ПМТФ, № 6, 1963

# К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*В. И. Карпман*

(*Новосибирск*)

Недавно Драммонд и Розенблют показали [1], что движение электронов относительно ионов вдоль магнитного поля в разреженной плазме неустойчиво по отношению к возбуждению продольных ионных колебаний с частотой $\sim \Omega_i = eH / Mc$ (здесь и в дальнейшем $M$ — масса ионов, $m$ — электронов), распространяющихся под большими углами к магнитному полю. Неустойчивость имеет место при $T_e \sim T_i$ и сравнительно небольших дрейфовых скоростях $v_d$ электронов относительно ионов. Возникающие колебания приводят к аномальной диффузии электронов перпендикулярно к магнитному полю, не связанной с кулоновскими столкновениями.

Оценивая по квазилинейной теории [2,3] предельную амплитуду колебаний, Драммонд и Розенблют получили для коэффициента аномальной диффузии:

$$D_r^\circ \sim \rho_e^2 \Omega_e \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^6, \qquad \rho_e = \frac{v_e}{\Omega_e} \tag{0.1}$$

где $\rho_e^2 \Omega_e$ — коэффициент диффузии Бома. Оба коэффициента имеют одинаковую зависимость от магнитного поля ($\sim H^{-1}$), однако $D_r^\circ$ оказывается значительно меньше коэффициента Бома, так как $v_d / v_e \ll 1$.

Необходимо заметить, что формула (0.1) относится не к стационарному, а к метастабильному состоянию, характеризующемуся максимальной амплитудой волн (и наступающему после установления «плато» на функции распределения скоростей электронов вдоль магнитного поля). Это состояние существует ограниченное время, так как взаимодействие между волнами должно привести в конечном итоге к затуханию колебаний (§ 4) при полном пренебрежении столкновениями [4].

Однако известно [2], что достаточно редкие столкновения, не существенные для поглощения колебаний, должны приводить к частичной «максвеллизации» функции распределения электронов в резонансной области, т. е. в области скоростей, равных фазовым скоростям (вдоль магнитного поля) возбуждаемых колебаний. Благодаря этому вместо «плато» установится такое распределение скоростей, при котором инкременты волн не исчезают и должно наступить стационарное турбулентное состояние, при котором возбуждение волн будет компенсироваться их поглощением.

Ниже вычисляется коэффициент аномальной диффузии электронов поперек магнитного поля в этом установившемся состоянии. Оказывается, что даже при сравнительно малых частотах кулоновских столкновений амплитуда установившихся колебаний значительно больше, чем в квазистационарном состоянии, исследованном в [1] при полном пренебрежении столкновениями и взаимодействием волн, а коэффициент диффузии по порядку величины близок к коэффициенту Бома.

**§ 1. Влияние столкновений на инкремент.** Дисперсионное уравнение для возбуждаемых волн имеет вид [1]

$$\omega_k - \Omega_i = \Omega_i \frac{T_e}{T_i} \Gamma_1\left(\frac{\alpha_k^2}{2}\right), \qquad \gamma_k = \Omega_i \frac{\pi}{2} v_e^2 \frac{T_e}{T_i} \Gamma_1\left(\frac{\alpha_k^2}{2}\right) \frac{\partial f}{\partial v_z}\bigg|_{v_z = \omega_k / k} \tag{1.1}$$

$$\alpha_k = \frac{k_\perp v_i}{\Omega_i} = k_\perp \rho_i, \qquad \Gamma_1(x) = e^{-x} I_1(x) \tag{1.2}$$

Здесь $I_1(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $\omega_k$ — частота, $\gamma_k$ — инкремент волны, $k_\perp$, $k_z$ и $v_\perp$, $v_z$ — компоненты волнового вектора и скорости поперек и вдоль магнитного поля соответственно, $v_i$, $v_e$ — тепловые скорости ионов и электронов (тепловые скорости определяются как $\sqrt{2T / m}$, т. е. больше в $\sqrt{2}$ раз соответствующих величин работы [1]). Функция $\Gamma_1(x)$ имеет весьма широкий максимум, достигаемый при $x = 1.5$

и равный 0.2, так что максимальный инкремент имеют волны, у которых $\alpha_k \sim 1$, т. е. $\rho_i k_\perp \sim 1$ (поперечная длина волны порядка ионного лармировского радиуса). Для продольных компонент волнового вектора имеет место соотношение

$$\frac{v_i}{v_d} \leqslant \frac{k_z}{k_\perp} \ll 0.2\,\frac{T_e}{T_i} \tag{1.3}$$

