

УДК 519.6, 551.46

## Устойчивость оптимального решения задачи вариационного усвоения с ковариационными матрицами ошибок данных наблюдений для модели термодинамики моря\*

В.П. Шутяев<sup>1,2</sup>, Е.И. Пармузин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики Российской академии наук, ул. Губкина, 8, Москва, 119333

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Морской гидрофизический институт РАН", ул. Капитанская, 2, Севастополь, 299011

E-mails: victor.shutyayev@mail.ru (Шутяев В.П.), parm@inm.ras.ru (Пармузин Е.И.)

**Шутяев В.П., Пармузин Е.И.** Устойчивость оптимального решения задачи вариационного усвоения с ковариационными матрицами ошибок данных наблюдений для модели термодинамики моря // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 225–242.

Рассматривается математическая модель термодинамики моря, разработанная в Институте вычислительной математики РАН. Сформулирована и исследована задача вариационного усвоения среднесуточных данных о температуре поверхности моря (ТПМ) с учетом ковариационных матриц ошибок данных наблюдений. На основе вариационного усвоения данных спутниковых наблюдений решается обратная задача по восстановлению потока тепла на поверхности моря. Проведено исследование устойчивости оптимального решения задачи вариационного усвоения данных и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Балтийского моря.

DOI: 10.15372/SJNM20180208

**Ключевые слова:** *вариационное усвоение данных наблюдений, оптимальное управление, сопряженные уравнения, ковариационные матрицы, устойчивость к погрешностям, температура поверхности моря.*

**Shutyayev V.P., Parmuzin E.I.** Stability of the optimal solution to the problem of variational assimilation with error covariance matrices of observational data for the sea thermodynamics model // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 2. — P. 225–242.

A mathematical model of the sea thermodynamics, developed at the Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences is considered. The problem of variational assimilation of daily-averaged sea surface temperature (SST) data is formulated and investigated taking into account the observation error covariance matrices. On the basis of variational assimilation of satellite observation data, the inverse problem of restoring a heat flux on the sea surface is solved. The stability of the optimal solution of the problem of variational data assimilation is studied, and the results of numerical experiments for the model of the Baltic Sea dynamics are presented.

**Keywords:** *variational data assimilation, optimal control, adjoint equations, covariance matrices, stability with respect to errors, sea surface temperature.*

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проекты № 14-11-00609 (исследования в разделах 2-4), № 17-77-30001 (исследования в разделе 5)) и РФФИ (проект № 18-01-00267 (исследования в разделе 6)).

## 1. Введение

В настоящее время наиболее универсальной и перспективной технологией решения задач мониторинга и анализа состояния природной среды является четырехмерное вариационное усвоение данных наблюдений [1–6]. Одним из подходов к построению эффективных алгоритмов усвоения является исследование ковариационных матриц ошибок наблюдений и включение их в исходный функционал стоимости [7]. В данной работе осуществляется постановка обратной задачи об усвоении (ассимиляции) данных о температуре поверхности моря с использованием ковариационных матриц ошибок наблюдений для модели термодинамики моря.

За основу модели циркуляции моря, используемой в настоящей работе, принята численная модель гидротермодинамики Балтийского моря, разработанная в ИВМ РАН [8], основанная на методе расщепления [9, 10] и дополненная блоком вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря [11, 12] с учетом ковариационных матриц ошибок наблюдений. Важным является вопрос о чувствительности оптимального решения задачи вариационного усвоения к погрешностям данных наблюдений [13–17]. В настоящей работе на основе изучения коэффициентов чувствительности как норм операторов отклика проведено исследование устойчивости оптимального решения поставленной задачи вариационного усвоения данных и приведены результаты численных экспериментов для рассматриваемой модели динамики Балтийского моря.

## 2. Уравнения модели и операторная формулировка

Рассмотрим задачу термодинамики моря в виде [18, 19]:

$$\begin{aligned}
 T_t + (\bar{U}, \text{grad})T - \text{div}(\hat{a}_T \text{grad} T) &= f_T \quad \text{в } D \times (0, \bar{t}), \\
 T &= T_0 \quad \text{при } t = 0 \quad \text{в } D, \\
 -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} &= Q \quad \text{на } \Gamma_S \times (0, \bar{t}), \\
 \frac{\partial T}{\partial N_T} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_{w,c} \times (0, \bar{t}), \\
 \bar{U}_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} &= \bar{U}_n^{(-)} d_T + Q_T \quad \text{на } \Gamma_{w,op} \times (0, \bar{t}), \\
 \frac{\partial T}{\partial N_T} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_H \times (0, \bar{t}),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $T = T(x, y, z, t)$  — неизвестная функция температуры,  $t \in (0, \bar{t})$ ,  $(x, y, z) \in D = \Omega \times (0, H)$ ,  $\Omega \subset R^2$ ,  $H = H(x, y)$  — функция рельефа дна,  $Q = Q(x, y, t)$  — суммарный приток тепла,  $\bar{U} = (u, v, w)$ ,  $\hat{a}_T = \text{diag}((a_T)_{ii})$ ,  $(a_T)_{11} = (a_T)_{22} = \mu_T$ ,  $(a_T)_{33} = \nu_T$ ,  $f_T = f_T(x, y, z, t)$  — заданные функции. Граница области  $\Gamma \equiv \partial D$  представляется как объединение четырех непересекающихся частей  $\Gamma_S$ ,  $\Gamma_{w,op}$ ,  $\Gamma_{w,c}$ ,  $\Gamma_H$ , где  $\Gamma_S = \Omega$  (невозмущенная поверхность моря),  $\Gamma_{w,op}$  — жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы,  $\Gamma_{w,c}$  — твердая часть вертикальной боковой границы,  $\Gamma_H$  — дно моря. Другие обозначения и детальное описание постановки задачи можно найти в работах [8, 11, 20].

Задачу (2.1) можно записать в форме операторного уравнения в  $(W_2^1(D))^*$ :

$$\begin{aligned}
 T_t + LT &= F + BQ \quad \text{для п. в. } t \in (0, \bar{t}), \\
 T &= T_0 \quad \text{при } t = 0,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где равенство понимается в слабом смысле, а именно:

$$(T_t, \hat{T}) + (LT, \hat{T}) = F(\hat{T}) + (BQ, \hat{T}) \quad \forall \hat{T} \in W_2^1(D), \tag{2.3}$$

при этом  $L, F, B$  определяются следующими соотношениями:

$$(LT, \hat{T}) \equiv \int_D (-T \operatorname{div}(\bar{U}\hat{T})) dD + \int_{\Gamma_{w, \text{оп}}} \bar{U}_n^{(+)} T \hat{T} d\Gamma + \int_D \hat{a}_T \operatorname{grad}(T) \operatorname{grad}(\hat{T}) dD,$$

$$F(\hat{T}) = \int_{\Gamma_{w, \text{оп}}} (Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T) \hat{T} d\Gamma + \int_D f_T \hat{T} dD,$$

$$(T_t, \hat{T}) = \int_D T_t \hat{T} dD,$$

$$(BQ, \hat{T}) = \int_{\Omega} Q \hat{T} |_{z=0} d\Omega,$$

а функции  $\hat{a}_T, Q_T, f_T, Q$  таковы, что равенство (2.3) имеет смысл.

