

УДК 532.546

ОЦЕНКА КОМПЛЕКСНОГО ИНКРЕМЕНТА ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕЧЕНИИ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ С ВЯЗКОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Дж. Пракаш, Р. Бала

Химачал-Прадешский университет, 171005 Шимла, Индия
E-mails: jpsmaths67@gmail.com, renu31bhuv@gmail.com

Доказано, что значение комплексного инкремента произвольного осциллирующего движения с возрастающей амплитудой при конвективном течении ферромагнитной жидкости с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся неплотной пористой среде в случае свободных границ находится в правой половине круга в плоскости с центром в начале координат и радиусом, зависящим от чисел Рэлея, Прандтля, Тейлора и параметра магнитного поля. Получены ограничения для случая течения с твердыми границами.

Ключевые слова: ферромагнитная жидкость, вращение, пористая среда, осциллирующее движение, вязкость, зависящая от магнитного поля, конвекция магнитной жидкости.

DOI: 10.15372/PMTF20160406

Введение. Магнитные, или ферромагнитные, жидкости представляют собой суспензию из магнитных наночастиц размером $2 \div 10$ нм, покрытых активными веществами, и жидкого носителя, например воды, керосина, минерального масла или фторуглерода. Ферромагнитные жидкости не встречаются в природе в свободном состоянии, их необходимо синтезировать. Магнитные жидкости применяются в электронных приборах, аэрокосмической технике, в инженерной механике, вращающихся рентгеновских трубках, при герметизации жестких дисков компьютеров, в медицине, печатающих системах и т. д. [1], поэтому изучение тепловой конвекции в ферромагнитных жидкостях является актуальной задачей. Исследованию термической неустойчивости в слое ферромагнитной жидкости, подогреваемого снизу, посвящено большое количество работ, обзор которых также приведен в [1]. В [2] с использованием линейного анализа устойчивости изучалась термическая неустойчивость слоя ферромагнитной жидкости, подогреваемого снизу, при наличии вертикального магнитного поля в случае свободной и твердой границ.

В [3] исследовалась термоконвективная устойчивость ферромагнитных жидкостей без учета архимедовой выталкивающей силы. В [4] изучалось линейное соотношение на границе области устойчивости возмущенных величин, зависящих от наличия магнитного поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комиссии по университетским грантам (UGC), Нью-Дели, Индия (грант № 43-420/2014(SR)).

© Пракаш Дж., Бала Р., 2016

В [5] исследовалась линейная устойчивость поверхностных волн в магнитной жидкости и получен критерий устойчивости для граничных условий плоскость — свободная поверхность для жидкости при произвольной зависимости вязкости от магнитного поля.

В работе [6] экспериментально исследовалось проникание ферромагнитных жидкостей в ячейку Хеле-Шоу, в [7] — устойчивость при проникании магнитной жидкости через пористую среду в однородном магнитном поле, ориентированном под углом к границе соприкосновения. В [8] проведены экспериментальные исследования устойчивости термической конвекции в слое ферромагнитной жидкости при наличии сильного магнитного поля в зависимости от чисел Нуссельта и Рейнольдса. В [9] с учетом инерциальных эффектов выполнен нелинейный анализ устойчивости конвективного течения магнитной жидкости в пористом слое. В [10] обсуждалась устойчивость центробежной конвекции в пористом слое в случае обычных жидкостей, когда ось вращения находится в пределах слоя. Авторы [11] экспериментально исследовали поведение ферромагнитных жидкостей в пористой среде, состоящей из песка и отложений. В [12] изучалась параметрическая конвективная неустойчивость горизонтального слоя однородной ферромагнитной жидкости, находящейся под воздействием переменного магнитного поля. В [13] предложена математическая модель для изучения свободной конвекции в ферромагнитной жидкости при малых числах Рэлея и воздействии мгновенного точечного источника тепла. В [14] с использованием теории линейной устойчивости исследовалось влияние магнитного поля на центробежную конвекцию в магнитной жидкости в пористом слое при наличии градиента температуры в условиях нулевой гравитации. В [15] изучалось конвективное течение ферромагнитной жидкости между двумя вертикальными пластинами с различной температурой, размещенными в однородном внешнем магнитном поле, ориентированном перпендикулярно пластинам. В [16] исследовалось влияние силы Кориолиса на установившуюся конвекцию в горизонтально вращающейся ферромагнитной жидкости, пропитывающей пористый слой, при наличии однородного вертикального магнитного поля для случаев ненапряженной и твердой границ.

Влияние однородного магнитного поля на вязкость ферромагнитной жидкости, содержащей твердые частицы, обладающие внутренними магнитными моментами, исследовано в [17], влияние вязкости, зависящей от магнитного поля, на конвекцию магнитной жидкости в пористой среде при наличии частиц пыли рассматривалось в [18], в [19] с использованием нелинейного анализа устойчивости исследовалось влияние вязкости, зависящей от магнитного поля, на термохалинный магнитный слой ферромагнитной жидкости. Авторы [20] изучали индуцирование ферромагнитной жидкостью с вязкостью, зависящей от магнитного поля, конвекции во вращающейся среде со свободными границами. В [21] исследовалось влияние вязкости, зависящей от магнитного поля, на конвекцию магнитной жидкости во вращающейся неплотной пористой среде со свободными границами.