Отсюда следует, во-первых, что продольные компоненты можно считать малыми по сравнению с $k_\perp$; во-вторых, (1.3) определяет порядок критической величины дрейфовой скорости $v_d$, при которой возникает неустойчивость: $v_e > v_d \gtrsim 5v_i$ (при $T_e / T_i \sim 2$ [1]). Функция $f(v_z)$, определяющая инкременты волн (1.1), будет функцией распределения скоростей электронов вдоль магнитного поля

$$f(v_z) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp F^{(e)}\,(v_z,\,v_\perp,\,\varphi)\,dv_\perp \tag{1.4}$$

Здесь $F^{(e)}$ — полная электронная функция распределения. В начальной стадии роста волн, когда амплитуда волн еще достаточно мала, эту функцию будем считать максвелловской

$$f(v_z) = f^{\circ}(v_z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,v_e} \exp\left[-\left(\frac{v - v_d}{v_e}\right)^2\right] \tag{1.5}$$

Соответственно начальный инкремент равен

$$\gamma_k^{\circ} = \sqrt{\pi}\,\Omega_i \frac{T_e}{T_i}\,\Gamma_1\left(\frac{\alpha_k^2}{2}\right)\frac{v_d}{v_e} \approx 0.4\,\Omega_i \frac{T_e}{T_i}\,\frac{v_d}{v_e} \tag{1.6}$$

При достаточно больших амплитудах волны начинают искажать функцию распределения в «резонансной» области скоростей

$$0 < v_z \leqslant v_d \tag{1.7}$$

Это искажение тем больше, чем меньше частота кулоновских столкновений. При полном отсутствии последних функция распределения $f(v_z)$ в резонансной области стремится принять форму «плато». Кинетическое уравнение, описывающее обратное влияние волн на функцию распределения с учетом столкновений, имеет вид [2] (1.8)

$$\frac{\partial f(v_z,\,t)}{\partial t} = \pi\left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\mathbf{p}} |E_z(\mathbf{p})|^2 \frac{\partial}{\partial v_z}\left[\delta(\omega - p_z z_z)\,\frac{\partial f}{\partial v_z}\right] + \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dv_\perp v_\perp\,S\{F\}$$

Первый член в правой части описывает влияние волн; $S\{F\}$ — обычный интеграл столкновений Ландау

$$S\{F\} = \frac{2\pi e^4 L}{m^2}\,\frac{\partial}{\partial v_i}\int\left(F'\,\frac{\partial F}{\partial v_k} - F\,\frac{\partial F'}{\partial v_k'}\right)\frac{u^2\delta_{ik} - u_i u_k}{u^2}\,d^3v'$$

$$(u = v_i - v_i') \tag{1.9}$$

Здесь $L$ — кулоновский логарифм. Так как обратное влияние колебаний приводит к изменению функции распределения лишь в узкой резонансной области (1.7), причем существенно меняется ее производная, а не величина, то вместо $F'$ в (1.9) можно, как и в [2], подставить максвелловскую функцию распределения; в результате $S\{F\}$ линеаризуется. Кроме того, можно выполнить интегрирование по поперечным компонентам скорости, полагая зависимость функции распределения от этих компонент максвелловской; при этом уравнение (1.8) примет вид

$$\frac{\partial f(v_z,\,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_z}\left(D_v\,\frac{\partial f}{\partial v_z}\right) + \nu\,\frac{\partial}{\partial v_z}\left[\frac{\partial f}{\partial v_z}\,v_e^2 + 2\,(v_z - v_d)\,f\right] \tag{1.10}$$

где (1.11)

$$D_v = \pi \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{p_z}{p}\right)^2 E_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega - p_z v_z), \qquad \nu = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\nu_D, \qquad \nu_D = \frac{8\pi L e^4 n}{m^2 v_e^3}$$

($\nu_D$ — эффективная частота электрон-электронных столкновений при средней тепловой скорости $v_e$, определенная Спитцером (см. [5], (5.22)). При получении второго члена в (1.10) использовалась малость $v_d / v_e$.

Величина $D_v$, определенная в (1.11), имеет смысл коэффициента диффузии электронов в пространстве скоростей благодаря резонансному взаимодействию с волнами; $D_v$ обращается в нуль вне резонансной области; согласно (1.7) ширина последней $\sim v_d$.