В работе [11] показано, что оператор  $L$  представим в виде суммы неотрицательных операторов  $L_1, L_2$ :

$$L = L_1 + L_2,$$

где  $L_1 = L - L_2$ ,

$$(L_2 T, \hat{T}) \equiv \int_D \left( -T \frac{1}{2} \left( w_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 w_1 \hat{T})}{\partial z} \right) + \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) dD + \int_{\Omega} (\bar{U}_n^{(+)} + \gamma_T) T \hat{T} |_{z=0} d\Omega,$$

а функции  $w_1$  и  $r$  определены в [11].

Свойства неотрицательности операторов  $L_1, L_2$  позволяют применить для аппроксимации уравнения (2.2) один из методов суммарной аппроксимации (см. [9]):

$$\begin{aligned} (T_1)_t + L_1 T_1 &= F_1, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ T_1 &= T_{j-1} \quad \text{при } t = t_{j-1}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} (T_2)_t + L_2 T_2 &= F_2 + BQ, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ T_2(t_{j-1}) &= T_1(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, J, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$F_1 = F - F_2, \quad F_2(\hat{T}) = \int_D f_T \hat{T} dD, \quad t_0 = 0, \quad t_J = \bar{t}.$$

После решения подзадачи (2.5) функция  $T_2(t_j)$  принимается в качестве приближенного решения задачи (2.2) при  $t = t_j$ :

$$T_2(t_j) \equiv T_j \cong T.$$

Система уравнений (2.4), (2.5), рассматриваемая на  $\{(t_{j-1}, t_j)\}$ , задает аппроксимацию исходной задачи (2.2), построенную по методу расщепления. Заметим, что положительность операторов конвекции–диффузии показана в монографии [21].

### 3. Задача вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря

Мы рассмотрим задачу об усвоении данных о температуре поверхности моря, следуя [11]. Предположим, что в задаче (2.1) функция  $Q \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  неизвестна. Пусть задана функция данных наблюдений  $T_{\text{obs}}(x, y, t)$  на  $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$  при  $t \in (0, \bar{t})$ , которая по своему физическому смыслу есть приближение к функции поверхностной температуры на  $\Omega$ , т. е. к  $T|_{z=0}$ . Предполагаем, что  $T_{\text{obs}} \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ , однако большей гладкостью функция  $T_{\text{obs}}$  может не обладать, поэтому ее нельзя использовать в качестве граничного условия на  $\Gamma_S$ . Допускается случай, когда  $T_{\text{obs}}$  имеется лишь на некотором подмножестве из  $\Omega \times (0, \bar{t})$ , характеристическую функцию которого обозначим через  $m_0$ . Вне этого подмножества для определенности считаем  $T_{\text{obs}}$  нулевой. Хотя при решении задачи усвоения данные наблюдений не используются в качестве условий Дирихле, но, тем не менее, при проведении теоретических выкладок в [11] эта возможность была использована для доказательства однозначной разрешимости.

Обратим внимание на то, что в качестве  $T_{\text{obs}}$  в настоящей работе берется функция *среднесуточных наблюдений* температуры поверхности моря, поскольку очень часто именно этот тип данных доступен для усвоения. Отметим также, что в задаче (2.1) с неизвестными  $T$  и  $Q$  уравнение замыкания имеет вид

$$T = T_{\text{obs}} \text{ на } \Gamma_S \text{ при } t \in (0, \bar{t}). \quad (3.1)$$

Если в качестве  $T_{\text{obs}}$  берутся данные среднесуточных наблюдений (т. е. функция  $T_{\text{obs}}$  кусочно-постоянная на  $(0, \bar{t})$ ), то легко заметить, что *такая задача определения  $T$  и  $Q$  некорректно поставлена*, поскольку выбранное таким образом уравнение замыкания, вообще говоря, точно не выполняется на  $(0, \bar{t})$ . Однако можно привести аргументы, позволяющие применять его в задачах вариационного усвоения. Так, согласно ряду источников (см., например, [23]), температура поверхности меняется за сутки незначительно (нередко это всего лишь несколько десятых градуса). Если же учесть, что расчеты изменений температуры поверхности моря даже по современным моделям (без усвоения данных наблюдений) достигают нескольких градусов, то выбор уравнения замыкания в виде (3.1) представляется вполне разумным, только надо перейти к его записи в смысле “наименьших квадратов” (что, как правило, и делается в теории некорректно поставленных задач) с возможным введением “регуляризации”. Именно этот подход и применяется ниже.

В дальнейшем мы будем предполагать, что данные наблюдений  $T_{\text{obs}}$  заданы с ошибками, а именно:

$$T_{\text{obs}} = m_0 T^t|_{z=0} + \xi_{\text{obs}},$$

где  $T^t$  — точное решение задачи (2.1) при некотором  $Q = Q^t$ , а  $\xi_{\text{obs}} \in Y_{\text{obs}} = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  можно рассматривать как ошибку наблюдений. Мы будем предполагать, что ошибки  $\xi_{\text{obs}}$  случайные и они распределены по нормальному закону (гауссовские) с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором  $R \cdot = E[(\cdot, \xi_{\text{obs}})\xi_{\text{obs}}]$ ,  $R : Y_{\text{obs}} \rightarrow Y_{\text{obs}}$ , где  $E$  — математическое ожидание. Ковариационные матрицы ошибок наблюдений играют важную роль при вариационном усвоении данных: обратные к ним матрицы включаются в качестве весовых операторов в исходный функционал стоимости. В дальнейшем мы будем предполагать, что  $R$  положительно определен и, значит, обратим.

Итак, вместо задачи об отыскании  $T$  и  $Q$ , задаваемой соотношениями (2.1), (3.1), рассмотрим следующую регуляризованную задачу вариационного усвоения данных (см. [11]): найти  $T$  и  $Q$ , такие что

$$\begin{cases} T_t + LT = F + BQ, & t \in (0, \bar{t}), \\ T = T_0 & \text{при } t = 0, \\ J_\alpha(Q) = \inf_Q J_\alpha(Q), \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$J_\alpha(Q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J J_{\alpha,j},$$

$$J_{\alpha,j} \equiv \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega} |Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) R^{-1} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) d\Omega dt,$$

$Q^{(0)} = Q^{(0)}(x, y, t)$  — заданная функция,  $\alpha = \text{const} > 0$ . Весовой коэффициент  $\alpha$  принято называть параметром регуляризации по Тихонову [24].

При  $\alpha > 0$  поставленная задача вариационного усвоения данных имеет единственное решение. Существование оптимального решения следует из классических результатов теории экстремальных задач, так как нетрудно показать, что решение задачи (2.2) непрерывно зависит от потока  $Q$  (имеют место априорные оценки в соответствующих функциональных пространствах).

При  $\alpha = 0$  задача имеет решение не всегда, однако как показано в работе [11], при  $R = I$  имеет место однозначная и плотная разрешимость, что позволяет построить последовательность регуляризованных решений, минимизирующую функционал.

Система оптимальности, которая определяет решение сформулированной задачи вариационного усвоения данных согласно необходимому условию  $\text{grad } J_\alpha = 0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} T_t + LT &= F + BQ, & t \in (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 & \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} -(T^*)_t + L^*T^* &= BR^{-1}m_0(B^*T - T_{\text{obs}}), & t \in (0, \bar{t}), \\ T^* &= 0 & \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\alpha(Q - Q^{(0)}) + B^*T^* = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}), \quad (3.5)$$

где  $L^*$ ,  $B^*$  — операторы, сопряженные к  $L$ ,  $B$  соответственно.