Оценка скорости роста возмущений при произвольном осциллирующем движении, особенно в случае, когда обе границы не являются динамически свободными, затруднена, так как отсутствуют точные решения. В [22, 23] определены пределы скорости роста возмущений при конвекции в слое ферромагнитной жидкости и пропитанном такой жидкостью пористом слое соответственно. В [24] определены пределы комплексного инкремента при конвекции в магнитной жидкости с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающемся слое ферромагнитной жидкости. Однако конвекция в магнитной жидкости с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся неплотной пористой среде не исследована. В настоящей работе, являющейся продолжением работы [24], рассматривается конвекция в магнитной жидкости с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся неплотной пористой среде, получены оценки сверху скорости роста возмущений при произвольном осциллирующем движении с увеличивающейся амплитудой для

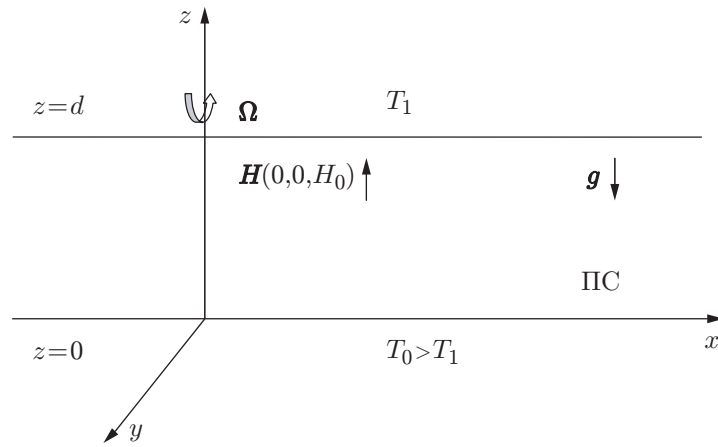


Рис. 1. Схема задачи (ПС — пористая среда)

случаев свободной и твердой границ, численно найдены критические значения числа Рэлея для случая свободных границ.

1. Математическая постановка задачи. В приближении Буссинеска рассматривается бесконечный горизонтальный слой ферромагнитной жидкости с конечной толщиной d . Жидкость пропитывает вращающуюся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси неплотную пористую среду, подогреваемую снизу. На жидкость действует однородное вертикальное магнитное поле \mathbf{H} (рис. 1). Течение в пористой среде описывается законом Дарси — Бринкмана.

Для изотропной ньютоновской жидкости тензор вязкостных напряжений определяется по формуле

$$\tau_{ij} = 2\eta_1 e_{ij} - \frac{2}{3} \eta_1 e_{kk} \delta_{ij},$$

где e_{ij} — тензор скоростей деформаций:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Полагается, что жидкость является несжимаемой и имеет зависящую от магнитного поля вязкость

$$\eta = \eta_1 (1 + \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{B}),$$

где η_1 — вязкость жидкости в отсутствие магнитного поля; \mathbf{B} — индукция магнитного поля; коэффициент вязкости $\boldsymbol{\delta}$ полагается изотропным: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$ [19]. Зависимость вязкости от магнитного поля при сдвиге не учитывается, поскольку не оказывает существенного влияния на монодисперсные системы при больших значениях скорости вращения и магнитной индукции. В первом приближении для малых магнитных полей использовалась линейная зависимость.

В работах [19, 21] для описанной модели определены основные уравнения:

— уравнение неразрывности

$$\nabla \mathbf{q} = 0; \tag{1}$$

— уравнение количества движения для ферромагнитной жидкости с изменяющейся вязкостью

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \right) = -\nabla \bar{p} + \rho \mathbf{g} - \frac{\eta}{k_0} \mathbf{q} + \eta \nabla^2 \mathbf{q} + \nabla \cdot (\mathbf{H} \mathbf{B}) + 2\rho_0 (\mathbf{q} \times \Omega) + \frac{\rho_0}{2} \nabla (|\Omega \times \mathbf{r}|^2), \tag{2}$$

где \mathbf{q} , $p = \bar{p} - \rho_0 \nabla(|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2)$, \mathbf{H} , $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, k_0 — скорость, давление, магнитное поле, ускорение свободного падения, угловая скорость и проницаемость пористой среды соответственно;

— уравнение для температуры

$$\left[\rho_0 C_{V,H} - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T} \right)_{V,H} \right] \frac{dT}{dt} + \mu_0 T \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T} \right)_{V,H} \cdot \frac{d\mathbf{H}}{dt} = K_1 \nabla^2 T + \Phi, \quad (3)$$

где $C_{V,H}$ — теплоемкость при постоянных объеме и магнитном поле; μ_0 — магнитная проницаемость; T — температура; \mathbf{M} — намагниченность; K_1 — теплопроводность; Φ — вязкостная диссипация, зависящая от скорости второго порядка;

— уравнение состояния для плотности

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T_0 - T)], \quad (4)$$

где α — коэффициент объемного расширения; ρ_0 — плотность при выбранной заранее средней температуре T_0 .

В случае непроводящей жидкости без учета токов смещения уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0,$$

где

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (6)$$

Из выражений (5), (6) получаем

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0. \quad (7)$$

В предположении, что намагниченность зависит от величины магнитного поля и температуры:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{H}}{H} M(H, T), \quad (8)$$

линеаризованное уравнение состояния запишем в виде

$$M = M_0 + \chi(H - H_0) - K_2(T - T_A), \quad (9)$$

где M_0 — намагниченность при $H = H_0$, $T = T_A$; T_A — средняя температура; $\chi = (\partial \mathbf{M} / \partial \mathbf{H})_{H_0, T_0}$ — магнитная восприимчивость; $K_2 = -(\partial \mathbf{M} / \partial T)_{H_0, T_0}$ — пирромагнитный коэффициент.