Удобно положить

$$D_v = \alpha\theta(v), \quad \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} D_v dv = \pi\left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_z}{p^2} E_{\mathbf{p}}^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \theta(v)\, dv = 1 \qquad (1.12)$$

Величина $\theta(v)$ отлична от нуля лишь в резонансной области, поэтому можно считать, что $\theta(v) \sim v_d^{-1}$. На основании (1.3) можно положить $p_z / p \sim v_i / v_d$, $p \sim p_\perp \sim \Omega_i / v_i$. В итоге получим

$$D_v \sim 8\pi^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{v_i^2}{v_d^2 \Omega_i} W \quad (v \lesssim v_d) \qquad \left(W = \frac{1}{8\pi}\sum_{\mathbf{p}} |E_{\mathbf{p}}|^2\right) \qquad (1.13)$$
$$D_v = 0 \quad (v > v_d)$$

Здесь $W$ — плотность энергии волн. Полагая в (1.10) производную $\partial f / \partial t = 0$, получаем значение производной функции распределения в случае установившегося состояния

$$\frac{\partial f}{\partial v_z} = -\left(1 + \frac{D_v}{\nu v_e^2}\right)^{-1} \frac{2(v_z - v_d)}{v_e^2} f^\circ(v_z) \qquad (1.14)$$

В правой части (1.14) вместо $f(v_z)$ стоит максвелловская функция распределения (1.5), ибо как уже отмечалось выше, можно считать, что в результате обратного действия волн заметно меняется лишь производная функции распределения в резонансной области, а не ее величина. Подставляя (1.14) в выражение для инкремента (1.1), получим

$$\gamma_k = \gamma_k^\circ \left(1 + \frac{D_v}{\nu v_e^2}\right)^{-1} \qquad (1.15)$$

где $\gamma_k^\circ$ — инкремент линейной теории, определяемый формулой (1.6). Если частота столкновений превышает $D_v / v_e^2$, то инкремент $\gamma_k$ близок к $\gamma_k^\circ$ (в этом случае производная функции распределения (1.15) близка к максвелловской). В обратном случае очень малых частот столкновений имеем

$$\gamma_k \approx \frac{\nu v_e^2}{D_v} \gamma_k^\circ \qquad (1.16)$$

**§ 2. Нелинейное взаимодействие волн.** Как уже отмечалось выше, наряду с возбуждением колебаний при движении электронов относительно ионов имеет место их поглощение, обусловленное нелинейным взаимодействием волн во втором порядке по отношению к полю. Это взаимодействие в прозрачной области исследовалось ранее в [6,7], а в случае малой «непрозрачности» (когда инкременты (декременты) волн [1] достаточно малы) — в [4]. Соответствующие результаты могут быть непосредственно применены к рассматриваемому случаю.

[1] Другой метод исследования нелинейного взаимодействия волн развивается в работе [8].

Запишем электрическое поле колебаний в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{k},\, \mathbf{k}_-} E_{\mathbf{p}}(t) \exp i(\mathbf{pr} - \omega_{\mathbf{p}} t)$$

$$E_{\mathbf{k}_-} = E_{\mathbf{k}}^*, \qquad \mathbf{k}_- = -\mathbf{k}, \qquad \omega_{\mathbf{k}_-} = -\omega_{\mathbf{k}}, \qquad \omega_{\mathbf{k}} > 0 \tag{2.1}$$

где $\omega_{\mathbf{p}}$ — действительная часть частоты, а $E_{\mathbf{p}}(t)$ — амплитуда, зависимость которой от времени определяется, во-первых, инкрементом (1.15) и, во-вторых, нелинейным взаимодействием между гармониками. В силу продольности колебаний это взаимодействие приводит к изменению только величины $E_{\mathbf{p}}(t)$ (в общем случае меняется и направление [6,7]). Динамическое уравнение для $E_{\mathbf{p}}(t)$ с точностью до членов второго порядка по $E_{\mathbf{p}}$ имеет вид [4,6,7]

$$\frac{dE_{\mathbf{p}}}{dt} = \gamma_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} V_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''} E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{p}''} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}'}+\omega_{\mathbf{p}''}-\omega_{\mathbf{p}})t} + \tag{2.2}$$

$$+ \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''+\mathbf{p}'''=\mathbf{p}} V_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''\mathbf{p}'''} E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{p}''} E_{\mathbf{p}'''} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}'}+\omega_{\mathbf{p}''}+\omega_{\mathbf{p}'''}-\omega_{\mathbf{p}})t}$$