Вместо (2.2) мы будем рассматривать ее аппроксимацию (2.4), (2.5) по методу расщепления. В силу свойства однозначной и плотной разрешимости задачи, доказанного в [11], задача минимизации (3.2) аппроксимируется последовательным решением задач минимизации функционалов  $J_{\alpha,j}$  на решениях (2.4), (2.5) на  $t \in (t_{j-1}, t_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  (см. следствие теоремы из [11]; эти результаты были получены в предположении, что данные измерений доступны везде, где восстанавливается  $Q$ ). Необходимое условие оптимальности сводит каждую такую задачу минимизации функционала  $J_{\alpha,j}$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) к системе оптимальности, которая включает в себя прямую задачу (2.4), (2.5), систему сопряженных уравнений вида

$$\begin{aligned} -(T_2^*)_t + L_2^*T_2^* &= BR^{-1}(m_0T|_{z=0} - T_{\text{obs}}), & t \in (t_{j-1}, t_j), \\ T_2^* &= 0 & \text{при } t = t_j, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} -(T_1^*)_t + L_1^*T_1^* &= 0, & t \in (t_{j-1}, t_j), \\ T_1^* &= T_2^*(t_{j-1}) & \text{при } t = t_j \end{aligned} \quad (3.7)$$

и следующее условие оптимальности:

$$\alpha(Q - Q^{(0)}) + B^*T_2^* = 0 \text{ на } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \quad (3.8)$$

где  $L_1^*$ ,  $L_2^*$  — операторы, сопряженные к  $L_1$ ,  $L_2$ .

После чего функции  $T_2$  и  $Q(t_j)$  принимаются в качестве приближения к компонентам  $T$  и  $Q$  полного решения задачи при  $t > t_j$ , а  $T_2(t_j) \cong T(t_j)$  берется в качестве начального условия для  $T$  при решении задач на  $(t_j, t_{j+1})$ .

Отметим, что в силу свойства однозначной и плотной разрешимости задачи [11] в качестве последовательности решений, минимизирующих функционал  $J_{0,j}$ , может быть выбрана последовательность регуляризованных решений задачи минимизации для  $J_{\alpha,j}$  при  $\alpha \rightarrow +0$ , при этом  $\inf J_{0,j} = 0$ .

Схема аппроксимации исходной задачи минимизации  $J_\alpha$  последовательностью задач минимизации  $J_{\alpha,j}$  на  $(t_{j-1}, t_j)$  была предложена в [21, с. 288].

#### 4. Устойчивость оптимального решения к ошибкам наблюдений

Пусть данные наблюдений заданы с ошибками

$$Q^{(0)} = Q^t + \xi_1, \quad T_{\text{obs}} = T_{\text{obs}}^t + \xi_2, \quad (4.1)$$

где  $\xi_1, \xi_2 \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ , а  $Q^t, T_{\text{obs}}^t$  — данные наблюдений при отсутствии ошибок (когда  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ). Данные наблюдений  $Q^t, T_{\text{obs}}^t$  определяют свою систему оптимальности, аналогичную (3.3)–(3.5):

$$\begin{aligned} \bar{T}_t + L\bar{T} &= F + B\bar{Q}, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \bar{T} &= T_0 \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} -(\bar{T}^*)_t + L^*\bar{T}^* &= BR^{-1}m_0(B^*\bar{T} - T_{\text{obs}}^t), \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \bar{T}^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\alpha(\bar{Q} - Q^t) + B^*\bar{T}^* = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (4.4)$$

Функции  $\xi_1, \xi_2$  рассматриваются как погрешности входных данных  $Q^{(0)}$  и  $T_{\text{obs}}$  соответственно. Мы исследуем влияние этих ошибок на оптимальное решение  $Q$ , полученное из системы оптимальности (3.3)–(3.5).

Положим  $\delta T = T - \bar{T}$ ,  $\delta T^* = T^* - \bar{T}^*$ ,  $\delta Q = Q - \bar{Q}$ . Тогда, вычитая (4.2)–(4.4) из (3.3)–(3.5), получаем систему для  $\delta T$ ,  $\delta T^*$ ,  $\delta Q$ :

$$\begin{aligned} \delta T_t + L\delta T &= B\delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T &= 0 \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} -(\delta T^*)_t + L^*\delta T^* &= BR^{-1}m_0(B^*\delta T - \xi_2), \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\alpha(\delta Q - \xi_1) + B^*\delta T^* = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (4.7)$$

Эта система эквивалентна вспомогательной линейной задаче усвоения данных об отыскании  $\delta T$ ,  $\delta Q$  таких, что

$$\begin{cases} \delta T_t + L\delta T = B\delta Q, & t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T = 0 & \text{при } t = 0, \\ S(\delta Q) = \inf_Q S(Q), \end{cases} \quad (4.8)$$

где

$$S(\delta Q) = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} |\delta Q - \xi_1|^2 d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} (m_0 \delta T|_{z=0} - \xi_2) R^{-1} (m_0 \delta T|_{z=0} - \xi_2) d\Omega dt. \quad (4.9)$$

Введем гессиан  $\mathcal{H}$  функционала (4.9). Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \alpha I, \quad (4.10)$$

где  $I$  — единичный оператор, а оператор  $\mathcal{H}_0$  определяется на  $v \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  последовательным решением задач:

$$\begin{aligned} \psi_t + L\psi &= Bv, & t \in (0, \bar{t}), \\ \psi &= 0 & \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} -(\psi^*)_t + L^*\psi^* &= BR^{-1}m_0B^*\psi, & t \in (0, \bar{t}), \\ \psi^* &= 0 & \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{H}_0 v = B^*\psi^* \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (4.13)$$

Введем вспомогательный оператор  $C : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ , действующий на функции  $g \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  по формуле

$$Cg = B^*\theta^*, \quad (4.14)$$

где  $\theta^*$  — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -(\theta^*)_t + L^*\theta^* &= BR^{-1}m_0g, & t \in (0, \bar{t}), \\ \theta^* &= 0 & \text{при } t = \bar{t}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из (4.11)–(4.15) заключаем, что система (4.5)–(4.7) эквивалентна уравнению для погрешности оптимального решения  $\delta Q$ :

$$\mathcal{H}\delta Q = \alpha\xi_1 + C\xi_2. \quad (4.16)$$

Нетрудно убедиться в том, что гессиан  $\mathcal{H}$  действует в  $L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  с областью определения  $D(\mathcal{H}) = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ , он ограничен, самосопряжен и неотрицательно определен. Если  $\alpha > 0$ , то  $\mathcal{H}$  положительно определен. Оператор  $C$  ограничен.

При  $\alpha > 0$  уравнение (4.16) имеет единственное решение

$$\delta Q = \alpha\mathcal{H}^{-1}\xi_1 + \mathcal{H}^{-1}C\xi_2. \quad (4.17)$$

Таким образом, погрешность оптимального решения  $\delta Q$  в явном виде выражается через погрешности исходных данных  $\xi_1, \xi_2$ . Уравнение (4.17) может быть положено в основу исследования устойчивости оптимального решения и его функционалов к ошибкам данных наблюдений.

