

УДК 681.518.22

## СИНТЕЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ\*

В. Г. Волков, Д. Н. Демьянов

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18  
E-mail: demyanovdn@mail.ru*

Показано, что задача синтеза наблюдателя для оценки некоторой совокупности линейных комбинаций переменных состояния объекта может быть сформулирована в терминах линейных матричных неравенств. Предложен алгоритм построения функциональных наблюдателей, основанный на невырожденном преобразовании модели объекта в пространстве состояний с помощью технологии канонизации матриц и последующем решении системы линейных матричных неравенств.

*Ключевые слова:* оценивание, функциональный наблюдатель, алгоритм синтеза, линейные матричные неравенства, канонизация матриц.

DOI: 10.15372/AUT20160403

**Введение.** Решение многих задач управления и диагностики требует наличия полной информации о текущем состоянии технического объекта [1, 2]. При этом некоторые переменные вектора состояния динамической системы часто недоступны непосредственному измерению (в частности, вследствие неясного физического смысла измеряемых величин или технической сложности и дороговизны датчиков). В подобных случаях для оценки вектора состояния используются так называемые наблюдатели, позволяющие восстанавливать требуемую информацию об объекте по известным входным и выходным сигналам.

Распространённые в настоящее время различные типы наблюдателей подробно описаны в специальной литературе [3, 4]. Среди них существенный интерес представляют функциональные наблюдатели, позволяющие восстанавливать произвольную совокупность линейных комбинаций переменных состояния динамического объекта. Показано, что порядок таких наблюдателей может оказаться много ниже порядка наблюдателей иных типов [3]. Следовательно, для их практической реализации потребуется меньше вычислительных ресурсов, что может быть весьма важным, например, при разработке алгоритмов функционирования бортовых информационно-управляющих систем мобильных объектов.

Существуют различные подходы к расчёту коэффициентов функциональных наблюдателей [5, 6]. Однако по своей сути все они сводят исходную задачу к решению линейного уравнения или системы уравнений. При этом, как показывает опыт применения таких подходов, получаемые решения часто не обладают свойством грубости и характеризуются

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-08-00651).

наличием больших по модулю коэффициентов, затрудняющих практическую реализацию наблюдателя. Таким образом, весьма актуальной задачей представляется поиск нового метода синтеза функциональных наблюдателей, который был бы свободен от недостатков уже известных наблюдателей.

В данной работе предлагается новый метод синтеза функциональных наблюдателей, основанный на решении линейных матричных неравенств (ЛМН). Формулировка задачи в терминах ЛМН позволяет использовать для её решения эффективные алгоритмы и программное обеспечение [7], находя матрицу наблюдения с требуемыми характеристиками (например, минимальную по норме). Определены условия разрешимости задачи и описан алгоритм её решения, легко реализуемый на ЭВМ.

**Постановка задачи.** Пусть рассматриваются динамическая система, описываемая уравнениями в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx, \quad (1)$$

и некоторый линейный функционал переменных состояния вида

$$g = Kx. \quad (2)$$

Здесь  $x \in R^n$ ,  $u \in R^s$ ,  $y \in R^m$ ,  $g \in R^p$  — векторы состояния, управления, выхода и интересующего нас функционала;  $A, B, C, K$  — числовые матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что все матрицы коэффициентов известны, вектор состояния недоступен непосредственному измерению, векторы входа и выхода могут быть измерены с достаточно высокой точностью, пара  $(A, C)$  полностью наблюдаема по Калману, все строки матрицы выхода линейно независимы.

Требуется синтезировать динамическую систему порядка  $p$ , формирующую такую оценку  $\hat{g}$  функционала (2) по известным входному  $u$  и выходному  $y$  сигналам, что

$$\varepsilon(t) = g(t) - \hat{g}(t) \rightarrow 0_{p,1} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

**Предварительные соотношения.** Приведение динамической системы (1) к удобной для дальнейших выкладок форме будет осуществляться с помощью технологии канонизации матриц, подробно описанной в работе [8]. Суть указанной технологии заключается в том, что некоторой матрице  $M$  размера  $m \times n$  и ранга  $r$  ставится в соответствие четвёрка ненулевых матриц  $\tilde{M}^L, \tilde{M}^R, \bar{M}^L, \bar{M}^R$ , удовлетворяющих равенству