где матричные элементы $V$ выражаются через функции распределения частиц (см. ниже). В турбулентном состоянии, наступающем после достаточного развития неустойчивости, фазы амплиутд $E_{\mathbf{p}}(t)$ изменяются гораздо быстрее их модулей и коррелируют между собой в течение очень малого времени по сравнению с характерным временем изменения величин $N_{\mathbf{p}} = |E_{\mathbf{p}}(t)|^2$. Поэтому при вычислении $dN_k / dt$ можно усреднить по фазам все $E_k$ в данный момент и получить кинетическое уравнение для волн [6,4], которое определяет $dN_k / dt$ через $N_k$. В рассматриваемом случае частоты колебаний близки к $\Omega_i$, и поэтому здесь не выполняются так называемые распадные условия $(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})$, приводящие к превращению двух волн в одну и наоброт. Поэтому кинетическое уравнение будет иметь вид [4] (2.3)

$$\frac{dN_p}{dt} = 2\gamma_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}'} \left[ 8\, \frac{\operatorname{Im}(V_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''} V_{\mathbf{p}''\mathbf{p}_-'\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}'} + \omega_{\mathbf{p}''} - \omega_{\mathbf{p}}} + 6 \operatorname{Re} V_{\mathbf{pp}_-\mathbf{p}\,\mathbf{p}_-'} \right]$$

Для получения матричных элементов $V_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''}$, $V_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''\mathbf{p}'''}$ следует определить функцию распределения с точностью до членов $\sim E_p^3$. Положим

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_0(\mathbf{v}, t) + \sum_p e^{i\mathbf{pr}} \Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, t) \tag{2.4}$$

$$\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, t) = \frac{e}{im} E_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, t)\, e^{-i\omega_{\mathbf{p}} t} + \left(\frac{e}{im}\right)^2 \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{p}''} F_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''}(\mathbf{v}, t) \times$$

$$\times\, e^{-i(\omega_{\mathbf{p}'}+\omega_{\mathbf{p}''})t} + \left(\frac{e}{im}\right)^3 \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''+\mathbf{p}'''=\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{p}''} E_{\mathbf{p}'''} F_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''\mathbf{p}'''}(\mathbf{v}, t)\, e^{-i(\omega_{\mathbf{p}'}+\omega_{\mathbf{p}''}+\omega_{\mathbf{p}'''})t} \tag{2.5}$$

Здесь $F_0(v, t)$, $F_p(v, t)$, $F_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''}(v, t)$, $F_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''\mathbf{p}'''}(v, t)$, как и в обычной квазилинейной теории [2,3],— медленно меняющиеся функции времени, а $E_p(t)$ удовлетворяют динамическому уравнению (2.2). Тогда $V_{pp'p''}$ и $V_{pp'p''p'''}$ будут выражаться через функции $F_{pp'p''}$, $F_{pp'p''p'''}$ соответственно.

Займемся сначала вычислением $V_{pp'p''}$. Общее выражение для этой величины имеет вид [7,4]

$$V_{pp'p''} = \sum_{j=l,\,i} \frac{e_j}{m_j} \omega_{0j}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{vp}}{p} F^j_{pp'p''}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} \tag{2.6}$$

где суммирование производится по сортам частиц; $\omega_{0j}$ — плазменная частота соответствующего сорта. Заметим, что правая часть (2.6) пропорциональна коэффициенту электропроводности второго порядка $\sigma_{\mathbf{pp'p''}}$

$$j_{\mathbf{p}}^{(2)} = \sum_{\mathbf{p'}+\mathbf{p''}=\mathbf{p}} \sigma_{\mathbf{pp'p''}} E_{\mathbf{p'}} E_{\mathbf{p''}} e^{-i(\omega_{\mathbf{p'}}+\omega_{\mathbf{p''}})t},$$

где $j_{\mathbf{p}}^{(r)}$ — фурье — компонента поправки второго порядка к току. Используя уравнение непрерывности $\partial\rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и учитывая продольность колебаний, выражение (2.6) легко преобразуется к виду

$$V_{\mathbf{pp'p''}} = \sum_{j=l,i} \frac{e_j}{m_j} \omega_{0j}^2 \frac{\omega_{\mathbf{p'}} + \omega_{\mathbf{p''}}}{p} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mathbf{pp'p''}}^{(j)}(\mathbf{v})\, d^3v \tag{2.7}$$

