $L \neq 0$) справедливо для потенциала U^n и во всей области V_1 — для потенциала $U_1^B = U_1 - U^n$, т. е. в V_1 : $\nabla^2 U_1^B = 0$.

В анизотропной области V_2 скалярные компоненты вектора \mathbf{j} в цилиндрической системе координат определяют равенства: $j_r^{(2)} = \frac{1}{\rho_t} E_r^{(2)} = -\frac{1}{\rho_t} \frac{\partial U_2}{\partial r}$, $j_\varphi^{(2)} = \frac{1}{\rho_t} E_\varphi^{(2)} = -\frac{1}{r \cdot \rho_t} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi}$, $j_z^{(2)} = \frac{1}{\rho_n} E_z^{(2)} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial U_2}{\partial z}$.

На этой основе было получено дифференциальное уравнение для потенциала U_2 . Кроме уравнений для U_1 , U_2 краевая задача включает условия на бесконечности, условие у особой точки A и условия сопряжения на границе S , на которой координата $r = a = d/2$ (см. рис. 1, a). На границе S непрерывны потенциал U и нормальная к S компонента j_r . Можем поставить следующую краевую задачу для потенциала U стационарного электрического поля \mathbf{E} .

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ при } r < a: \quad & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = 0; \\ 2) \text{ при } r > a: \quad & \frac{\lambda^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) + \frac{\lambda^2}{r^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = 0; \\ 3) \text{ при } L \rightarrow \infty: \quad & U_1 \rightarrow 0, U_2 \rightarrow 0; \\ 4) \text{ при } L \rightarrow 0: \quad & U_1 \rightarrow \infty \text{ как } U^n; \\ 5) \text{ при } r = a: \quad & \text{а) } U_2 = U_1, \text{ б) } \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial U_2}{\partial r} = \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial U_1}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В соответствии с теоремой единственности, решения прямой задачи для стационарного поля \mathbf{E} , удовлетворяющие (3) функции U_1 , U_2 , являются единственными [Альпин и др., 1985]. Заметим, что, в соответствии с условиями задачи и четной симметрией поля U относительно плоскостей $y = 0$, $z = 0$ (при $z_A = 0$, $\varphi_A = 0$), функции U_1 , U_2 должны быть четными по аргументу z и четными периодическими функциями по аргументу φ .

При получении решений дифференциальных уравнений для потенциалов $U_{1,2}$ в (3) был применен подход, аналогичный тому, который (для изотропной модели среды) приведен в работе [Светов, 2008]. Получим решение второго уравнения в (3) методом разделения переменных. Предположим, что частное решение уравнения для U_2 может быть выражено в виде произведения трех независимых функций аргументов r , φ , z :

$$U_2 = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z). \quad (4)$$

При условии (4) из 2-го уравнения в (3) получаем

$$\frac{\lambda^2 \cdot \Phi \cdot Z}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\lambda^2 \cdot R \cdot Z}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + R \cdot \Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \text{ Разделим все слагаемые этого уравнения на произведение } R \cdot \Phi \cdot Z \text{ и перенесем последний член уравнения в правую часть. Тогда}$$

$$\frac{\lambda^2}{R \cdot r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\lambda^2}{\Phi \cdot r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \text{ Левая часть последнего уравнения зависит от аргументов } r \text{ и } \varphi, \text{ а}$$

правая часть — от аргумента z . Такое возможно, если левая и правая части уравнения равны одной и той же произвольной константе. Обозначая эту константу $m^2 \geq 0$, получаем

$$\lambda^2 \left[\frac{1}{R \cdot r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi \cdot r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right] = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = m^2. \text{ Отсюда следует, что функция } Z \text{ удовлетворяет}$$

дифференциальному уравнению 2-го порядка $\frac{d^2 Z}{dz^2} = -m^2 \cdot Z$. Его решение:

$$Z = a_1 \cos(mz) + a_2 \sin(mz), \quad (5)$$

где a_1, a_2 — константы. Из равенства $\lambda^2 \left[\frac{1}{R \cdot r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi \cdot r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right] = m^2$ получаем $\frac{1}{R \cdot r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi \cdot r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2$

или $\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left(\frac{m \cdot r}{\lambda} \right)^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$. Последнее уравнение определяет равенство двух взаимно неза-