В состоянии покоя, являющемся основным состоянием, имеем

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_b = 0, \quad \rho = \rho_b(z), \quad p = p_b(z), \quad T = T_b(z) = -\beta z + T_A, \quad \beta = \frac{T_1 - T_0}{d},$$

$$\mathbf{H}_b = \left(H_0 - \frac{K_2 \beta z}{1 + \chi} \right) \hat{k}, \quad \mathbf{M}_b = \left(M_0 + \frac{K_2 \beta z}{1 + \chi} \right) \hat{k}, \quad H_0 + M_0 = H_0^{ext},$$

где H_0 — однородное магнитное поле в слое жидкости; H_0^{ext} — внешнее магнитное поле. Далее полагается, что конвекция не зависит от ориентации магнитного поля. В соответствии с [2] для анализа устойчивости основного состояния введем следующие возмущения:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}_b + \mathbf{q}', & \rho &= \rho_b(z) + \rho', & p &= p_b(z) + p', & T &= T_b(z) + \theta', \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_b(z) + \mathbf{H}', & \mathbf{M} &= \mathbf{M}_b(z) + \mathbf{M}', \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{q}' = (u', v', w')$, ρ' , p' , θ' , \mathbf{H}' , \mathbf{M}' — соответственно инфинитезимальные возмущения скорости, плотности, давления, температуры, напряженности магнитного поля и намагниченности.

Подставляя (10) в (1)–(9) и используя решение для основного состояния, получаем линеаризованные уравнения для определения возмущений:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = & -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu_0(M_0 + H_0) \frac{\partial H'_1}{\partial z} + 2\rho_0\Omega v' + \\ & + \eta_1[1 + \delta\mu_0(H_0 + M_0)]\nabla^2 u' - \frac{\eta_1[1 + \delta\mu_0(H_0 + M_0)]}{k_0} u'; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} = & -\frac{\partial p'}{\partial y} + \mu_0(M_0 + H_0) \frac{\partial H'_2}{\partial z} - 2\rho_0\Omega u' + \\ & + \eta_1[1 + \delta\mu_0(H_0 + M_0)]\nabla^2 v' - \frac{\eta_1[1 + \delta\mu_0(H_0 + M_0)]}{k_0} v'; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial w'}{\partial t} = & -\frac{\partial p'}{\partial z} + \mu_0(M_0 + H_0) \frac{\partial H'_3}{\partial z} - \mu_0 K_2 \beta H'_3 + \frac{\mu_0 K_2^2 \beta \theta'}{1 + \chi} + \rho_0 g \alpha \theta' + \\ & + \eta_1 \nabla^2 w' + \mu_0 \eta_1 \delta(M_0 + H_0) \nabla^2 w' - \frac{\eta_1}{k_0} w' - \mu_0 \frac{\eta_1}{k_0} \delta(M_0 + H_0) w'; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\rho C \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \mu_0 T_0 K_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) = K_1 \nabla^2 \theta + \left(\rho C \beta - \frac{\mu_0 T_0 K_2^2 \beta}{1 + \chi} \right) w', \quad (15)$$

где $\rho C = \rho_0 C_{V,H} + \mu_0 K_2 H_0$,

$$\frac{\partial}{\partial x} (H'_1 + M'_1) + \frac{\partial}{\partial y} (H'_2 + M'_2) + \frac{\partial}{\partial z} (H'_3 + M'_3) = 0, \quad H' = \nabla \varphi', \quad (16)$$

где φ' — возмущение магнитного потенциала;

$$H'_3 + M'_3 = (1 + \chi)H'_3 - K_2 \theta', \quad H'_i + M'_i = (1 + M_0/H_0)H'_i, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

при этом $K_2 \beta d \ll (1 + \chi)H_0$.

Исключая u' , v' , p' из (12)–(14) и используя (11), получаем

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w' = & -2\rho_0\Omega \frac{\partial \zeta'}{\partial z} + \eta_1[1 + \delta\mu_0(H_0 + M_0)] \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla^2 w') - \\ & - \frac{\eta_1[1 + \delta\mu_0(H_0 + M_0)]}{k_0} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \rho_0 g \alpha \nabla_1^2 \theta' - \mu_0 K_2 \beta \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_1^2 \varphi') + \frac{\mu_0 K_2^2 \beta \nabla_1^2 \theta'}{1 + \chi} + \\ & + \eta_1 \nabla_1^2 (\nabla^2 w') + \mu_0 \eta_1 \delta(M_0 + H_0) \nabla_1^2 (\nabla^2 w') - \frac{\eta_1}{k_0} \nabla_1^2 w' - \mu_0 \frac{\eta_1}{k_0} \delta(M_0 + H_0) (\nabla_1^2 w'), \end{aligned} \quad (18)$$

где ζ' — z -компонента завихренности:

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

Исключая p' из (12), (13), получаем уравнение для вертикальной компоненты завихренности

$$\rho_0 \frac{\partial \zeta'}{\partial t} = 2\rho_0\Omega \frac{\partial w'}{\partial z} + \eta_1[1 + \delta\mu_0(H_0 + M_0)]\nabla^2 \zeta' - \frac{\eta_1[1 + \delta\mu_0(H_0 + M_0)]}{k_0} \zeta'. \quad (19)$$

Из (16), (17) следует

$$(1 + \chi) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{M_0}{H_0}\right) \nabla_1^2 \varphi' - K_2 \frac{\partial \theta'}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Анализируя возмущения $w', \theta', \zeta', \varphi'$ в двумерных периодических волнах и полагая, что возмущения характеризуются волновым числом \mathbf{k} , представим их в виде зависимости от x, y, t :

$$(w', \theta', \zeta', \varphi') = [w''(z), \theta''(z), \zeta''(z), \varphi''(z)] \exp [i(k_x x + k_y y) + nt], \quad (21)$$

где k_x, k_y — волновые числа в направлении соответствующих координат; $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ — результирующее волновое число.