Для определения функции распределения второго порядка $F_{\mathbf{pp'p''}}(\mathbf{v})$ нужно подставить разложения (2.4), (2.5) в общее кинетическое уравнение для функции распределения, учитывая при этом, что амплитуды поля $E_{\mathbf{p}}$ также зависят от времени согласно уравнению (2.2), и используя приближенные выражения для функций распределения первого порядка

$$F_{\mathbf{p}}^{(i)}(\mathbf{v}) = -\frac{2\omega_{\mathbf{p}} F(v) J_1(\lambda_p)}{v_i^2 p (\omega_{\mathbf{p}} - p_z v_z - \Omega_i)} e^{i(\lambda_{\mathbf{p}} \sin\varphi - \varphi)} \qquad \left(\lambda_{\mathbf{p}} = \frac{p_\perp v_\perp}{\Omega_i}\right) \tag{2.8}$$

$$F_{\mathbf{p}}^{(e)}(v) = (\omega_p - p_z v_z)^{-1} \frac{p_z}{p} \frac{\partial f}{\partial v_z} \qquad (F(\mathbf{v}) = F^{(i)},\ F^{(e)}(\mathbf{v}) = f) \tag{2.9}$$

которые просто получаются из точных выражений для этих функций (см., например, [1], Приложение), если учесть, что

$$\omega_p - \Omega_i \gg p_z v_z, \qquad \omega_p - \omega_i \ll \Omega_i \tag{2.10}$$

Вычисляя таким образом $F_{\mathbf{pp'p''}}(\mathbf{v})$ в лагранжевых координатах и подставляя в (2.7), получим (2.11)

$$V_{\mathbf{pp'p''}} = \frac{\omega_{\mathbf{p'}} + \omega_{\mathbf{p''}}}{p} \left[\frac{e}{M} \omega_{0i}^2 B_{\mathbf{pp'p''}} - \frac{e}{m} \omega_{0e}^2 b_{\mathbf{pp'p''}} - (\omega_{0i}^2 A_{\mathbf{pp'p''}} - \omega_{0e}^2 a_{\mathbf{pp'p''}}) V_{\mathbf{pp'p''}}\right]$$

$$A_{\mathbf{pp'p''}} = \frac{4\pi\omega_p}{p v_i^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{\infty} dv_\perp v_\perp F(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_1(\lambda) J_n(\lambda) J_{n+1}(2\lambda)}{(\omega_{\mathbf{p}} - p_z v_z - \Omega)(\omega_{\mathbf{p'}} + \omega_{\mathbf{p''}} - n\Omega - p_z v_z)} \tag{2.12}$$

$$B_{\mathbf{pp'p''}} = -\frac{2\pi p_\perp' \omega_{p''}}{v_i^2 p' p''} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{\infty} dv_\perp \frac{F(\mathbf{v})}{\omega_{\mathbf{p''}} - p_z'' v_z - \Omega_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p'}} + \omega_{\mathbf{p''}} - n\Omega_i - p_z v_z} \times$$

$$\times \left[\frac{(n+1)\alpha_{\mathbf{p''}}}{\alpha_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p''}}} J_1'(\lambda'') J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda + \lambda'') - \frac{2(n+1)}{\alpha_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p''}}} \frac{v_\perp}{v_i} \times \right. \tag{2.13}$$

$$\left. \times J_1(\lambda'') J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda + \lambda'') + J_1(\lambda'') J_n(\lambda) J_{n+1}'(\lambda + \lambda'')\right] + (\text{симм})$$

$$a_{\mathbf{pp'p''}} = \frac{p_z}{p} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{f_v'(v)}{(\omega_{\mathbf{p'}} + \omega_{\mathbf{p''}} - p_z v)(\omega_{\mathbf{p}} - p_z v)} \tag{2.14}$$

$$b_{\mathbf{pp'p''}} = -\frac{p_z' p_z'' p_z}{2p'p''} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv f_v'(v)}{(\omega_{\mathbf{p'}} + \omega_{\mathbf{p''}} - p_z v)(\omega_{\mathbf{p'}} - p_z' v)(\omega_{\mathbf{p''}} - p_z'' v)} \tag{2.15}$$

$$F(\mathbf{v}) = (\pi v_i^2)^{-3/2} \exp(-v^2 / \mathbf{v}_i^2), \qquad \alpha_{\mathbf{p}} = p_\perp v_i / \Omega_i$$