## 5. Коэффициенты чувствительности как нормы операторов отклика

Для нормы погрешности оптимального решения, согласно (4.17), справедлива оценка

$$\|\delta Q\| \leq \|\mathcal{T}_1 \xi_1\| + \|\mathcal{T}_2 \xi_2\|, \quad (5.1)$$

где операторы отклика  $\mathcal{T}_1 = \alpha \mathcal{H}^{-1}$ ,  $\mathcal{T}_2 = \mathcal{H}^{-1} C$ ,  $\mathcal{T}_i : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ ,  $i = 1, 2$ , а под нормой понимается норма в  $L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ .

Каждое из слагаемых в (5.1) определяет влияние соответствующей ошибки  $\xi_i$  на ошибку оптимального решения  $\delta Q$ . Имеем

$$\|\mathcal{T}_1 \xi_1\| \leq \sqrt{\|\mathcal{T}_1^* \mathcal{T}_1\|} \|\xi_1\|, \quad \|\mathcal{T}_2 \xi_2\| \leq \sqrt{\|\mathcal{T}_2^* \mathcal{T}_2\|} \|\xi_2\|, \quad (5.2)$$

где  $\mathcal{T}_i^* : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  — оператор, сопряженный к  $\mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, 2$ , при этом  $i$ -е неравенство превращается в равенство, когда  $\xi_i$  — сингулярный вектор оператора  $\mathcal{T}_i$ , соответствующий наибольшему сингулярному числу  $\sigma_{\max} = \sqrt{\|\mathcal{T}_i^* \mathcal{T}_i\|}$ .

Следуя [25], введем

$$r_1 = \sqrt{\|\mathcal{T}_1^* \mathcal{T}_1\|}, \quad r_2 = \sqrt{\|\mathcal{T}_2^* \mathcal{T}_2\|}. \quad (5.3)$$

Величины  $r_i = \sqrt{\|\mathcal{T}_i^* \mathcal{T}_i\|}$  можно рассматривать как *коэффициенты чувствительности*, которые демонстрируют влияние соответствующей ошибки  $\xi_i$  на оптимальное решение. Чем больше коэффициент  $r_i$  (норма оператора отклика  $\mathcal{T}_i$ ), тем большее влияние может оказывать ошибка  $\xi_i$  на оптимальное решение. Эти коэффициенты были введены в [13] для исследования задачи инициализации.

Из (5.1), (5.2) следует оценка устойчивости

$$\|\delta Q\| \leq \sqrt{\|\mathcal{T}_1^* \mathcal{T}_1\|} \|\xi_1\| + \sqrt{\|\mathcal{T}_2^* \mathcal{T}_2\|} \|\xi_2\| = r_1 \|\xi_1\| + r_2 \|\xi_2\|.$$

Рассмотрим коэффициент чувствительности  $r_1$ . Поскольку  $\mathcal{T}_1 = \alpha \mathcal{H}^{-1} = \mathcal{T}_1^*$ , то  $\mathcal{T}_1^* \mathcal{T}_1 = \alpha^2 \mathcal{H}^{-2}$  и

$$r_1 = \sqrt{\|\mathcal{T}_1^* \mathcal{T}_1\|} = \frac{\alpha}{\alpha + \mu_{\min}}, \quad (5.4)$$

где  $\mu_{\min}$  — нижняя граница спектра оператора  $\mathcal{H}_0$ . Отметим, что  $r_1 \leq 1$ , поскольку  $\mu_{\min} \geq 0$ .

Для определения коэффициента чувствительности  $r_2$  нам нужно найти норму оператора  $\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_2^*$ . Поскольку  $\mathcal{T}_2 = \mathcal{H}^{-1} C$ , то  $\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_2^* = \mathcal{H}^{-1} C C^* \mathcal{H}^{-1}$  и необходимо определить сопряженный оператор  $C^*$ . Для  $g, p \in Y_{\text{obs}} = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  по определению оператора  $C$ , согласно (4.14), (4.15), имеем

$$(Cg, p)_{Y_{\text{obs}}} = (B^* \theta^*, p)_{Y_{\text{obs}}} = (\theta^*, Bp)_Y = (BR^{-1} m_0 g, \phi)_Y = (g, m_0 R^{-1} B^* \phi)_{Y_{\text{obs}}},$$

где  $Y = L_2(D \times (0, \bar{t}))$ , а  $\phi$  — решение задачи

$$\begin{aligned} \phi_t + L\phi &= Bp \quad \text{для п. в. } t \in (0, \bar{t}), \\ \phi &= 0 \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тогда сопряженный оператор  $C^* : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  определяется на  $p \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  по формуле

$$C^* p = m_0 R^{-1} B^* \phi. \quad (5.6)$$



Для построения  $CC^*$  подействуем оператором  $C$  на (5.6). Тогда, согласно (4.15), получаем

$$CC^*p = B^*\theta_1^*, \quad (5.7)$$

где  $\theta_1^*$  — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -(\theta_1^*)_t + L^*\theta_1^* &= BR^{-1}m_0^2R^{-1}B^*\phi \quad \text{для п. в. } t \in (0, \bar{t}), \\ \theta_1^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

а  $\phi$  — решение задачи (5.5). Заметим, что  $m_0^2 = m_0$ , тогда из (5.7), (5.8) и (4.11)–(4.13) заключаем, что справедлива следующая лемма.

**Лемма.** *Для оператора  $CC^*$  имеет место представление*

$$CC^* = \mathcal{H}_1,$$

где оператор  $\mathcal{H}_1$  определяется на  $v \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  последовательным решением задач

$$\begin{aligned} \psi_t + L\psi &= Bv, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi &= 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} -(\psi^*)_t + L^*\psi^* &= BR^{-1}m_0R^{-1}B^*\psi, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\mathcal{H}_1v = B^*\psi^* \quad \text{на } \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (5.11)$$

Следует отметить, что при  $R = I$  оператор  $\mathcal{H}_1$  совпадает с гессианом  $\mathcal{H}_0$ , определенным по формулам (4.11)–(4.13). Поскольку  $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2^* = \mathcal{H}^{-1}CC^*\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{H}^{-1}$ , то справедливо следующее следствие.

**Следствие.** *Коэффициент чувствительности  $r_2$  определяется по формуле*

$$r_2 = \sqrt{\|\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{H}^{-1}\|}. \quad (5.12)$$

Из (5.7), (5.8) следует, что оператор  $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2^* = \mathcal{H}^{-1}CC^*\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{H}^{-1}$  определяется последовательным решением следующих задач:

$$\mathcal{H}p = v, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \phi_t + L\phi &= Bp, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi &= 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} -(\theta_1^*)_t + L^*\theta_1^* &= BR^{-1}m_0R^{-1}B^*\phi, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \theta_1^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{H}q = B^*\theta_1^*, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2^*v = q. \quad (5.17)$$

Формулы (5.13)–(5.17) определяют действие оператора  $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2^*$  на заданную функцию  $v \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  и могут быть использованы для вычисления сингулярных чисел оператора  $\mathcal{T}_2$ , наибольшее из которых дает коэффициент  $r_2$ .