Подставляя (21) в (18), (15), (19), (20) и вводя безразмерные переменные

$$\begin{aligned} z_* &= \frac{z}{d}, & w_* &= \frac{d}{\nu} w'', & a &= kd, & \zeta_* &= \frac{d^2}{\nu} \zeta'', & D &= d \frac{d}{dz}, & \theta_* &= \frac{K_1 a \text{Ra}^{1/2}}{(\rho C) \beta \nu d} \theta'', \\ \varphi_* &= \frac{(1 + \chi) K_1 a \text{Ra}^{1/2}}{K_2 (\rho C) \beta \nu d^2} \varphi'', & k_{0*} &= \frac{k_0}{d^2}, & \nu &= \frac{\eta_1}{\rho_0}, & \text{Pr} &= \frac{\nu \rho C}{K_1}, & \delta_* &= \mu_0 \delta H_0 (1 + \chi), \\ \text{Ra} &= \frac{g \alpha \beta d^4 \rho C}{K_1 \nu}, & M_1 &= \frac{\mu_0 K_2^2 \beta}{(1 + \chi) \alpha \rho_0 g}, & M_2 &= \frac{\mu_0 T_0 K_2^2}{(1 + \chi) \rho C}, & M_3 &= \frac{1 + M_0 / H_0}{1 + \chi}, \\ \text{Ta} &= \frac{4 \Omega^2 d^4}{\nu^2}, & \omega &= \frac{nd^2}{\nu}, \end{aligned}$$

получаем

$$(D^2 - a^2) \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] w = a \text{Ra}^{1/2} [(1 + M_1) \theta - M_1 D \varphi] + \text{Ta}^{1/2} D \zeta; \quad (22)$$

$$(D^2 - a^2 - \text{Pr} \omega) \theta - \text{Pr} M_2 \omega D \varphi = -(1 - M_2) a \text{Ra}^{1/2} w; \quad (23)$$

$$\left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] \zeta = -\text{Ta}^{1/2} D w; \quad (24)$$

$$(D^2 - a^2 M_3) \varphi = D \theta. \quad (25)$$

Здесь $0 \leq z \leq 1$; D — производная по оси z ; ω — комплексный инкремент; a^2 — квадрат волнового числа; $\text{Pr} > 0$, $\text{Ra} > 0$, $\text{Ta} > 0$ — числа Прандтля, Рэлея, Тейлора соответственно; $M_1 > 0$ — параметр магнитного поля, определяющий отношение магнитной силы, возникающей вследствие температурных флуктуаций, к архимедовой выталкивающей силе; $M_3 > 0$ — мера нелинейности намагниченности; $M_2 > 0$ — безразмерный параметр, определяющий отношение теплового потока, возникающего вследствие намагниченности, к магнитному потоку; $\omega = \omega_r + i\omega_i$ — комплексная константа; звездочки у безразмерных величин опущены. Поэтому зависимые переменные $w(z) = w_r(z) + iw_i(z)$, $\theta(z) = \theta_r(z) + i\theta_i(z)$, $\varphi(z) = \varphi_r(z) + i\varphi_i(z)$ и $\zeta(z) = \zeta_r(z) + i\zeta_i(z)$ представляют собой комплексные функции действительной переменной z .

Пренебрегая параметром M_2 вследствие его малости [2], уравнение (23) запишем в виде

$$(D^2 - a^2 - \text{Pr} \omega) \theta = -a \text{Ra}^{1/2} w. \quad (26)$$

На границах слоя ферромагнитной жидкости, полагающихся свободными или твердыми, поддерживается постоянная температура и граничные условия принимают вид:

— в случае свободных границ

$$w = 0 = \theta = D^2 w = D \zeta = D \varphi, \quad z = 0, \quad z = 1; \quad (27)$$

— в случае жестких границ

$$w = 0 = \theta = D w = \zeta = \varphi, \quad z = 0, \quad z = 1. \quad (28)$$

Следует отметить, что уравнения (22), (24)–(28) являются задачей на собственные значения для ω и определяют ферромагнитную конвекцию с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся неплотной пористой среде, подогреваемой снизу.

2. Математический анализ. Определим верхнюю границу скорости роста возмущений произвольных осциллирующих движений при нейтральной или возрастающей амплитуде при ферромагнитной конвекции с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся неплотной пористой среде для случаев свободной и твердой границ.

Теорема 1. *Если $Ra > 0$, $M_1 > 0$, $Ta > 0$, $\omega_r \geq 0$, $\omega_i \neq 0$, то необходимое условие существования нетривиального решения $(w, \theta, \varphi, \zeta, \omega)$ уравнений (22), (24)–(26) с граничными условиями (27) имеет вид $|\omega|^2 < \max\{Ra M_1 / Pr, Ta\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая (22) на w^* (индекс “*” обозначает комплексно-сопряженную величину) и интегрируя результирующее уравнение по z , получаем

$$\int_0^1 w^*(D^2 - a^2) \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] w dz = a Ra^{1/2} (1 + M_1) \int_0^1 w^* \theta dz - a Ra^{1/2} M_1 \int_0^1 w^* D\varphi dz + Ta^{1/2} \int_0^1 w^* D\zeta dz. \quad (29)$$

Используя (26), (24), (25) и граничные условия (27), запишем

$$a Ra^{1/2} (1 + M_1) \int_0^1 w^* \theta dz = -(1 + M_1) \int_0^1 \theta (D^2 - a^2 - Pr \omega^*) \theta^* dz; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} -a Ra^{1/2} M_1 \int_0^1 w^* D\varphi dz &= M_1 \int_0^1 D\varphi (D^2 - a^2 - Pr \omega^*) \theta^* dz = \\ &= -M_1 \int_0^1 D^2 \varphi (D^2 - a^2 M_3) \varphi^* dz + M_1 (a^2 + Pr \omega^*) \int_0^1 \varphi (D^2 - a^2 M_3) \varphi^* dz; \end{aligned} \quad (31)$$

$$Ta^{1/2} \int_0^1 w^* D\zeta dz = -Ta^{1/2} \int_0^1 \zeta Dw^* dz = \int_0^1 \zeta \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] \zeta^* dz. \quad (32)$$