Здесь $f(v)$ — электронная функция распределения для продольной скорости $v = v_z$, которая в резонансной области определяется уравнением (1.14), а вне этой области ее можно считать максвелловской; $J_n(\lambda)$ — функция Бесселя вещественного аргумента, $\lambda = \lambda_{\mathbf{p}}$, $\lambda'' = \lambda_{\mathbf{p}''}$, где $\lambda_{\mathbf{p}}$ такое же, как и в (2.8). Символ + (симм) означает, что остальные члены получаются из предыдущих симметризацией в (2.13), т. е. заменой $p''$ на $p'$. При обходе полюсов в (2.12) — (2.15) необходимо считать, что у всех частот имеется малая мнимая добавка в верхней полуплоскости. Соответствующие полувычеты дают мнимую часть матричных элементов $V_{\mathbf{pp'p''}}$, которая определяет второй член в кинетическом уравнении (2.3). Явного аналитического выражения для величин $A_{\mathbf{pp'p''}}$, $B_{\mathbf{pp'p''}}$ получить не удается из-за сложности интегрирования по $v_\perp$ в (2.12), (2.13). Можно, однако, сделать простые оценки, определяющие порядок этих величин. Так как под интегралами по $v_\perp$ входят экспоненты, обрезающие их при $v_\perp \sim v_i$, можно считать, что

$$\lambda_p = \frac{p_\perp v_\perp}{\Omega_i} \lesssim \frac{p_\perp v_i}{\Omega_i} \sim 1 \tag{2.16}$$

Поэтому интегралы по $v_\perp$ можно вычислять приближенно, разлагая функции Бесселя в ряд. Для получения правильного порядка величины достаточно ограничиться первым членом разложения, т. е. писать $J_n(\lambda) \sim \lambda^n / 2^n n!$ (легко проверить, что учет следующих членов разложения не меняет порядка величины). При оценке сумм в (2.12), (2.13) следует рассмотреть два случая в зависимости от знаков $\omega_{p'}$, $\omega_{p''}$. Если эти знаки одинаковы, то достаточно ограничиться членами с $n = 2$ при $\omega > 0$ и $n = -2$ при $\omega < 0$. В случае противоположных знаков нужно оставить член с $n = 0$. Это следует из того, что все $\omega_p \sim \Omega_i$. Поступая таким образом, получим [1] (2.17)

$$A_{\mathbf{kk'k''}} \sim \frac{\alpha_k^6 \omega_k}{16 v_i^2 k (\omega_k - \Omega_i)^2}, \quad A_{kk_-'k''} \sim -i\left(1 + i\,\frac{\omega_{k''} - \omega_{k'}}{k_z v_i}\right) \frac{\omega_k \alpha_k^2}{k k_z (\omega_k - \Omega_i) v_i^3}$$

$$B_{kk'k''} \approx \frac{\Omega_i^2 \alpha_k^2 \alpha_{k'} \alpha_{k''}}{64 v_i^4 k' k'' (\omega_k - \Omega_i)^2} [(\alpha_k + \alpha_{k'})^2 + (\alpha_k + \alpha_{k''})^2] \tag{2.18}$$

$$B_{kk_-'k''} \approx \left(\frac{\omega_{k''} - \omega_{k'}}{k_z v_i} - i\right) \frac{\Omega_i \omega_{k'} \alpha_{k'} \alpha_{k''} \alpha_k^2}{8 v_i^5 k_z k' k'' (\omega_{k''} - \Omega_i)} \qquad \left(\alpha_k = \frac{k_\perp v_i}{\Omega_i}\right)$$

При этом пренебрегли членами $\sim k_z / k \sim v_z / v_d$.

Величины $a_{pp'p''}$ и $b_{pp'p''}$ легко подсчитать, разлагая подынтегральное выражение в (2.14), (2.15) на элементарные дроби. При этом оказывается:

$$\frac{a_{pp'p''}}{A_{pp'p''}} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{3/2}, \qquad \frac{b_{pp'p''}}{B_{pp'p''}} \sim \frac{v_i}{v_d}\left(\frac{m}{M}\right)^2 \tag{2.19}$$

Отсюда следует, что членами, содержащими $a_{pp'p''}$ и $b_{pp'p''}$, можно пренебречь (т. е. вклад электронов в нелинейные эффекты мал). Далее легко убедиться, что $(\omega_{0i}^2 \Omega_i / p) A_{pp'p''} \gg 1$, так что левую часть (2.11) можно считать равной нулю (это есть не что иное, как условие квазинейтральности). В результате будем иметь

$$V_{pp'p''} \approx \frac{e}{2M} \frac{B_{pp'p''}}{A_{pp'p''}} \tag{2.20}$$

Подставляя сюда (2.17), (2.18), получим, что величины $V_{pp'p''}$ с принятой степенью точности оказываются вещественными и поэтому не вносят вклада в (2.3). Оценим теперь $V_{pp'p''p'''}$.