висимых функций. Можем приравнять левую и правую части этого уравнения произвольной константе $n^2 \geq 0$. Одно из получаемых при этом уравнений: $d^2 \Phi / d\varphi^2 = -n^2 \Phi$. Его решение:

$$\Phi = b_1 \cos(n\varphi) + b_2 \sin(n\varphi), \quad (6)$$

где b_1, b_2 — константы. Второе уравнение: $\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left(\frac{m \cdot r}{\lambda} \right)^2 = n^2$ или $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \left[\left(\frac{m \cdot r}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] R = 0$. После несложных преобразований, обозначая $\zeta = m \cdot r / \lambda$, получа-

ем модифицированное уравнение Бесселя [Справочник, 1979]: $\zeta^2 \frac{d^2 R}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dR}{d\zeta} - [\zeta^2 + n^2] R = 0$. Его част-

ные решения — модифицированная функция Бесселя $I_n(m \cdot r / \lambda)$ и функция Макдональда $K_n(m \cdot r / \lambda)$ целого порядка n , действительного аргумента $m \cdot r / \lambda$. Решение этого уравнения есть линейная комбинация частных решений:

$$R = c_1 I_n(m \cdot r / \lambda) + c_2 K_n(m \cdot r / \lambda), \quad (7)$$

где c_1, c_2 — константы. Отметим, что при $\zeta \rightarrow 0$ функция $K_n(\zeta) \rightarrow \infty$, а при $\zeta \rightarrow \infty$ функция $I_n(\zeta) \rightarrow \infty$.

Принимая во внимание, что в области V_2 $a < r < \infty$, для выполнения 3-го условия в (3) примем в (7) значение $c_1 = 0$. Как уже было отмечено, в выбранной системе координат потенциал U — четная функция аргументов φ и z . Поэтому в выражениях (5), (6) множители $a_2 = 0, b_2 = 0$. В соответствии с (4), получаем следующее частное решение для U_2 : $U_2(m, n) = D(m, n) K_n(m \cdot r / \lambda) \cos(n\varphi) \cos(mz)$, где $D(m, n) = a_1 \cdot b_1 \cdot c_2$. Зная, что потенциал U — периодическая функция аргумента φ , зависимость $U_2(m)$

можем представить в виде ряда Фурье: $U_2(m) = \sum_{n=0(0.5)}^{\infty} [D(m, n) \cdot K_n(m \cdot r / \lambda) \cos(n\varphi)] \cos(mz)$. Так как

m — любая неотрицательная константа, то общее решение для U_2 выражает интеграл: $U_2 = \int_0^{\infty} U_2(m) dm$,

т. е. $U_2 = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0(0.5)}^{\infty} [D(m, n) \cdot K_n(m \cdot r / \lambda) \cos(n\varphi)] \right] \cos(mz) dm$.

В области V_1 $0 < r < a$, а $\lambda = 1$. Поэтому решение 1-го уравнения в (3) для U_1 можем искать в следующем виде: $U_1 = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0(0.5)}^{\infty} [F(m, n) \cdot I_n(m \cdot r) \cos(n\varphi)] \right] \cos(mz) dm$. Но для того, чтобы удовлетворить 4-му условию в (3), а также упростить определение неизвестных множителей, представим выражения для $U_1 U_2$ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{\rho_1 I}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0(0.5)}^{\infty} I_n(mr) [K_n(mr_A) + A] \cos(n\varphi) \right] \cos(mz) dm, \\ U_2 &= \frac{\rho_1 I}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0(0.5)}^{\infty} [B \cdot K_n(m \cdot r / \lambda)] \cos(n\varphi) \right] \cos(mz) dm \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где $A = A(m, n)$, $B = B(m, n)$ — коэффициенты, зависящие от параметров показанной на рис. 1, a модели среды и координаты r_A , но, конечно, не зависящие от координат r , φ , z точки наблюдения M . Для определения A , B послужили два условия сопряжения на границе модели скважины (при $r = a$) в краевой задаче (3).