Объединяя уравнения (29)–(32), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 w^*(D^2 - a^2) \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] w dz &= -(1 + M_1) \int_0^1 \theta (D^2 - a^2 - Pr \omega^*) \theta^* dz - \\ &- M_1 \int_0^1 D^2 \varphi (D^2 - a^2 M_3) \varphi^* dz + M_1 (a^2 + Pr \omega^*) \int_0^1 \varphi (D^2 - a^2 M_3) \varphi^* dz + \\ &+ \int_0^1 \zeta \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] \zeta^* dz. \end{aligned} \quad (33)$$

Интегрируя члены уравнения (33) по частям необходимое количество раз, используя граничные условия (27) и равенство

$$\int_0^1 \psi^* D^{2n} \psi dz = (-1)^n \int_0^1 |D^n \psi|^2 dz, \quad \psi = w \text{ при } n = 1, 2, \quad \psi = \theta, \varphi, \zeta \text{ при } n = 1, \quad (34)$$

соотношение (33) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 + \delta M_3) (|D^2 w|^2 + 2a^2 |Dw|^2 + a^4 |w|^2) dz + (1 + \delta M_3) \frac{1}{k_0} \int_0^1 (|Dw|^2 + a^2 |w|^2) dz + \\ & + \omega \int_0^1 (|Dw|^2 + a^2 |w|^2) dz = (1 + M_1) \int_0^1 (|D\theta|^2 + a^2 |\theta|^2 + \text{Pr} \omega^* |\theta|^2) dz - \\ & - M_1 \int_0^1 (|D^2 \varphi|^2 + a^2 M_3 |D\varphi|^2) dz - M_1 (a^2 + \text{Pr} \omega^*) \int_0^1 (|D\varphi|^2 + a^2 M_3 |\varphi|^2) dz - \\ & - \int_0^1 \left[(1 + \delta M_3) \left(|D\zeta|^2 + a^2 |\zeta|^2 + \frac{1}{k_0} |\zeta|^2 \right) + \omega^* |\zeta|^2 \right] dz. \quad (35) \end{aligned}$$

Приравняв мнимые части в (35) и пренебрегая $\omega_i \neq 0$ в результирующем уравнении, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (|Dw|^2 + a^2 |w|^2) dz = -(1 + M_1) \text{Pr} \int_0^1 |\theta|^2 dz + \\ & + M_1 \text{Pr} \int_0^1 (|D\varphi|^2 + a^2 M_3 |\varphi|^2) dz + \int_0^1 |\zeta|^2 dz. \quad (36) \end{aligned}$$

Умножая уравнения (26), (24) на соответствующие комплексно-сопряженные величины, интегрируя по оси z необходимое количество раз и используя граничные условия (27), находим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (|D^2 \theta|^2 + 2a^2 |D\theta|^2 + a^4 |\theta|^2) dz + 2 \text{Pr} \omega_r \int_0^1 (|D\theta|^2 + a^2 |\theta|^2) dz + \\ & + \text{Pr}^2 |\omega|^2 \int_0^1 |\theta|^2 dz = \text{Ra} a^2 \int_0^1 |w|^2 dz; \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1 + \delta M_3)^2 \int_0^1 |(D^2 - a^2) \zeta|^2 dz + \frac{(1 + \delta M_3)^2}{k_0} \left[2(|D\zeta|^2 + a^2 |\zeta|^2) + \frac{1}{k_0} |\zeta|^2 \right] + \\ & + 2\omega_r (1 + \delta M_3) \int_0^1 \left[|D\zeta|^2 + \left(a^2 + \frac{1}{k_0} \right) |\zeta|^2 \right] dz + |\omega|^2 \int_0^1 |\zeta|^2 dz = \text{Ta} \int_0^1 |Dw|^2 dz. \quad (38) \end{aligned}$$

Так как $\omega_r \geq 0$, из (37) следует

$$\int_0^1 |\theta|^2 dz \leq \frac{\text{Ra} a^2}{\text{Pr}^2 |\omega|^2} \int_0^1 |w|^2 dz. \quad (39)$$

Из (38) находим

$$\int_0^1 |\zeta|^2 dz \leq \frac{\text{Ta}}{|\omega|^2} \int_0^1 |Dw|^2 dz. \quad (40)$$

Умножая (25) на φ^* и интегрируя по z , получаем

$$\int_0^1 \varphi^* (D^2 - a^2 M_3) \varphi dz = \int_0^1 \varphi^* (D\theta) dz,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 (|D\varphi|^2 + a^2 M_3 |\varphi|^2) dz &= - \int_0^1 \varphi^* (D\theta) dz = \int_0^1 \theta (D\varphi^*) dz \leq \left| \int_0^1 \theta (D\varphi^*) dz \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 |\theta| |D\varphi^*| dz \leq \int_0^1 |\theta| |D\varphi| dz \leq \left(\int_0^1 |\theta|^2 dz \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |D\varphi|^2 dz \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Используя неравенство Шварца

$$\int_0^1 |D\varphi|^2 dz \leq \left(\int_0^1 |\theta|^2 dz \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |D\varphi|^2 dz \right)^{1/2},$$

получаем

$$\left(\int_0^1 |D\varphi|^2 dz \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |\theta|^2 dz \right)^{1/2}. \quad (42)$$

Объединяя неравенства (41), (42), имеем

$$\int_0^1 (|D\varphi|^2 + a^2 M_3 |\varphi|^2) dz \leq \int_0^1 |\theta|^2 dz. \quad (43)$$

С использованием неравенств (39), (40), (43) из уравнения (36) получаем неравенство

$$\int_0^1 (|Dw|^2 + a^2 |w|^2) dz + (1 + M_1) \text{Pr} \int_0^1 |\theta|^2 dz \leq \frac{\text{Ra} M_1 a^2}{\text{Pr} |\omega|^2} \int_0^1 |w|^2 dz + \frac{\text{Ta}}{|\omega|^2} \int_0^1 |Dw|^2 dz,$$

которое преобразуется к виду

$$\left(1 - \frac{\text{Ta}}{|\omega|^2}\right) \int_0^1 |Dw|^2 dz + \left(1 - \frac{\text{Ra} M_1}{\text{Pr} |\omega|^2}\right) a^2 \int_0^1 |w|^2 dz + (1 + M_1) \text{Pr} \int_0^1 |\theta|^2 dz \leq 0. \quad (44)$$

Из (44) следует

$$|\omega|^2 \leq \max \{Ra M_1 / Pr, Ta\}. \quad (45)$$

Теорема доказана.