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}^L \\ \bar{M}^L \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \tilde{M}^R & \bar{M}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что матрицы  $\tilde{M}^L, \tilde{M}^R$  существуют лишь в том случае, если матрица  $M$  имеет линейно независимые строки и столбцы, а матрицы  $\bar{M}^L, \bar{M}^R$  существуют, если матрица  $M$  имеет линейно зависимые строки и столбцы. Произведение  $\tilde{M}^R \tilde{M}^L$  для компактности записи обозначают  $\tilde{M}$ .

Как показано в работе [9], если матрицы  $C$  и  $K$  из уравнений (1), (2) такие, что матриц  $\bar{C}^L$  и  $\overline{K\bar{C}^R}^L$  не существует, то вектор состояния динамической системы (1) может быть представлен в виде

$$x = \left( \tilde{C} \quad \bar{C}^R \widetilde{K\bar{C}^R} \quad \bar{C}^R \overline{K\bar{C}^R}^R \right) (y^T \quad \mu^T \quad \eta^T)^T, \quad (3)$$

где  $y \in R^m$  — вектор выхода;  $\mu \in R^p$  — вектор, необходимый для оценки функционала (2);  $\eta \in R^{n-m-p}$  — вектор, информация о котором для восстановления вектора  $g$  не требуется.

С содержательной точки зрения условия существования разложения (3) соответствуют ситуации, когда все выходные сигналы системы линейно независимы, а элементы интересующего нас функционала (2) не являются линейными комбинациями выходного вектора (на практике эти условия, как правило, всегда выполняются).

Из [9] известно, что матрица коэффициентов, стоящая в правой части выражения (3), квадратная обратимая. Для компактной записи дальнейших преобразований введём в рассмотрение следующие блочные матрицы:

$$\begin{aligned} (T_1 \quad T_2 \quad T_3) &= \left( \tilde{C} \quad \overline{C^R} \widetilde{K \overline{C^R}} \quad \overline{C^R} \overline{K \overline{C^R}^R} \right); \\ (V_1^T \quad V_2^T \quad V_3^T)^T &= (T_1 \quad T_2 \quad T_3)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда в новых координатах уравнение динамики объекта (1) может быть записано как

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 A T_1 & V_1 A T_2 & V_1 A T_3 \\ V_2 A T_1 & V_2 A T_2 & V_2 A T_3 \\ V_3 A T_1 & V_3 A T_2 & V_3 A T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 B \\ V_2 B \\ V_3 B \end{pmatrix} u, \quad (5)$$

а функционал (2) будет определяться выражением

$$g = K \tilde{C} y + \mu. \quad (6)$$

**Построение наблюдающего устройства.** Для синтеза функционального наблюдателя выделим из системы (5) второе уравнение и дополним его слагаемым, пропорциональным рассогласованию между реальным значением вектора  $\mu$  и его оценкой  $\hat{\mu}$ , при этом реальное значение вектора  $V_1 A T_2 \mu$  получим из первого уравнения системы (5). Тогда уравнение функционального наблюдателя примет вид

$$\dot{\hat{\mu}} = (V_2 - L V_1) A T_2 \hat{\mu} + (V_2 - L V_1) A T_1 y + (V_2 - L V_1) A T_3 \eta + (V_2 - L V_1) B u + L \dot{y}. \quad (7)$$

Оценку функционала (2) можно найти по выражению

$$\hat{g} = K \tilde{C} y + \hat{\mu}. \quad (8)$$

На практике дифференцирование измеряемого сигнала  $y$  сопряжено, как правило, с появлением существенных погрешностей, поэтому его рекомендуется избегать. Для этого введём вспомогательную переменную  $\chi = \hat{\mu} - L y$ . В таком случае уравнения (7) и (8) будут иметь следующий вид:

$$\dot{\chi} = \hat{A} \chi + \hat{B}_1 y + \hat{B}_2 u + G \eta; \quad \hat{g} = \chi + \hat{C} y. \quad (9)$$