При $E = -\text{grad } U$ скалярная компонента $E_z = -\partial U / \partial z$. Для этой компоненты в области V_1 из первого равенства в (8) получаем выражение

$$E_z^{(1)} = \frac{\rho_1 I}{\pi^2} \int_0^\infty m \left[\sum_{n=0(0.5)}^\infty I_n(mr) [K_n(mr_A) + A] \cos(n\varphi) \right] \sin(mz) dm. \quad (9)$$

Более сложной проблемой, чем получение в аналитическом виде решения прямой задачи, являлась разработка алгоритмов расчетов и программ, которые позволили бы проводить численное моделирование. Согласно (8), (9), выражения для потенциалов U_1 , U_2 и компоненты $E_z^{(1)}$ поля E — это (в смысле главного значения) интегралы. Подынтегральные функции — бесконечные ряды. Члены этих рядов содержат модифицированные функции Бесселя I_n и функции Макдональда K_n произвольного целого порядка n , а также — тригонометрические функции. При расчете функций I_n , K_n мы воспользовались выражениями, приведенными в книге [Справочник, 1979].

Для численных расчетов несобственных (в смысле главного значения) интегралов при знакопеременной зависимости подынтегральной функции от переменной интегрирования m ($\cos(mz)$ в (8), $\sin(mz)$ в (9)) было использовано преобразование Эйлера [Дашевский, 1982]. На эффективность применения такого преобразования обратил наше внимание Ю.А. Дашевский.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ГРАДИЕНТ-ЗОНДОВ И ПОТЕНЦИАЛ-ЗОНДОВ КС

В этом разделе представлены результаты численного моделирования, полученные на основе выражений (8), (9). Приведено сравнение результатов моделирования сигналов для предельных градиент-зондов и предельных потенциал-зондов КС в случаях, когда токовые и измерительные электроды расположены на стенке скважины, либо на ее оси. В последнем случае основой для расчетов послужило решение задачи Фока—Штефанеску.

На рис. 2, 4, показаны модели, для которых были проведены расчеты, и кривые зондирования для предельных градиент-зонда и потенциал-зонда КС. Кривые приведены для следующих случаев. 1. Токовый и измерительные точечные электроды лежат на оси симметрии изотропной модели (штрихпунктирные линии). 2. Электроды расположены на стенке скважины, на прямой, параллельной оси скважины (сплошные линии). При этом $\rho_n = \rho_t = \rho_{\text{п}}$, $\lambda = 1$, $r = r_A = a$, $\varphi = 0$ (см. рис. 1). 3. Положение электродов такое же, как в предыдущем случае, но окружающая среда анизотропна: $\rho_n = 4 \cdot \rho_r$, $\lambda = 2$ (штриховые линии).

У предельного однополюсного градиент-зонда (токовый электрод — B_∞) расстояние между приемными электродами $MN \rightarrow 0$ и при ориентации зонда по оси Z измеряемый сигнал пропорционален компоненте $E_z(O)$ в центре O отрезка MN . Для предельного градиент-зонда кажущееся удельное электрическое сопротивление $\rho_k = \rho_k^{\text{гз}} = [4\pi L^2 |E_z(O)|] / I$, где $L = AO$ — длина градиент-зонда.

Относительное влияние δ , которое оказывает смещение зонда с оси на стенку скважины, было определено для изотропной модели среды ($\rho_n = \rho_t = \rho_{\text{п}}$) следующим образом:

$$\delta = [(\rho_k^{\text{ст}} - \rho_k^{\text{осв}}) / \rho_k^{\text{ст}}] \cdot 100\%, \quad (10)$$

где $\rho_k^{\text{ст}}$ и $\rho_k^{\text{осв}}$ — значения ρ_k соответственно при положении зонда на стенке и на оси скважины. Результаты расчетов показали следующее (рис. 3).

Для градиент-зондов при $L/d < 1-1.5$ и $\rho_{\text{п}}/\rho_c \ll 1$ δ — отрицательна, а ее абсолютная величина может достигать сотен процентов. Если $\rho_{\text{п}}/\rho_c \gg 1$ и $L/d < 0.2-0.3$, то величина $\delta \approx 50\%$. При выполнении этих неравенств можно пренебречь влиянием кривизны стенки скважины, и модель приближенно соответствует случаю, когда трехэлектродная наземная установка метода сопротивлений в электроразведке расположена на плоской границе однородного проводящего полупространства ($\rho = \rho_c$) с изолятором. В этом случае, как известно, значение ρ_k в 2 раза больше, чем в безграничной однородной среде с $\rho = \rho_c$.