---

[1] Напомним, что волновые векторы, отвечающие положительной частоте, обозначаются через $k$, а отрицательной — через $k_-$ (см. (2.1)):

$$p = k(\omega_p > 0), \quad p = k_-\ (\omega_p < 0)$$

Для этого используем условие квазинейтральности

$$\int F^{i}_{pp'p''p'''}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} = 0 \tag{2.21}$$

(вкладом от электронов, как и выше, пренебрегаем). Для определения $F^{i}_{pp'p''p'''}$ подставим (2.5) в кинетическое уравнение для ионной функции распределения и учтем при этом, что $E_p$ зависят от времени, согласно динамическому уравнению (2.2). Тогда для $F^{i}_{pp'p''p'''}$ получим

$$i\left(\omega - \mathbf{pv} - i\Omega_i \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) F^{i}_{pp'p''p'''} = \left(\frac{iM}{e}\right)^2 V_{pp'p''p'''} F_p{}^i +$$

$$+ i\frac{2M}{3e}\sum_q \left(F_{pp'q} V_{qp''p'''} + \text{симм}\right) + \frac{i}{3}\left(\frac{\mathbf{p}'}{p'} \frac{\partial F_{p-p', p'', p'''}}{\partial \mathbf{v}} + \text{симм}\right) \tag{2.22}$$

где $\omega = \omega_{p'} + \omega_{p''} + \omega_{p'''}$ и симметризация производится так, чтобы правая часть была симметричной относительно индексов $p'$, $p''$, $p'''$. Решая (2.22) в лагранжевых переменных и подставляя $F^{i}_{pp'p''p'''}$ в условие квазинейтральности, получим (2.23)

$$V_{pp_-'pp_-'} \approx -\frac{i}{v_i^2}\left(\frac{e}{M}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0{}^i(v_z)\, dv_z}{\omega_p - \omega_{p'} - (p_z - p_z')v_z + i\varepsilon}, \qquad F_0{}^i = \frac{\exp(-v_z{}^2/v_i{}^2)}{\sqrt{\pi}\, v_i}$$

$$\operatorname{Re} V_{pp_-p'p_-'} \approx -\frac{1}{v_i^3}\left(\frac{e}{M}\right)^2 \frac{1}{p_z - p_z'} \exp\left\{-\left[\frac{\omega_p - \omega_{p'}}{(p_z - p_z')v_i}\right]^2\right\} \tag{2.24}$$

(При этом сделаны те же упрощения, что и при вычислении $V_{pp'p''}$). Выражение (2.24) написано для случая, когда $\omega_p > 0$, $\omega_{p'} > 0$. Если $\omega_{p'}$ отрицательно, то знаменатель подынтегрального выражения в (2.23) должен иметь вид $\omega_p + |\omega_{p'}| - 2\Omega_i - (p_z + |p_z'|)\, v_z$ и, следовательно, соответствующий полувычет значительно меньше, чем в (2.23). Формула (2.24) имеет простой физический смысл: она описывает поглощение вынужденных колебаний с комбинационными частотами $\omega_p - \omega_{p'}$ и волновыми векторами $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$, находящихся в резонансе с ионами со скоростями $v_z = (\omega_p - \omega_{p'}) / (p_z - p_z')$.

**§ 3. Установившееся состояние. Аномальная диффузия.** Для определения энергии электрического поля турбулентных пульсаций в установившемся состоянии надо положить в (2.3) $dN_k / dt = 0$. Подставляя в (2.3) выражения (2.24) и (2.20), получим

$$\frac{\gamma_k{}^\circ}{1 + D_v / \nu v_e{}^2} \sim \frac{10}{v_i^2}\left(\frac{e}{M}\right)^2 \langle\omega_p - \omega_{p'}\rangle^{-1} W \tag{3.1}$$

Здесь

$$\langle\omega_p - \omega_{p'}\rangle \sim \Omega_i \frac{T_e}{T_i} \left\langle \Gamma_1{}'\left(\frac{p_\perp{}^2 v_i{}^2}{\Omega_i{}^2}\right)\left(\frac{p_\perp v_i}{\Omega_i}\right)^2\right\rangle \sim 0.1\,\Omega_i \frac{T_e'}{T_i}$$