Если  $\alpha = 0$ , то  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ , и коэффициент  $r_2$  определяется по формуле

$$r_2 = \sqrt{\|\mathcal{H}_0^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{H}_0^{-1}\|}. \quad (5.18)$$

При конечномерной аппроксимации оператор  $\mathcal{H}_0$  является матрицей и в этом случае можно рассматривать задачу на собственные значения

$$\mathcal{H}_0 v_k = \mu_k v_k, \quad (5.19)$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{aligned} (\varphi_k)_t + L\varphi_k &= Bv_k, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_k &= 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} -(\varphi_k^*)_t + L^*\varphi_k^* &= BR^{-1}m_0B^*\varphi_k, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \varphi_k^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\varphi_k^* = \mu_k v_k \quad \text{на } \Omega \times (0, \bar{t}), \quad (5.22)$$

где под (5.20), (5.21) понимаются конечномерные аналоги соответствующих задач. Задача (5.20)–(5.22) — это неклассическая спектральная задача со спектральным параметром в граничном условии. Система функций  $\{\varphi_k, \varphi_k^*, v_k\}$ , называемая системой *фундаментальных функций управления* [22], была использована в [13] для анализа ошибок оптимального решения в задаче об отыскании начального условия. Отметим, что в случае  $R = I$  в силу  $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2^* = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_0\mathcal{H}^{-1} = (\mathcal{H}_0 + \alpha I)^{-1}\mathcal{H}_0(\mathcal{H}_0 + \alpha I)^{-1}$  сингулярные числа оператора  $\mathcal{T}_2$  и коэффициент чувствительности  $r_2$  выражаются через собственные числа гессиана  $\mathcal{H}_0$ .

Следует также отметить, что при конечномерной аппроксимации  $\mathcal{H}_0$  оказывается плохо обусловленной матрицей, у которой наименьшее собственное число  $\mu_{\min}$  близко к нулю. В этом случае коэффициент  $r_2$  может быть достаточно большим, т. е. оптимальное решение может быть очень чувствительным к ошибкам наблюдений. Это означает, что в данной задаче необходимо введение регуляризатора с параметром  $\alpha > 0$ , что делает задачу определения оптимального решения устойчивой по отношению к ошибкам наблюдений.

## 6. Результаты численных экспериментов

В настоящем пункте приводятся результаты численных экспериментов по исследованию устойчивости оптимального решения задачи о восстановлении функции потока тепла  $Q$  в акватории Балтийского моря путем вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря с использованием ковариационной матрицы ошибок наблюдений.

При проведении численных экспериментов были выбраны модификации граничных условий и коэффициентов в них согласно [10].

Модельная область Балтийского моря расположена от  $9.375^\circ$  до  $30.375^\circ$  восточной долготы и от  $53.625^\circ$  до  $65.9375^\circ$  северной широты. Пространственное разрешение модели составляет  $1/16^\circ \times 1/32^\circ \times 25$  по долготе, широте и вертикали. Сеточная область в горизонтальной плоскости содержит  $336 \times 394$  узлов,  $\sigma$ -уровни неравномерно распределены по глубине. Шаг по времени равен 5 мин.

В качестве  $T_{\text{obs}}$  использовались среднесуточные данные температуры поверхности Балтийского моря, полученные с портала океанографических данных COPERNICUS (<http://marine.copernicus.eu>). Для пересчета данных наблюдений на расчетную сетку численной модели термодинамики Балтийского моря использовались алгоритмы интерполяции данных [26, 27].

В качестве  $Q^{(0)}$  использовался среднеклиматический поток, полученный по данным реанализа NCEP (National Center for Environmental Prediction). С помощью упомянутой модели гидротермодинамики, дополненной “процедурой усвоения” температуры поверхности  $T_{\text{obs}}$ , были проведены расчеты на акватории Балтийского моря, в которых работал алгоритм усвоения лишь в некоторые моменты времени  $t_j$ , при этом  $t_{j+1} = \bar{t} = t_j + \Delta t$ . Это означает, что до момента  $t_j$  производился расчет по модели без алгоритма усвоения, а начиная с  $t_j$  алгоритм усвоения включался, при этом начальное условие для усвоения задавалось из предыдущего расчета при  $t = t_j$  (тем самым точкой  $t_0$ , фигурирующей в описании алгоритма усвоения, считалась точка  $t_j$ ).

В данной работе в качестве весовых коэффициентов в функционале стоимости при решении задачи усвоения данных были взяты диагональные элементы ковариационной матрицы  $R$ , которые вычисляются исходя из статистических свойств данных наблюдений.

В конечномерном случае ковариационный оператор  $R$  является ковариационной матрицей и определяется по формуле:

$$R = E \left[ \xi_{\text{obs}} \xi_{\text{obs}}^\top \right] = E \left[ (T_{\text{obs}} - \bar{T}_{\text{obs}}) (T_{\text{obs}} - \bar{T}_{\text{obs}})^\top \right],$$

где  $\bar{T}_{\text{obs}}$  — математическое ожидание функции данных наблюдений.

Если  $\xi_{\text{obs}} = (\xi_1, \dots, \xi_N)^\top$ , то элементы матрицы  $R$  можно записать в виде

$$r_{jk} = E \left[ (\xi_j - E\xi_j)(\xi_k - E\xi_k) \right] = E \left[ \xi_j \xi_k \right] - E \left[ \xi_j \right] E \left[ \xi_k \right] = E \left[ \xi_j \xi_k \right].$$

Величины  $r_{jk}$  являются коэффициентами ковариации между  $j$ -й и  $k$ -й координатами случайного вектора  $\xi_{\text{obs}}$ . При  $j = k$  мы получаем

$$r_{jj} = \mathcal{D}\xi_j = \sigma_j^2,$$

где  $\mathcal{D}\xi_j$  — дисперсия случайной величины  $\xi_j$  (второй центральный момент распределения):

$$\mathcal{D}\xi_j = E \left[ (\xi_j - E\xi_j)^2 \right] = E \left[ \xi_j^2 \right] - (E \left[ \xi_j \right])^2,$$

а  $\sigma_j$  — среднеквадратичное отклонение, или стандартное отклонение, при этом  $\sigma_j = \sqrt{\mathcal{D}\xi_j}$ .

Таким образом, диагональные элементы матрицы  $R$  — дисперсии  $\mathcal{D}\xi_j$ , именно они играют важную роль при взвешивании функционала стоимости при вариационном усвоении данных. На практике при вариационном усвоении зачастую предполагается [7], что матрица  $R$  является диагональной с элементами  $\mathcal{D}\xi_j$ , которые вычисляются исходя из статистических свойств данных наблюдений. В силу предположения  $E\xi_{\text{obs}} = 0$  нетрудно видеть, что  $\mathcal{D}T_{\text{obs}} = \mathcal{D}\xi_{\text{obs}}$ , т. е. дисперсия ошибок данных наблюдений равняется дисперсии самих данных наблюдений и в нашем случае может быть рассчитана на основании данных о ТПМ за длительный период времени. В настоящей работе были вычислены статистические осреднения  $\bar{T}_{\text{obs}}$  и среднеквадратичные отклонения  $\sigma$  ТПМ в акватории Балтийского моря. Статистические характеристики были рассчитаны на основе данных наблюдений за 27 лет, с 1982 по 2009 годы, отдельно для каждого дня года.

При реализации процедуры усвоения на одном шаге по времени  $(t_j, t_{j+1})$  рассматривалась система вида (3.3)–(3.5), где под (3.3), (3.4) понимаются конечномерные аналоги соответствующих задач в виде (2.4), (2.5) и (3.6), (3.7).