На практике, например при боковом каротажном зондировании (БКЗ), длина самого короткого градиент-зонда больше диаметра скважины. Результаты расчетов (см. рис. 3, a) показывают, что при этом абсолютная величина $|\delta|$ не превышает 5%, если (при $\rho_{\text{п}}/\rho_c > 1$) отношение $L/d > 2-3$ либо (при $\rho_{\text{п}}/\rho_c < 1$) отношение $L/d > 5-6$. Фактически это означает, что (при двухслойной модели среды) для «средних» и «длинных» зондов БКЗ смещение зонда с оси на стенку скважины при $\rho_{\text{п}}/\rho_c > 1$ не оказывает

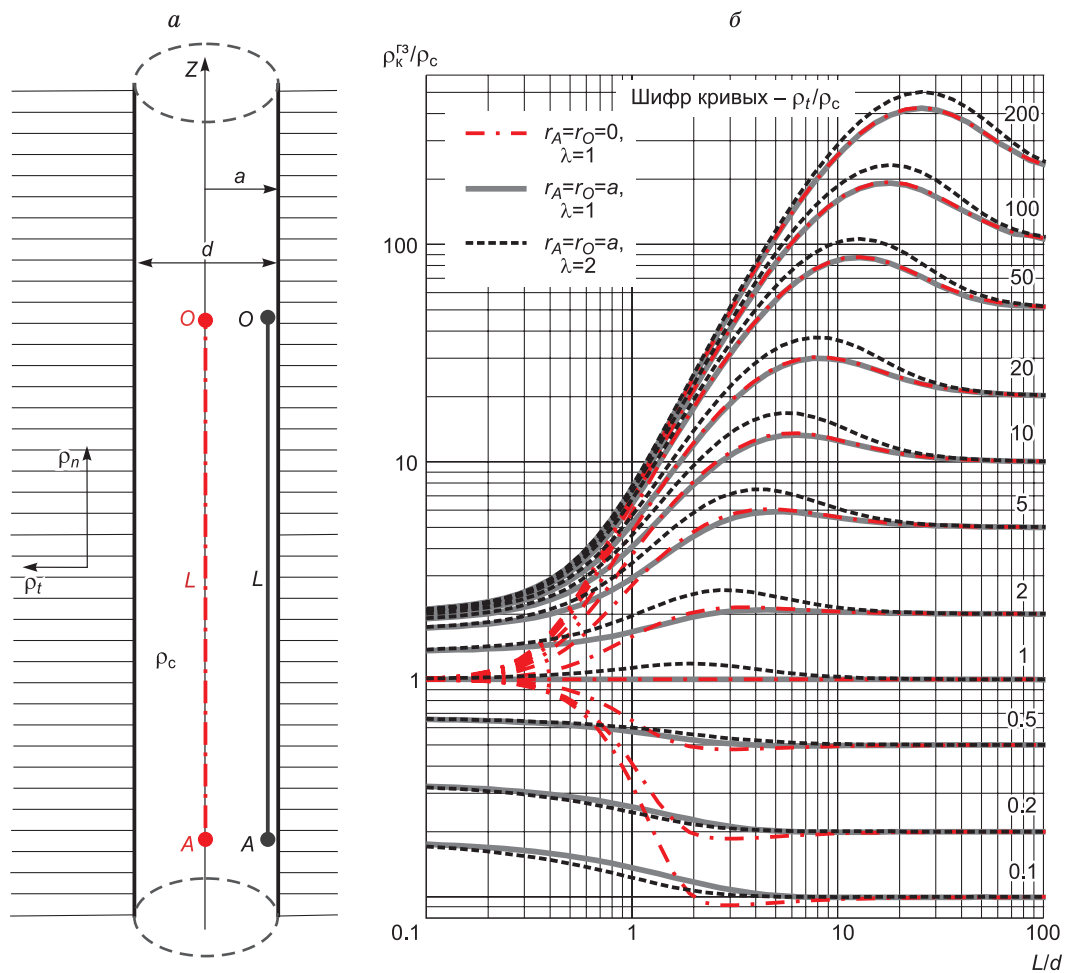


Рис. 2. Модель среды и предельного градиент-зонда (а) и двухслойные кривые зондирования (б)