Теорему 1 можно сформулировать в эквивалентной форме: значение скорости роста возмущений произвольного осциллирующего движения с возрастающей амплитудой при конвективном течении ферромагнитной жидкости с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся неплотной пористой среде для свободных граничных условий находится в правой половине круга, расположенного в плоскости $\omega_r \omega_i$, с центром в начале координат и радиусом, удовлетворяющим условию $|\omega|^2 \leq \max \{Ra M_1 / Pr, Ta\}$.

Полученная оценка может быть использована для вычисления границ скорости роста возмущений.

Согласно [2] точное решение, удовлетворяющее граничным условиям (27), имеет вид

$$w = A \sin \pi z, \quad \theta = B \sin \pi z, \quad \varphi = -\frac{C}{\pi} \cos \pi z, \quad \zeta = -\frac{D}{\pi} \cos \pi z, \\ D\varphi = C \sin \pi z, \quad D\zeta = D \sin \pi z,$$

где A, B, C, D — константы. Подставляя эти решения в уравнения (22), (24)–(26), получаем систему четырех линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными A, B, C, D . Для существования нетривиального решения данной системы уравнений детерминант коэффициентов должен быть равен нулю. После необходимых упрощений получаем

$$U\omega^3 + V\omega^2 + W\omega + X = 0, \quad (46)$$

где

$$U = (\pi^2 + a^2 M_3) Pr k^2, \\ V = (\pi^2 + a^2 M_3) \left(k^4 + 2k^2 \left(k^2 + \frac{1}{k_0} \right) (1 + \delta M_3) Pr \right), \\ W = (\pi^2 + a^2 M_3) \left\{ 2k^4 \left(k^2 + \frac{1}{k_0} \right) (1 + \delta M_3) + k^2 \left[\left(k^2 + \frac{1}{k_0} \right) (1 + \delta M_3) \right]^2 Pr + \pi^2 Ta Pr \right\} - \\ - Ra^2 [\pi^2 + a^2 M_3 (1 + M_1)], \\ X = (\pi^2 + a^2 M_3) \left\{ k^4 \left[\left(k^2 + \frac{1}{k_0} \right) (1 + \delta M_3) \right]^2 + \pi^2 Ta k^2 \right\} - \\ - Ra a^2 \left[(1 + \delta M_3) \left(k^2 + \frac{1}{k_0} \right) \right] [\pi^2 + a^2 M_3 (1 + M_1)], \\ k^2 = \pi^2 + a^2.$$

При подстановке $\omega = i\omega_i$ в (46) отличные от нуля и реальные значения ω_i дают условия сверхустойчивости.

Из уравнения (46) нетрудно определить число Рэлея для случая осциллирующей неустойчивости:

$$Ra_1 = 2(1 + x M_3) \left\{ (1 + \delta M_3)(1 + x)^4 [1 + 2(1 + \delta M_3) Pr + (1 + \delta M_3)^2 Pr] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2 k_0} (1 + x)^3 (1 + \delta M_3) [1 + 4(1 + \delta M_3) Pr + 3(1 + \delta M_3)^2 Pr^2] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^4} (1 + \delta M_3)(1 + x)^2 Pr \left[\frac{3}{k_0^2} (1 + \delta M_3)^2 Pr + \pi^2 Ta Pr + \frac{2}{k_0^2} (1 + \delta M_3) \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi^6 k_0^3} (1+x)(1+\delta M_3)^2 \text{Pr}^2 + \frac{1}{\pi^6 k_0} \text{Ta} (1+\delta M_3) \text{Pr}^2 \} /$$

$$/ \left\{ x[1+xM_3(1+M_1)] \left[(1+x)(1+\text{Pr}(1+\delta M_3)) + \frac{\text{Pr}}{\pi^2 k_0} (1+\delta M_3) \right] \right\}, \quad (47)$$

где $\text{Ra}_1 = \text{Ra}/\pi^4$; $x = a^2/\pi^2$. Для определения минимального значения $\text{Ra} = \text{Ra}_c$ (Ra_c — критическое число Рэлея) с учетом волнового числа уравнение (47) дифференцируем по x и приравняем к нулю. Получаем следующий полином относительно x :