При конечномерной аппроксимации, когда интервал  $(t_j, t_{j+1})$  является шагом дискретизации по времени, гессиан  $\mathcal{H}_0$ , определяемый по формулам (4.11)–(4.13), обладает полным набором собственных функций, в качестве которых можно взять

$$Q_{kl} = \begin{cases} 1, & x = x_k, y = y_l, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $(x_k, y_l)$  — точки сетки на  $\Omega$ . При этом собственные значения  $\mu_{kl}$ , отвечающие  $Q_{kl}$ , можно определить последовательно по формулам при  $x = x_k, y = y_l$

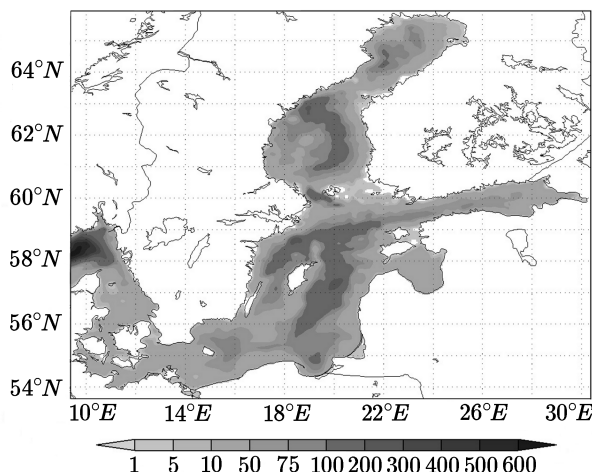
$$\begin{aligned} (\psi_2)_t + L_2\psi_2 &= BQ_{kl}, \quad t \in (t_0, t_1), \\ \psi_2 &= 0 \text{ при } t = t_0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} -(\psi_2^*)_t + L_2^*\psi_2^* &= BR^{-1}m_0B^*\psi_2, \quad t \in (t_0, t_1), \\ \psi_2^* &= 0 \text{ при } t = t_1, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\mu_{kl} = \psi_2^* \text{ при } z = 0, \quad (6.3)$$

при этом для упрощения записи под (6.1), (6.2) понимаются конечномерные аналоги соответствующих задач. Таким образом, каждой точке сетки расчетной области соответствует собственное число гессиана  $\mathcal{H}_0$  (аналогично для сингулярных чисел оператора  $\mathcal{T}_2$ ).

Приведем результаты численных экспериментов (на примере акватории Балтийского моря, см. рисунок 6.1) по исследованию устойчивости решения обратной задачи о восстановлении функции потока тепла  $Q$  путем вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря с использованием ковариационных матриц ошибок данных наблюдений.



**Рис. 6.1.** Топография Балтийского моря

Целью экспериментов являлось численное исследование устойчивости оптимального решения  $Q$  к ошибкам наблюдений. В первой серии экспериментов проводились расчеты собственных значений  $\mu_k$  гессиана  $\mathcal{H}_0$ , которые удовлетворяют системе (5.20)–(5.22)

и определяют коэффициенты чувствительности  $r_1$ ,  $r_2$ . Были выявлены подобласти, соответствующие наименьшим значениям  $\mu_k$ , в которых оптимальное решение, согласно теории, может быть наиболее чувствительным к ошибкам наблюдений. Во второй серии экспериментов проводился расчет потока  $Q$  по заданным  $T_{\text{obs}}$  с помощью упомянутого алгоритма усвоения, а затем в  $T_{\text{obs}}$  вносились возмущения  $\delta T_{\text{obs}}$ , и той же процедурой вычислялся возмущенный поток  $\tilde{Q}$ . По значениям погрешностей в потоках  $\delta Q$  определялись точки области, в которых возмущенный поток  $\tilde{Q}$  наиболее отклоняется от  $Q$ .

Результаты расчета при  $t_j = 41$  часа 40 минут (500 временных шагов модели) представлены на рис. 6.2, где приведены собственные числа гессиана  $\mathcal{H}_0$  согласно формулам (4.11)–(4.13) для зимнего и летнего периода.

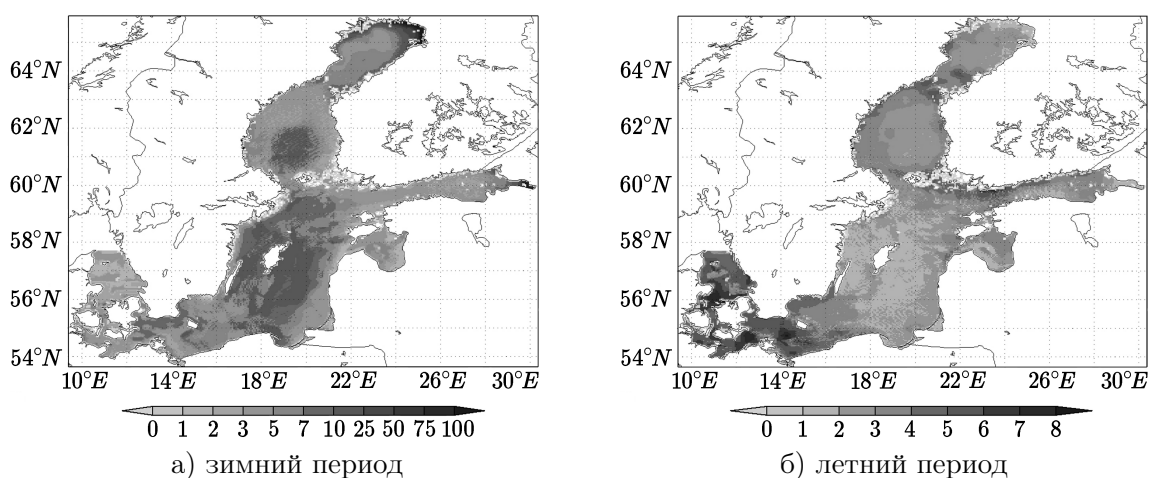


Рис. 6.2. Собственные числа гессиана  $\mathcal{H}_0$  после 500 шагов расчета

На рис. 6.3 представлены сингулярные числа оператора  $\mathcal{T}_2$ , которые определяют коэффициент чувствительности  $r_2$  для зимнего и летнего периодов расчета.

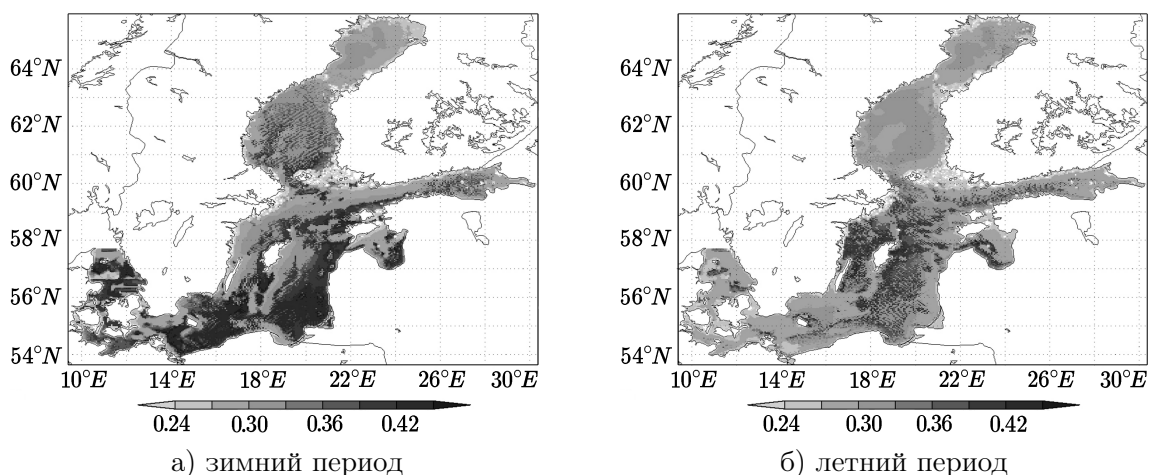


Рис. 6.3. Сингулярные числа оператора  $\mathcal{T}_2$  после 500 шагов расчета

Наибольшие сингулярные числа соответствуют точкам  $(x, y)$ , лежащим вблизи областей с небольшой глубиной, особенно в местах на склонах впадин (рис. 6.1). Таким образом, оптимальное решение оказывается наиболее чувствительным к погрешностям

наблюдений в точках поверхности вблизи этих областей, и устойчивость задачи о восстановлении потоков тепла на поверхности может ухудшаться в этих точках.