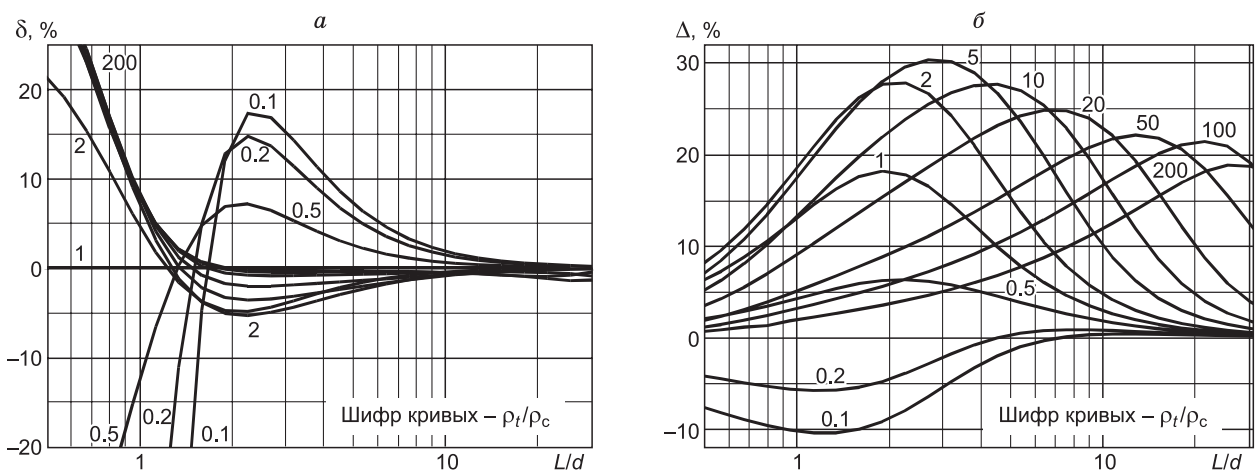


Рис. 3. Зависимости δ (а) и Δ (б) от отношения L/d .

Предельный градиент-зонд.

значительного влияния на результаты БКЗ. Вместе с тем надо принять во внимание, что при большом диаметре скважины результаты измерений с короткими зондами БКЗ (первые доли метра) могут значительно измениться при смещении зонда с оси скважины на ее границу, особенно при $\rho_n/\rho_c < 1$. Например, при $\rho_n/\rho_c = 0.2$ и $L/d = 2-2.5$, $\delta \approx 15\%$.