$$\begin{aligned} & \left[(x+x^2 M_3(1+M_1)) \left((1+x)(1+\text{Pr}(1+\delta M_3)) + \frac{\text{Pr}}{\pi^2 k_0} (1+\delta M_3) \right) \right] \times \\ & \times \left[2(1+\delta M_3)[1+2(1+\delta M_3)\text{Pr}+(1+\delta M_3)^2 \text{Pr}] [4(1+xM_3)(1+x)^3 + (1+x)^4 M_3] + \right. \\ & + \frac{2}{\pi^2 k_0} (1+\delta M_3)[1+4(1+\delta M_3)\text{Pr}+3(1+\delta M_3)^2 \text{Pr}^2] [3(1+xM_3)(1+x)^2 + (1+x)^3 M_3] + \\ & + \frac{2}{\pi^4} (1+\delta M_3)\text{Pr} \left(\frac{3}{k_0^2} (1+\delta M_3)^2 \text{Pr} + \pi^2 \text{Ta} \text{Pr} + \frac{2}{k_0^2} (1+\delta M_3) \right) [2(1+xM_3)(1+x) + (1+x)^2 M_3] + \\ & + \frac{2}{\pi^6 k_0^3} (1+\delta M_3)^2 \text{Pr}^2 [(1+xM_3) + (1+x)M_3] + \frac{2}{\pi^6 k_0} \text{Ta} (1+\delta M_3) \text{Pr}^2 M_3 \left. \right] - \\ & - \left\{ (1+xM_3) \left[2(1+\delta M_3)(1+x)^4 [1+2(1+\delta M_3)\text{Pr}+(1+\delta M_3)^2 \text{Pr}] + \right. \right. \\ & + \frac{2}{\pi^2 k_0} (1+x)^3 (1+\delta M_3)[1+4(1+\delta M_3)\text{Pr}+3(1+\delta M_3)^2 \text{Pr}^2] + \\ & + \frac{2}{\pi^4} (1+\delta M_3)(1+x)^2 \text{Pr} \left(\frac{3}{k_0^2} (1+\delta M_3)^2 \text{Pr} + \pi^2 \text{Ta} \text{Pr} + \frac{2}{k_0^2} (1+\delta M_3) \right) + \\ & \left. \left. + \frac{2}{\pi^6 k_0^3} (1+x)(1+\delta M_3)^2 \text{Pr}^2 + \frac{2}{\pi^6 k_0} \text{Ta} (1+\delta M_3) \text{Pr}^2 \right] \right\} \times \\ & \times \left[(x+x^2 M_3(1+M_1))[1+\text{Pr}(1+\delta M_3)] + \left((1+x)(1+\text{Pr}(1+\delta M_3)) + \frac{\text{Pr}}{\pi^2 k_0} (1+\delta M_3) \right) \times \right. \\ & \left. \times (1+2xM_3(1+M_1)) \right] = 0. \quad (48) \end{aligned}$$

Уравнение (48) решаем численно при различных значениях M_1 , M_3 , Ta (см. таблицу). Для каждого набора этих значений определяем минимальное значение x , для которого можно получить критическое значение инкремента x_c . При больших значениях имеет место неустойчивость течения.

Зависимость числа Рэлея от волнового числа (см. таблицу) представлена на рис. 2 при $\text{Ta} = 10^6$. (Для числа Тейлора $\text{Ta} = 10^8$ можно построить аналогичную зависимость.) Видно, что коэффициент вязкости δ оказывает стабилизирующее влияние. С помощью неравенства (45) для различных значений Ta и Ra M_1/Pr (см. таблицу) можно построить верхние границы комплексного инкремента ω (рис. 3).

Определим верхнюю границу комплексной скорости роста возмущений для случая твердой границы с использованием следующей теоремы.

Теорема 2. Если $\text{Ra} > 0$, $M_1 > 0$, $\text{Ta} > 0$, $\omega_r \geq 0$, то необходимое условие нетривиального решения $(w, \theta, \varphi, \zeta, \omega)$ уравнений (22), (24)–(26) совместно с граничными условиями (28) имеет вид $|\omega|^2 \omega_i^2 < \max \{ (\text{Ra} M_1 / \text{Pr})^2, \text{Ta}^2 \}$.

Параметры предельной устойчивости осциллирующего течения магнитной жидкости с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся пористой среде, подогреваемой снизу, при $M_1 = 1000$, $M_2 = 0$, $Pr = 0,06$, $k_0 = 0,10, 0,01$

Ta	δ	M_3	x_c		Ra_c		$Ra_c M_1 / Pr$	
			$k_0 = 0,10$	$k_0 = 0,01$	$k_0 = 0,10$	$k_0 = 0,01$	$k_0 = 0,10$	$k_0 = 0,01$
10^6	0,02	1	6,2810	4,7393	109,13	125,11	$1,8188 \cdot 10^6$	$2,0852 \cdot 10^6$
		3	5,3188	3,5296	102,26	115,53	$1,7043 \cdot 10^6$	$1,9255 \cdot 10^6$
		5	5,0517	3,1391	103,44	116,60	$1,7240 \cdot 10^6$	$1,9433 \cdot 10^6$
		7	4,9169	2,9217	105,87	119,30	$1,7645 \cdot 10^6$	$1,9883 \cdot 10^6$
	0,06	1	6,2606	4,7045	113,28	129,74	$1,8880 \cdot 10^6$	$2,1623 \cdot 10^6$
		3	5,2627	3,4234	113,35	127,59	$1,8892 \cdot 10^6$	$2,1265 \cdot 10^6$
		5	4,9596	2,9625	121,34	135,98	$2,0223 \cdot 10^6$	$2,2663 \cdot 10^6$
		7	4,7885	2,6786	130,51	145,95	$2,1752 \cdot 10^6$	$2,4325 \cdot 10^6$
	0,09	1	6,2452	4,6786	116,38	133,20	$1,9397 \cdot 10^6$	$2,2200 \cdot 10^6$
		3	5,2202	3,3469	121,62	136,52	$2,0270 \cdot 10^6$	$2,2753 \cdot 10^6$
		5	4,8898	2,8403	134,63	150,22	$2,2438 \cdot 10^6$	$2,5037 \cdot 10^6$
		7	4,6913	2,5178	148,71	165,40	$2,4785 \cdot 10^6$	$2,7567 \cdot 10^6$
10^8	0,02	1	30,524	25,895	7507,30	7453,6	$1,2512 \cdot 10^8$	$1,2423 \cdot 10^8$
		3	26,319	20,274	7609,80	7520,2	$1,2683 \cdot 10^8$	$1,2534 \cdot 10^8$
		5	25,223	18,497	7840,10	7732,3	$1,3067 \cdot 10^8$	$1,2887 \cdot 10^8$
		7	24,677	17,467	8089,40	7966,8	$1,3482 \cdot 10^8$	$1,3278 \cdot 10^8$
	0,06	1	30,428	25,685	7785,70	7724,7	$1,2976 \cdot 10^8$	$1,2875 \cdot 10^8$
		3	26,051	19,493	8417,70	8297,5	$1,4030 \cdot 10^8$	$1,3829 \cdot 10^8$
		5	24,780	17,060	9167,90	9001,2	$1,5280 \cdot 10^8$	$1,5002 \cdot 10^8$
		7	24,058	15,319	9927,90	9714,0	$1,6547 \cdot 10^8$	$1,6190 \cdot 10^8$
	0,09	1	30,355	25,527	7993,80	7927,2	$1,3323 \cdot 10^8$	$1,3212 \cdot 10^8$
		3	25,847	18,902	9017,10	8871,1	$1,5029 \cdot 10^8$	$1,4785 \cdot 10^8$
		5	24,444	15,956	10146,00	9927,0	$1,6910 \cdot 10^8$	$1,6545 \cdot 10^8$
		7	23,587	13,630	11273,00	10974,0	$1,8788 \cdot 10^8$	$1,8290 \cdot 10^8$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая (22) на w^* и интегрируя результирующее уравнение по z , получаем