Для проверки теоретических выводов были проведены численные эксперименты с алгоритмом усвоения для возмущенной поверхностной температуры  $\tilde{T}_{\text{obs}} = T_{\text{obs}} + \varepsilon \delta T_{\text{obs}}$ ,  $\varepsilon = \text{const} > 0$ . Полученные в результате усвоения потоки  $\tilde{Q}$  сравнивались с невозмущенными потоками  $Q$ . На рис. 6.4 представлены значения  $\delta Q = \tilde{Q} - Q$  для случая, когда алгоритм усвоения включался в момент времени  $t_j = 41$  часа 40 минут при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta T_{\text{obs}} = T_{\text{obs}}$ . Из рис. 6.4 видно, что наибольшая ошибка в оптимальном решении  $\delta Q$  наблюдается вблизи тех участков расчетной области, где происходит изменение глубины Балтийского моря (рис. 6.1), что соответствует в целом полученному рисунку 6.3.

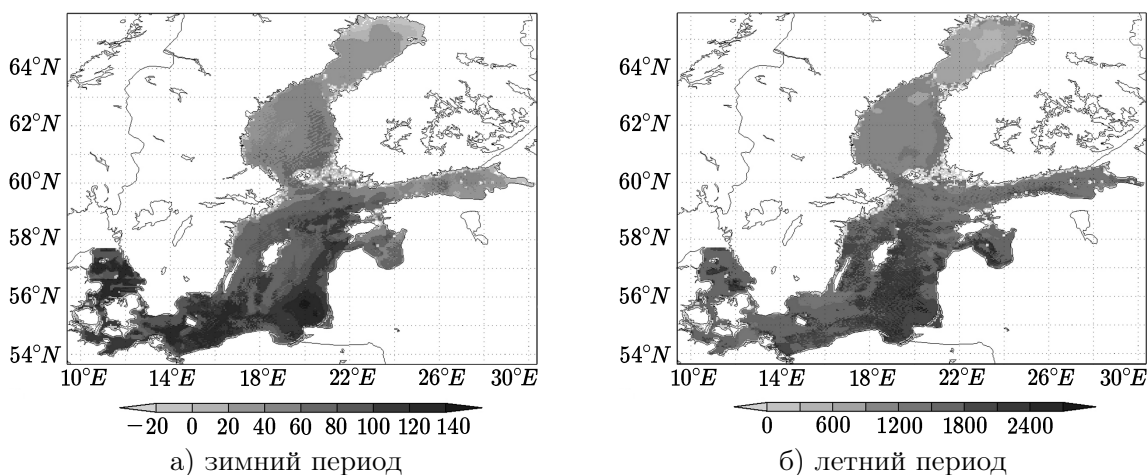


Рис. 6.4. Разность невозмущенного и возмущенного потоков при расчете на 500 шагов

Проведенные исследования позволяют решать задачу по определению подобластей, в которых оптимальное решение наиболее чувствительно к ошибкам наблюдений при вариационном усвоении данных, в случае когда значения ошибок заранее не известны.

Численные эксперименты подтверждают также, что в данной задаче необходимо введение регуляризатора с параметром  $\alpha > 0$ , что делает задачу определения оптимального решения устойчивой по отношению к ошибкам наблюдений.

## 7. Заключение

В настоящей работе проведено исследование устойчивости решения задачи вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря с целью восстановления потоков тепла на поверхности с использованием трехмерной модели гидротермодинамики Балтийского моря, разработанной в ИВМ РАН (В.Б. Залесный, Н.А. Дианский, А.В. Гусев). В качестве весовых функций для функционала стоимости в задаче ассимиляции были использованы диагональные элементы ковариационной матрицы ошибок наблюдений, которые вычисляются исходя из статистических свойств данных наблюдений. Уравнение для погрешности оптимального решения через ошибки данных наблюдений связано с гессианом исходного функционала наблюдений. Это уравнение приводит к определению коэффициентов чувствительности как норм операторов отклика, которые характеризуют степень влияния ошибок данных наблюдений на оптимальное решение задачи вариационного усвоения. Численные эксперименты для модели динамики Балтийского моря

показали, что задача о восстановлении потоков тепла на поверхности моря может быть неустойчивой в точках, лежащих вблизи областей с небольшой глубиной. Необходимо введение регуляризатора с параметром  $\alpha$ , чтобы сделать задачу определения потоков устойчивой по отношению к ошибкам наблюдений. Предложенная методология позволяет определять подобласти, в которых оптимальное решение наиболее чувствительно к ошибкам наблюдений при вариационном усвоении данных.

## Литература

1. **Marchuk G.I.** Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. — Dordrecht: Kluwer, 1995.
2. **Lions J.L.** Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles. — Paris: Dunod, 1968.
3. **Sasaki Y.K.** An objective analysis based on the variational method // J. Meteor. Soc. Japan. — 1958. — Vol. 36. — P. 77–88.
4. **Пененко В.В., Образцов Н.Н.** Вариационный метод согласования полей метеорологических элементов // Метеорология и гидрология. — 1976. — № 11. — С. 1–11.
5. **Le Dimet F.-X., Talagrand O.** Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. — 1986. — Vol. 38, iss. 2. — P. 97–110.
6. **Агошков В.И.** Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М.: ИВМ РАН, 2003.
7. **Mogensen K., Balmaseda M.A., Weaver A.T., Marti M., and Vidard A.** NEMOVAR: a variational data assimilation system for the NEMO ocean model // ECMWF Newsletter. — 2009. — Vol. 120. — P. 17–22.
8. **Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., and Aps R.** Numerical model of the Baltic Sea circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 85–100.
9. **Marchuk G.I.** Splitting and alternative direction methods // Handbook of Numerical Analysis / P.G. Ciarlet and J.L. Lions. — 1990. — Vol. 1. — P. 197–462.
10. **Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Bagno A.V., Gusev A.V., Diansky N.A., Moshonkin S.N., Tamsalu R., and Volodin E.M.** Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on multicomponent splitting method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2010. — Vol. 25, № 6. — P. 581–609.
11. **Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.** Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 8. — С. 1371–1391. — Перевод: Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyayev V.P. Numerical algorithm for variational assimilation of sea surface temperature data // Comput. Math. Math. Phys. — 2008. — Vol. 48, № 8. — P. 1293–1312.
12. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Zalesny V.B., Shutyayev V.P., Zakharova N.B., and Gusev A.V.** Variational assimilation of observation data in the mathematical model of the Baltic Sea dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2015. — Vol. 30, № 4. — P. 203–212.
13. **Le Dimet F.-X., Shutyayev V.** On deterministic error analysis in variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics. — 2005. — Vol. 12. — P. 481–490.
14. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., and Shutyayev V.P.** On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM J. Sci. Comput. — 2008. — Vol. 30, № 4. — P. 1847–1874.
15. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., and Shutyayev V.P.** On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // J. Comp. Phys. — 2010. — Vol. 229. — P. 2159–2178.