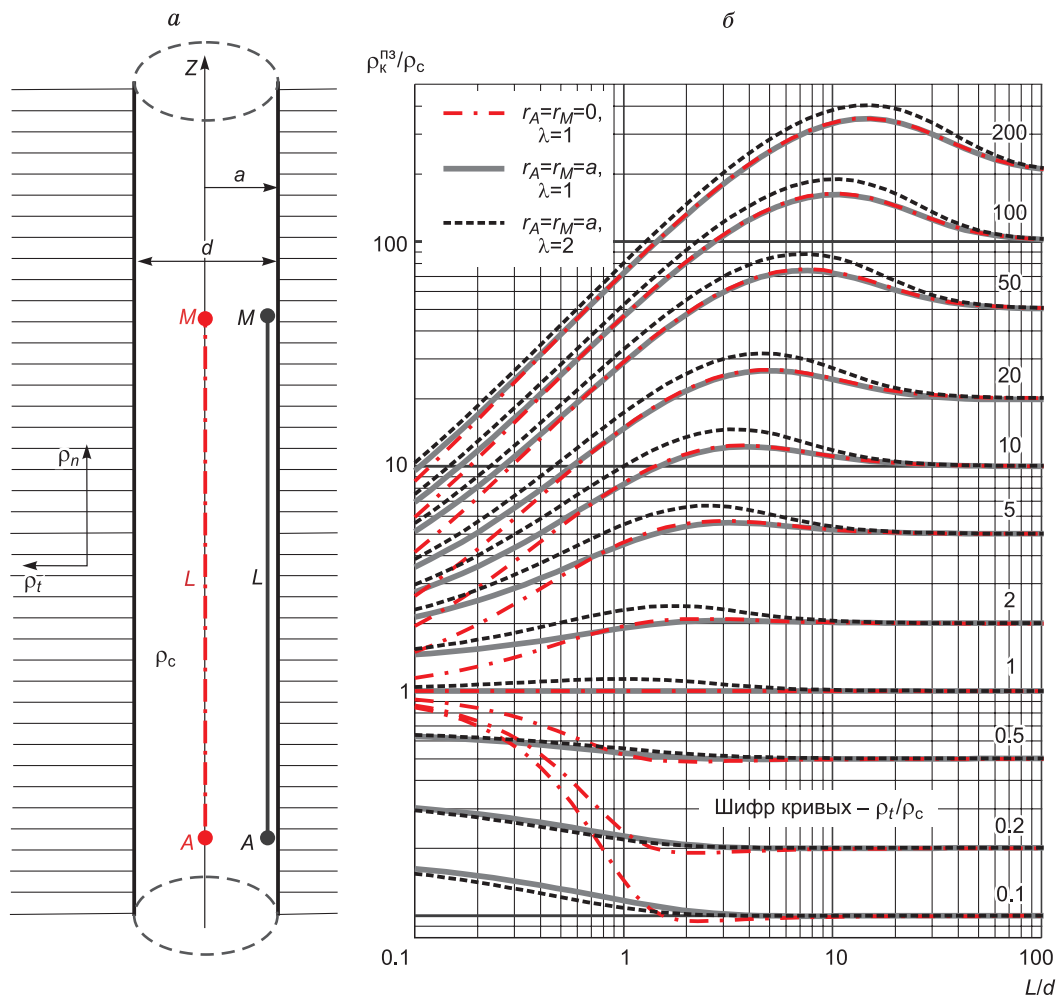


Рис. 4. Модель среды и предельного потенциал-зонда (а) и двухслойные кривые зондирования (б)

Теперь рассмотрим влияние электрической анизотропии среды (параметров ρ_r, ρ_n) на результаты КС. Решение соответствующей прямой задачи стационарного поля \mathbf{E} в безграничной однородной анизотропной среде показало следующее. Если электроды лежат на одной прямой, ориентированной по оси анизотропии n , то $\rho_k = \rho_t$ (парадокс анизотропии). При расположении такого зонда на оси скважины величина ρ_k испытывает влияние ρ_n , но это влияние невелико. Количественно степень этого относительного влияния можем оценить, пользуясь выражением

$$\Delta = [(\rho_k^{ан} - \rho_k^{из}) / \rho_k^{из}] \cdot 100\%, \quad (11)$$

где $\rho_k^{из}$ значение ρ_k при $\rho_n = \rho_r$, а $\rho_k^{ан}$ значение ρ_k при $\rho_n \neq \rho_r$. Полученные нами ранее результаты расчетов на основе решения осесимметричной задачи для модели «скважина—пласт неограниченной мощности» показали, что, например при $\lambda = 2$ и широких пределах изменения L/d и ρ_r/ρ_c , величина Δ не превышает 35 % [Каринский, 2004]. Отметим, что в трехслойной модели, позволяющей учесть влияние зоны проникновения, при понижающем проникновении и $\lambda = 1.5—2$ величина Δ может превышать 60 % [Каринский, 2005].

Полученное решение прямой задачи (8), (9) и показанные на рис. 2 результаты моделирования позволили оценить, как влияет на величину Δ эксцентриситет градиент-зонда КС. Анализ результатов расчетов (сплошные и штриховые линии, см. рис. 2) показал следующее. При изменении ρ_r/ρ_c в пределах от 0.1 до 200 и $\lambda = 2$ величина Δ меняется в пределах от -10% до $+30\%$. Значение $|\Delta|$, как правило, максимально при отношениях L/d , соответствующих экстремумам на кривых зондирования. Если $L \gg d$ или $L \ll d$, то $\Delta \approx 0$. Из результатов моделирования следует, что эксцентриситет градиент-зонда КС не влияет существенно на величину $\rho_k^{из}$ (рис. 2, 3). Влияние ρ_n и λ на $\rho_k^{из}$ невелико. При расположении зонда на стенке скважины, основное влияние на $\rho_k^{из}$ оказывает параметр ρ_r , а также значения ρ_c и L/d .