Коэффициент диффузии в пространстве скоростей $D_v$ и плотность энергии поля $W$ связаны соотношением (1.13), поэтому из (3.1) получим

$$W \sim 10^{-3}\left(\frac{M}{e}\right)^2 \Omega_i{}^2 v_i{}^2 \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \frac{v_d}{v_e}, \quad D_v \sim \frac{\Omega_i v_e{}^2}{10}\left(\frac{v_e}{v_d}\right) \quad \left(\nu \gg \frac{D_v}{v_e{}^2}\right) \tag{3.2}$$

В обратном предельном случае будем иметь (3.3)

$$W \sim \frac{Mm}{e^2} \frac{\Omega_i{}^2}{10^2}\left(\frac{\nu}{\Omega_i} v_d{}^3 v_e\right)^{1/2} \frac{T_e}{T_i}, \qquad D_v \sim \Omega_i v_e{}^2 \left(\frac{\nu v_e}{\Omega_i v_d}\right)^{1/2} \frac{T_e}{T_i} \qquad \left(\nu \ll \frac{D_v}{v_e{}^2}\right)$$

Пространственный коэффициент диффузии $D_r$ выражается через $D_v$ следующим образом [1]:

$$D_r \approx \rho_e^2 \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^3 \frac{D_v}{v_i^2} \qquad \left(\rho_e = \frac{v_e}{\Omega_e}\right)$$

В случае (3.2) получим

$$D_r \sim 10^{-1} \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^2 \rho_e^2 \Omega_e \frac{T_e}{T_i} \qquad \left(\nu \gg \frac{D_v}{v_e^2}\right) \tag{3.4}$$

Эта величина имеет такую же зависимость от магнитного поля, как и коэффициент диффузии Бома; она значительно больше, чем (1.1). Однако легко убедиться, что эта формула применима при слишком больших частотах столкновений ($\nu \sim \gamma_0\, (M\,/\,m)^{1/2}$), когда последние уже начинают влиять на поглощение волн. При $\nu \ll D_\nu\,/\,v_e^2$ из (3.3) следует

$$D_r \sim \rho_e^2 \Omega_e \left(\frac{\nu}{\Omega_i}\right)^{1/2} \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^{5/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \tag{3.5}$$

Можно считать, что эта формула правильно передает порядок величины коэффициента диффузии в установившемся состоянии от самых малых частот столкновений до $\nu \sim \gamma^\circ (M\,/\,m)^{1/2}$, когда столкновения уже начинают влиять на поглощение (в этом случае (3.5) переходит в (3.4). Зависимость коэффициента пространственной диффузии $D_r$ от $H$ по формуле (3.5) не вполне такая, как у Бома, а именно, $D_r \sim H^{-3/2}$.

§ 4. **Заключение.** При сопоставлении с результатами работы [1] следует иметь в виду, что полученный там коэффициент диффузии относится к состоянию, которое существует ограниченное время, пока колебания еще не успели затухнуть вследствие эффектов поглощения, рассмотренных в п. 2. С другой стороны, выражение (3.5) относится к установившемуся состоянию, которое оказывается незатухающим благодаря редким столкновениям, «максвеллизующим» функцию распределения электронов в резонансной области.

Коэффициент диффузии (3.5) будет больше (0.1) при

$$\nu > \Omega_i \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^7 \tag{4.1}$$

Отсюда заключаем, что нижняя граница частот столкновений оказывается весьма малой.

В заключение благодарю Р. З. Сагдеева за плодотворные обсуждения рассмотренных вопросов.

Поступила 26 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Drummond W., Rosenbluth M. Anomalous Diffusion Arising from Microinstabilities in a Plasma. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No 12.
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы. Ядерный синтез, 1961, т. 1, стр. 82.
3. Drummond W., Pines D. Non-linear stability of Plasma Oscillations. Proc. Conf. on Plasma Phys., Salzburg, 1961, Rep. CN — 10/134 (Nucl. Fus. Suppl.). Докл. на Конф. по физике плазмы, Зальцбург.
4. Карпман В. И. К теории слаботурбулентной плазмы. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 3.
5. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. ИЛ, 1957.
6. Галеев А. А., Карпман В. И. Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы и структура ударных волн. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, вып. 2.
7. Карпман В. И. О нелинейных эффектах в электродинамике прозрачной среды. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, вып. 4.
8. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Слаботурбулентная плазма в магнитном поле. ж. эксперимент. и теор. физ., 1962, т. 43, вып. 6.