16. **Gejadze I., Shutyaev V.P., and Le Dimet F.-X.** Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society. — 2013. — Vol. 139. — P. 1826–1841.
17. **Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** The study of solution sensitivity for the variational observation data assimilation problem in the Black Sea dynamics model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 37–52.
18. **Алексеев В.В., Залесный В.Б.** Численная модель крупномасштабной динамики океана // Вычислительные процессы и системы. — М.: Наука, 1993. — С. 232–253.
19. **Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.** Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. — Л.: Гидрометеиздат, 1987.
20. **Agoshkov V. I., Gusev A. V., Diansky N. A., and Oleinikov R. V.** An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2007. — Vol. 22, № 2. — P. 1–10.
21. **Пененко В.В.** Методы численного моделирования атмосферных процессов. — Л.: Гидрометеиздат, 1981.
22. **Шутяев В.П.** Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. — М.: Наука, 2001.
23. **Ролль Г.У.** Физика атмосферных процессов над морем. — Л.: Гидрометеиздат, 1968.
24. **Тихонов А.Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.
25. **Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.** Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности ее решения // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 643–654. — Перевод: Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., and Shutyaev V.P. Observational data assimilation in the problem of black sea circulation and sensitivity analysis of its solution // Izvestiya, Atmospheric and Ocean Physics. — 2013. — Vol. 49, № 6. — P. 592–602.
26. **Захарова Н.Б., Лебедев С.А.** Интерполяция оперативных данных буев ARGO для ассимиляции данных в модели циркуляции Мирового океана // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. — 2010. — Т. 7, № 4. — С. 104–111.
27. **Zakharova N.B., Agoshkov V.I., and Parmuzin E.I.** The new method of ARGO buoys system observation data interpolation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 67–84.

*Поступила в редакцию 14 июля 2017 г.,  
в окончательном варианте 6 октября 2017 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Marchuk G.I.** Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. — Dordrecht: Kluwer, 1995.
2. **Lions J.L.** Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles. — Paris: Dunod, 1968.
3. **Sasaki Y.K.** An objective analysis based on the variational method // J. Meteor. Soc. Japan. — 1958. — Vol. 36. — P. 77–88.
4. **Penenko V.V., Obrazcov N.N.** Variacionnyj metod soglasovaniya polej meteorologicheskikh elementov // Meteorologiya i gidrologiya. — 1976. — № 11. — S. 1–11.
5. **Le Dimet F.-X., Talagrand O.** Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. — 1986. — Vol. 38, iss. 2. — P. 97–110.



6. **Agoshkov V.I.** Metody optimal'nogo upravleniya i sopryazhennykh uravnenij v zadachah matematicheskoy fiziki. — M.: IVM RAN, 2003.
7. **Mogensen K., Balmaseda M.A., Weaver A.T., Marti M., and Vidard A.** NEMOVAR: a variational data assimilation system for the NEMO ocean model // ECMWF Newsletter. — 2009. — Vol. 120. — P. 17–22.
8. **Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., and Aps R.** Numerical model of the Baltic Sea circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 85–100.
9. **Marchuk G.I.** Splitting and alternative direction methods // Handbook of Numerical Analysis / P.G. Ciarlet and J.L. Lions. — 1990. — Vol. 1. — P. 197–462.
10. **Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Bagno A.V., Gusev A.V., Diansky N.A., Moshonkin S.N., Tamsalu R., and Volodin E.M.** Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on multicomponent splitting method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2010. — Vol. 25, № 6. — P. 581–609.
11. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** Chislennyj algoritm variacionnoj assimilyacii dannyh nablyudenij o temperature poverhnosti okeana // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2008. — T. 48, № 8. — S. 1371–1391. — Perevod: Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P. Numerical algorithm for variational assimilation of sea surface temperature data // Comput. Math. Math. Phys. — 2008. — Vol. 48, № 8. — P. 1293–1312.
12. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Zalesny V.B., Shutyaev V.P., Zakharova N.B., and Gusev A.V.** Variational assimilation of observation data in the mathematical model of the Baltic Sea dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2015. — Vol. 30, № 4. — P. 203–212.
13. **Le Dimet F.-X., Shutyaev V.** On deterministic error analysis in variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics. — 2005. — Vol. 12. — P. 481–490.
14. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., and Shutyaev V.P.** On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM J. Sci. Comput. — 2008. — Vol. 30, № 4. — P. 1847–1874.
15. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., and Shutyaev V.P.** On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // J. Comp. Phys. — 2010. — Vol. 229. — P. 2159–2178.
16. **Gejadze I., Shutyaev V.P., and Le Dimet F.-X.** Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society. — 2013. — Vol. 139. — P. 1826–1841.
17. **Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** The study of solution sensitivity for the variational observation data assimilation problem in the Black Sea dynamics model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 37–52.
18. **Alekseev V.V., Zalesny V.B.** Chislennaya model' krupnomasshtabnoj dinamiki okeana // Vychislitel'nye processy i sistemy. — M.: Nauka, 1993. — S. 232–253.
19. **Marchuk G.I., Dymnikov V.P., Zalesny V.B.** Matematicheskie modeli v geofizicheskoy gidrodinamike i chislennye metody ih realizacii. — L.: Gidrometeoizdat, 1987.
20. **Agoshkov V. I., Gusev A. V., Diansky N. A., and Oleinikov R. V.** An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2007. — Vol. 22, № 2. — P. 1–10.
21. **Penenko V.V.** Metody chislennogo modelirovaniya atmosferyh processov. — L.: Gidrometeoizdat, 1981.
22. **Shutyaev V.P.** Operatory upravleniya i iteracionnye algoritmy v zadachah variacionnogo usvoeniya dannyh. — M.: Nauka, 2001.
23. **Roll' G.U.** Fizika atmosferyh processov nad morem. — L.: Gidrometeoizdat, 1968.
24. **Tihonov A.N.** O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyazicii // DAN SSSR. — 1963. — T. 151, № 3. — S. 501–504.

25. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** Assimilyaciya dannyh nablyudenij v zadache cirkulyacii Chernogo morya i analiz chuvstvitel'nosti ee resheniya // *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana.* — 2013. — Т. 49, № 6. — S. 643–654. — Perevod: Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., and Shutyaev V.P. Observational data assimilation in the problem of black sea circulation and sensitivity analysis of its solution // *Izvestiya, Atmospheric and Ocean Physics.* — 2013. — Vol. 49, № 6. — P. 592–602.
26. **Zaharova N.B., Lebedev S.A.** Interpolyaciya operativnyh dannyh buev ARGO dlya assimilyacii dannyh v modeli cirkulyacii Mirovogo okeana // *Sovremennye problemy distancionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa.* — 2010. — Т. 7, № 4. — S. 104–111.
27. **Zakharova N.B., Agoshkov V.I., and Parmuzin E.I.** The new method of ARGO buoys system observation data interpolation // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 67–84.