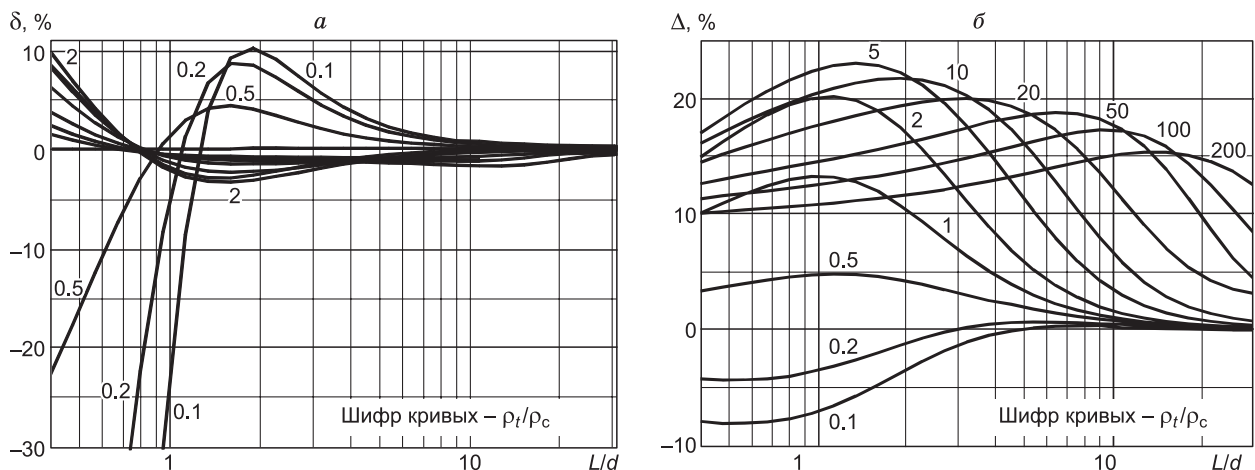


Рис. 5. Зависимости δ (а) и Δ (б) от отношения L/d .

Предельный потенциал-зонд.

На рис. 4 приведены кривые зондирования для предельного потенциал-зонда МА КС (электроды B_∞, N_∞). Как показали результаты численного моделирования, для этого зонда его эксцентриситет оказывает иное влияние на кажущееся удельное электрическое сопротивление ρ_k потенциал-зонда ($\rho_k^{пз}$), чем на значение $\rho_k^{гз}$. В частности, влияние эксцентриситета на вычисленное в соответствии с выражением (10) значение $\delta \geq 5\%$, если при $\rho_t/\rho_c \ll 1$ отношение $L/d < 3-4$ (рис. 5, а).

Влияние анизотропии среды (при фиксированном значении λ) на $\rho_k^{пз}$ при расположении электродов на стенке скважины немного меньше, чем на $\rho_k^{гз}$. Полученные данные моделирования показали, что (при одних и тех же пределах изменения ρ_t/ρ_c и $\lambda = 2$) для потенциал-зонда значение Δ меняется в пределах от -8% до $+23\%$ (см. рис. 5, б). Как уже было отмечено, для градиент-зонда при $\lambda = 2$ пределы изменения Δ : от -10% до $+30\%$ (см. рис. 3, б). Для любого из этих зондов КС: при $L/d \rightarrow \infty$ значение $\Delta \rightarrow 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе решения (8), (9) прямой задачи для стационарного электрического поля E в показанной на рис. 1 модели были разработаны алгоритмы и программы. Это послужило основой для получения результатов численного моделирования для зондов КС в тех (типичных для практики) условиях, когда электроды расположены не на оси скважины, а на ее стенке. Решение задачи было получено для условий, когда окружающая среда может быть изотропной, либо трансверсально-изотропной (одноосно-анизотропной) с осью анизотропии n , коллинеарной оси скважины.

Результаты математического моделирования для применяемых в настоящее время при геофизических исследованиях скважин градиент-зондов и потенциал-зондов КС показали следующее. При типичных условиях, когда длины применяемых зондов КС в несколько раз превышают диаметр скважины, смещение токовых и измерительных электродов с оси скважины на ее стенку не оказывает существенного (значительно превышающего требования к погрешности измерений в КС) влияния на результаты КС (см. рис. 2, 3, а, 4, 5, а). Такое смещение электродов (в «двухслойной» осесимметричной модели среды) также не оказывает значительного влияния на влияние параметров электрической анизотропии окружающей модель скважины среды. Определяемые по результатам измерений значения $\rho_k^{гз}$ и $\rho_k^{пз}$, помимо ρ_c , зависят в основном от продольного удельного электрического сопротивления ρ_l (см. рис. 2, 3, б, 4, 5, б).