Примем обозначения:

$$\begin{cases} \hat{A} = (V_2 - L V_1) A T_2 = A_1 - L A_2, \\ \hat{B}_1 = (V_2 - L V_1) A T_1 + (V_2 - L V_1) A T_2 L, \quad \hat{B}_2 = (V_2 - L V_1) B, \\ G = (V_2 - L V_1) A T_3 = A_3 - L A_4, \quad \hat{C} = K \tilde{C} + L. \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим ошибку оценивания функционала  $\varepsilon(t)$ . Согласно уравнениям (6) и (8) её значение будет определяться выражением

$$\varepsilon(t) = g(t) - \hat{g}(t) = \mu(t) - \hat{\mu}(t).$$

Продифференцировав данное выражение по времени и подставив в него значения производных из соотношений (5) и (7), получим дифференциальное уравнение, описывающее динамику процесса оценивания:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \hat{A}\varepsilon(t) + G\eta(t). \quad (11)$$

Тогда задача синтеза асимптотического функционального наблюдателя сводится к нахождению матрицы  $L$  такой, что динамическая система (11) будет асимптотически устойчива и матрица  $G = 0_{p, n-m-p}$ .

**Определение матрицы наблюдений.** Учитывая обозначения (10), исключить влияние вектора  $\eta$  на процесс оценивания можно, обеспечив выполнение равенства  $A_3 - LA_4 = 0_{p, n-m-p}$ .

**Утверждение.** Линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} 0_{p,p} & A_3 - LA_4 \\ A_3^T - A_4^T L^T & 0_{n-m-p, n-m-p} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $A_3 - LA_4 = 0_{p, n-m-p}$ .

**Доказательство. Достаточность.** Пусть справедливо условие  $A_3 - LA_4 = 0_{p, n-m-p}$ . Тогда в левой части соотношения (12) остаётся нулевая матрица, все собственные числа которой равны нулю. Следовательно, ЛМН очевидным образом выполняется.

**Необходимость.** Пусть ЛМН (12) выполняется. Рассмотрим матрицу, стоящую в его левой части. След этой матрицы равен нулю, а значит, сумма её собственных чисел  $\lambda_i$  также равна нулю. Тогда данная матрица может быть полуопределённой только в единственном случае, если все её собственные числа равны нулю.

Матрица в левой части ЛМН (12) является симметрической, следовательно, нормальной. Известно [10], что для нормальных матриц справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

Тогда из равенства нулю всех собственных чисел вытекает равенство нулю также и всех коэффициентов матрицы, т. е.  $A_3 - LA_4 = 0_{p, n-m-p}$ .

Утверждение доказано.

Известно [7], что для устойчивости системы (11) необходимо и достаточно существование квадратичной функции Ляпунова  $V(\varepsilon)$  с  $X = X^T > 0$  такой, что

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T X \varepsilon > 0; \quad \dot{V}(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}^T X \varepsilon + \varepsilon^T X \dot{\varepsilon} < 0.$$

Используя уравнение (11) и учитывая, что  $G = 0_{p, n-m-p}$ , получим систему неравенств, выполнение которых обеспечивает асимптотическую устойчивость процесса оценивания:

$$X > 0; \quad \hat{A}^T X + X \hat{A} < 0. \quad (13)$$

Дополнив второе неравенство (13) очевидным соотношением  $-I_{n-m-p, n-m-p} < 0$ , запишем

$$X > 0; \quad \begin{pmatrix} \hat{A}^T X + X \hat{A} & 0_{p, n-m-p} \\ 0_{n-m-p, p} & -I_{n-m-p, n-m-p} \end{pmatrix} < 0. \quad (14)$$

Умножив неравенство (12) слева и справа на матрицу  $\begin{pmatrix} X & 0_{p, n-m-p} \\ 0_{n-m-p, p} & I_{n-m-p, n-m-p} \end{pmatrix}$ , будем иметь

$$\begin{pmatrix} 0_{p, p} & X A_3 - X L A_4 \\ A_3^T X - A_4^T L^T X & 0_{n-m-p, n-m-p} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (15)$$

Применим к неравенствам (14), (15)  $S$ -процедуру, описанную в работе [7]. При этом фактически происходит суммирование матриц коэффициентов из левых частей соответствующих неравенств. Используя обозначения (10), получим

$$X > 0; \quad \begin{pmatrix} A_1^T X + X A_1 - A_2^T L^T X - X L A_2 & X A_3 - X L A_4 \\ A_3^T X - A_4^T L^T X & -I_{n-m-p, n-m-p} \end{pmatrix} < 0. \quad (16)$$

Введём новую матричную переменную  $Z = XL$  и перепишем неравенства (16) с учётом сделанной замены:

$$X > 0; \quad \begin{pmatrix} A_1^T X + X A_1 - A_2^T Z^T - Z A_2 & X A_3 - Z A_4 \\ A_3^T X - A_4^T Z^T & -I_{n-m-p, n-m-p} \end{pmatrix} < 0. \quad (17)$$

Получена система ЛМН, решив которую, можно найти матрицу коэффициентов функционального наблюдателя по формуле  $L = X^{-1}Z$ .

Таким образом, решение системы ЛМН (17) эквивалентно решению системы ЛМН  $X > 0$ ,  $\hat{A}^T X + X \hat{A} < 0$  при ограничении  $G = 0_{p, n-m-p}$ , что соответствует гурвицевости матрицы  $\hat{A}$  и независимости процесса оценивания (11) от вектора  $\eta(t)$ .

Следует отметить, что в общем случае можно найти множество пар матриц  $X, Z$ , являющихся решением ЛМН (17). Все они могут быть использованы для расчёта матрицы  $L$  и построения искомого функционального наблюдателя. Возникающая при этом свобода выбора может применяться для наложения на синтезируемый функциональный наблюдатель дополнительных ограничений (например, минимизации нормы матрицы, максимизации числа нулевых элементов и т. д.).

Чаще всего на практике гурвицевости матрицы  $\hat{A}$  бывает недостаточно. Также требуется обеспечить желаемую динамику процесса оценивания, расположив собственные числа матрицы  $\hat{A}$  в некоторой области комплексной плоскости. Эта задача решается с использованием формализма ЛМН [7]. Так, чтобы обеспечить для всех собственных чисел матрицы динамики выполнение ограничения  $\text{Re}(\lambda_i(\hat{A})) < -\gamma$ ,  $\gamma \geq 0$ , необходимо и достаточно заменить второе неравенство из (13) более строгим неравенством  $\hat{A}^T X + X \hat{A} + 2\gamma X < 0$ .

Повторив приведённые выше рассуждения, получим возможность расположить собственные числа матрицы динамики в требуемой области комплексной плоскости и обеспечить равенство нулю матрицы  $G$ , если существует решение системы ЛМН:

$$X > 0; \quad \begin{pmatrix} A_1^T X + X A_1 - A_2^T Z^T - Z A_2 + 2\gamma X & X A_3 - Z A_4 \\ A_3^T X - A_4^T Z^T & -I_{n-m-p, n-m-p} \end{pmatrix} < 0. \quad (18)$$

Схожие условия могут быть сформулированы и для иных областей локализации собственных чисел матрицы динамики (например, такими областями на комплексной плоскости являются внутренность круга заданного радиуса, круговой или конической сектор, вертикальная полоса и т. д.).

**Процедура синтеза наблюдателя.** Основываясь на полученных результатах, сформулируем последовательность действий, необходимых для построения функционального наблюдателя минимального порядка.

1. Выполнить канонизацию матриц  $C$  и  $K\bar{C}^R$ , определив  $\bar{C}^L$ ,  $\bar{C}^R$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\overline{K\bar{C}^R}^L$ ,  $\overline{K\bar{C}^R}^R$ ,  $\widetilde{K\bar{C}^R}$  или показав, что некоторые из них не существуют.

2. Проверить применимость предлагаемого метода. Если матрицы  $\bar{C}^L$  и  $\overline{K\bar{C}^R}^L$  не существуют, то можно переходить к следующему шагу, в противном случае предлагаемый метод не применим.

3. Вычислить матрицы преобразования (4) и коэффициенты (10).

4. Решить систему линейных матричных неравенств (17) и определить матрицу наблюдения по формуле  $L = X^{-1}Z$ .