Но на основе полученного решения (8) были разработаны программы математического моделирования не только для применяемых в настоящее время двух типов зондов КС (градиент-зонд и потенциал-зонд). Такое моделирование было проведено (для пока не применяемого при геофизических исследованиях скважин) дипольно-экваториального зонда КС (ДЭЗ) [Каринский, Кауркин, 2013, 2015]. Полученные результаты математического (а также физического) моделирования показали, что в определенных условиях на вычисленное по результатам ДЭЗ значение ρ_k существенное влияние оказывает коэффициент анизотропии λ окружающей скважину среды. Это не противоречит тем результатам исследований, которые были приведены в работе [Дашевский и др., 1999].

ЛИТЕРАТУРА

Альпин Л.М. Практические работы по теории поля. М., Недра, 1971, 305 с.

Альпин Л.М., Даев Д.С., Каринский А.Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. М., Недра, 1985, 407 с.

Даев Д.С., Каринский А.Д. Решение прямой задачи теории каротажа КС при смещенном с оси модели скважины электроде и анизотропии окружающей модель скважины среды // XI Международная конференция «Новые идеи в науках о Земле». Доклады. М., 2013, т. 1, с. 379—379.

Дашевский Ю.А. Применение преобразования Эйлера для расчета стационарных и гармонических электромагнитных полей в горизонтально-слоистых средах // Электромагнитные методы геофизических исследований. Новосибирск, ИГиГ СО АН СССР, 1982, с. 78—88.

Дашевский Ю.А., Полозов С.В., Эпов М.И., Мартынов А.А., Суродина И.В. Разработка зондов постоянного тока с неосесимметричным возбуждением для исследования изотропных и анизотропных разрезов // Электрические и электромагнитные методы исследования в нефтегазовых скважинах. Новосибирск, Изд-во СО РАН, НИЦ ОИГГМ, СО РАН, 1999, с. 130—145.

Каринский А.Д. Поле кабеля и линии АВ переменного тока в анизотропной среде // Журнал ЕАГО, «Геофизика», 2004, № 1, с. 40—48.

Каринский А.Д. Электромагнитное поле различных источников в цилиндрически-слоистой модели анизотропной среды // Журнал ЕАГО «Геофизика», 2005, № 6, с. 46—54.

Каринский А.Д. Индуцированные заряды в микро- и макроанизотропных средах и их влияние на электрическое поле в анизотропных пластах, пройденных скважиной // Журнал ЕАГО «Геофизика», 2010, № 2, с. 37—48.

Каринский А.Д., Кауркин М.Д. Математическое и лабораторное моделирование дипольных зондов каротажа КС в изотропных и анизотропных моделях среды // Геофизика, 2013, № 4, с. 36—42.

Каринский А.Д., Кауркин М.Д. Физическое (лабораторное) и математическое моделирование дипольных зондов каротажа кажущихся сопротивлений с целью обоснования методики определения поперечного удельного электрического сопротивления анизотропных пластов // Каротажник, 2015, № 2 (248), с. 34—49.

Светов Б.С. Основы геоэлектрики. М., Изд-во ЛКИ, 2008, 656 с.

Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М., Наука, 1979, 832 с.

Эпов М.И., Шурина Э.П., Нечаев О.В. Прямое трехмерное моделирование векторного поля для задач электромагнитного каротажа // Геология и геофизика, 2007, т. 48 (9), с. 989—995.

Эпов М.И., Глинских В.Н., Сухорукова К.В., Никитенко М.Н., Еремин В.Н. Численное моделирование и инверсия данных электромагнитного каротажа в процессе бурения и шаблонирования нефтегазовых скважин // Геология и геофизика. 2015, т. 56 (8), с. 1520—1529.

Kaufman A.A., Keller G.V. Induction logging // Methods Geochem. Geophys., 1989, v. 27, 600 p.

Рекомендована к печати 29 января 2016 г.

М. И. Эповым

Поступила в редакцию

28 октября 2015 г.