5. Подставить найденное значение матрицы  $L$  в (10) и сформировать на основе соотношений (9) уравнение динамики наблюдателя и уравнение оценки искомого функционала.

В случае, когда требования к динамике процесса оценивания сформулированы жёстче (например, необходимо расположить собственные числа в некоторой области комплексной плоскости), систему ЛМН (17) следует заменить системой (18) либо дополнить более сложными ограничениями, подробное описание которых представлено в [7].

Определим границы применимости предложенного метода. Прежде всего, рассмотрим условие, выполнение которого позволяет устранить влияние вектора  $\eta(t)$  на процесс оценивания. Ограничение  $A_3 - LA_4 = 0_{p, n-m-p}$  представляет собой, по сути, линейное матричное уравнение, имеющее решение, только если произведение  $A_3\bar{A}_4^R$  является нулевой матрицей [8]. В обозначениях исходной системы это соответствует равенству нулю произведения  $V_2AT_3\overline{V_1AT_3}^R$ , где  $V_1, V_2, T_3$  — элементы блочных матриц (4).

Другое ограничение связано с принципиальной возможностью обеспечения требуемой динамики процесса оценивания. Очевидно, что произвольное назначение спектра полюсов функционального наблюдателя осуществимо при полной наблюдаемости пары  $(A_1, A_2)$ , которая в обозначениях исходной системы имеет вид  $(V_2AT_2, V_1AT_2)$ . В то же время, если требования к динамике процесса оценивания являются не столь строгими, решение задачи синтеза может быть найдено и в случае, когда указанная пара лишь только обнаруживаема. Таким образом, на начальном этапе следует оценить наблюдаемость пары  $(A_1, A_2)$  и определить расположение ненаблюдаемых полюсов (если таковые имеются). Далее необходимо сопоставить полученные данные с желаемой областью расположения полюсов функционального наблюдателя либо перейти к процедуре синтеза, либо скорректировать требования к проектируемой системе, либо осуществить синтез наблюдателя иного типа.

**Пример.** Рассмотрим динамический объект, описываемый системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1600 & 0,1770 & -0,9840 & 0,1040 \\ -18,1910 & -1,1620 & 0,8200 & 0 \\ -0,1580 & -0,0400 & -0,2790 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0,1800 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3,5 \\ 0,3 \\ 0 \end{pmatrix} u;$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Пусть необходимо оценить значение функционала, определяемого вектором

$$K = (6,3859 \quad 0,9354 \quad 4,9168 \quad 0,6593).$$

Для обеспечения приемлемого быстродействия проектируемого наблюдателя потребуем, чтобы действительные части его полюсов не превосходили величину  $-3$ .

Осуществим синтез функционального наблюдателя по вышеописанному алгоритму.

Проведём канонизацию матриц  $C$  и  $K\bar{C}^R$  (здесь и далее используется программный продукт [11]) и вычислим матрицы преобразования (4):

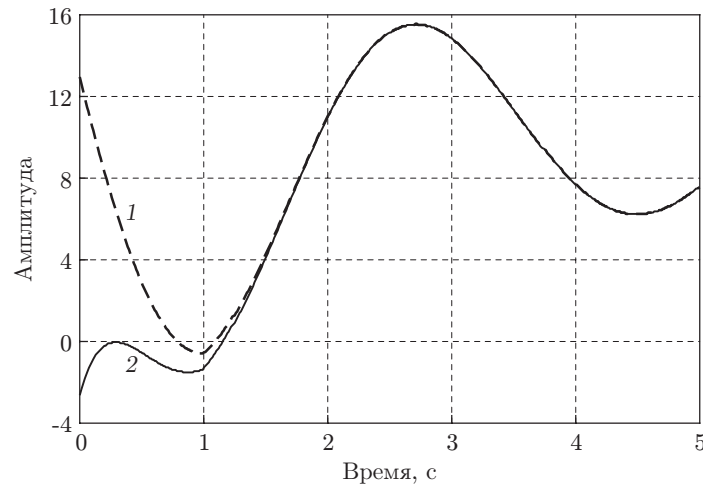
$$T = \left( \begin{array}{c|c|c|c} 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ \hline 0 & 0 & 0,2034 & -0,1902 \\ \hline 0 & 1,0000 & 0 & 0 \end{array} \right); \quad V = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0,9354 & 4,9168 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем коэффициенты (10):

$$A_1 = -0,1230; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0,2001 \\ 0,0366 \end{pmatrix}; \quad A_3 = -1,1686; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0,3642 \\ 0,9658 \end{pmatrix}.$$

Решим систему неравенств (18) при  $\gamma = 3$ . Потребуем, чтобы полученный наблюдатель был минимальным по норме, для чего определим наибольшее возможное значение  $X$ . Применяв специальные функции системы компьютерной математики MATLAB, подробно описанные в работе [7], получим  $X = 7,0190 \cdot 10^{20}$ ,  $Z = (-9,5844 \quad 2,7651) \cdot 10^{21}$ , откуда найдём  $L = (-13,6550 \quad 3,9395)$ .

Отметим, что в рассматриваемом случае  $X$  является положительным скаляром и задача его максимизации имеет достаточно очевидное решение. Если  $X$  — положительно-определённая матрица, следует использовать более сложные критерии. В частности, можно предложить формирование диагонально доминирующей матрицы с максимизацией её следа.



Рассчитаем коэффициенты наблюдающего устройства (9) и запишем уравнения динамики функционального наблюдателя и оценки функционала:

$$\begin{cases} \dot{\chi} = -3,0000\chi + (20,9877 & -10,3985)y + 4,7489u, \\ \hat{g} = \chi + (-7,2691 & 4,5988)y. \end{cases}$$

Для проверки корректности полученных результатов было проведено численное моделирование в системе MATLAB. На рисунке показана зависимость реального значения функционала  $g(t)$  (кривая 1) и его оценки  $\hat{g}(t)$  (кривая 2) от времени при ненулевых начальных условиях  $x(0) = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ . Видно, что с течением времени ошибка оценивания быстро уменьшается и асимптотически стремится к нулю.

**Заключение.** В данной работе предложен новый способ расчёта коэффициентов функционального наблюдателя, заключающийся в сведении исходной задачи к решению системы ЛМН. При этом благодаря широкому кругу программных средств, предназначенных для решения таких неравенств, стало возможным формирование матриц наблюдения с требуемыми характеристиками. Доказана асимптотическая сходимость оценок, получаемых синтезируемыми наблюдающими устройствами, и очерчена граница применимости методики. В дальнейшем сформулированные результаты могут быть расширены на случай систем с внешними сигнальными возмущениями путём комбинации рассмотренного способа, например, с техникой инвариантных эллипсоидов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотухин Ю. Н., Нестеров А. А.** Управление угловым положением летательного аппарата // Автометрия. 2015. **51**, № 5. С. 35–41.
2. **Bonnick A.** Automotive Computer Controlled Systems. Diagnostic Tools and Techniques. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001. 272 p.
3. **Кузовков Н. Т.** Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
4. **O'Reilly J.** Observers for Linear Systems. London: Academic Press, 1983. 246 p.
5. **Коровин С. К., Медведев И. С., Фомичев В. В.** Минимальные функциональные наблюдатели // ДАН. 2005. **404**, № 3. С. 316–320.



6. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез функциональных наблюдателей // Изв. вузов. Авиационная техника. 2013. № 4. С. 13–18.
7. **Баландин Д. В., Коган М. М.** Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.
8. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит. Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
9. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез функциональных наблюдателей для систем с сигнальными возмущениями // Автометрия. 2014. **50**, № 6. С. 111–119.
10. **Маркус М., Минк Х.** Обзор по теории матриц и матричных неравенств: Пер. с англ. /Под ред. В. В. Лидского. М.: Едиториал УРСС, 2004. 232 с.
11. **Свидетельство** о государственной регистрации программы для ЭВМ 2015617953 РФ. Программа канонизации матриц /И. З. Ахметзянов; Правообладатель ФГАОУ ВПО КФУ. № 2015614621; Заявл. 29.05.2015; Оpubл. 20.08.2015. 1 с.

*Поступила в редакцию 4 декабря 2015 г.*

---