$$\int_0^1 w^*(D^2 - a^2) \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] w dz = a Ra^{1/2} (1 + M_1) \int_0^1 w^* \theta dz - a Ra^{1/2} M_1 \int_0^1 w^* D\varphi dz + Ta^{1/2} \int_0^1 w^* D\zeta dz. \quad (49)$$

С использованием (26), (24) и граничных условий (28) имеем

$$a Ra^{1/2} (1 + M_1) \int_0^1 w^* \theta dz = -(1 + M_1) \int_0^1 \theta (D^2 - a^2 - Pr \omega^*) \theta^* dz; \quad (50)$$

$$Ta^{1/2} \int_0^1 w^* D\zeta dz = -Ta^{1/2} \int_0^1 \zeta Dw^* dz = \int_0^1 \zeta \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] \zeta^* dz. \quad (51)$$

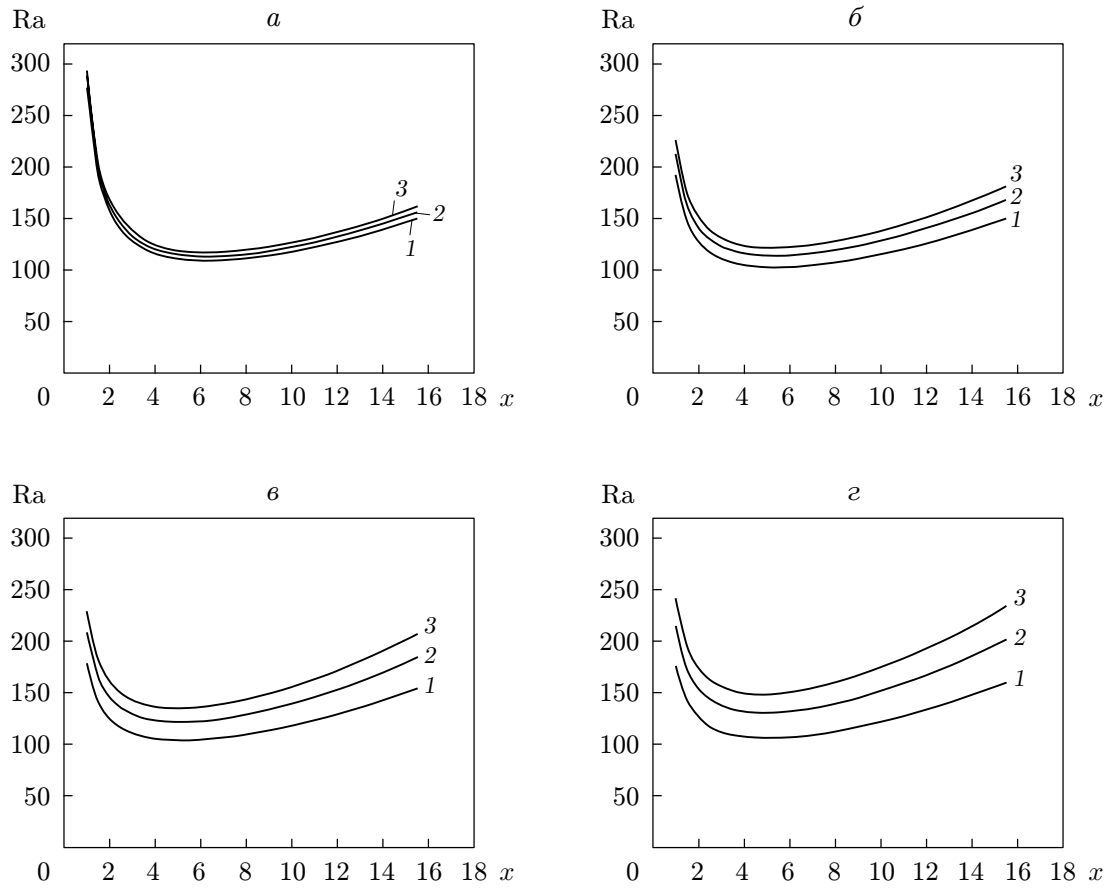


Рис. 2. Зависимость числа Рэлея от волнового числа при $Ta = 10^6$, $k_0 = 0,10$ и различных значениях M_3 и δ :
 а — $M_3 = 1$, б — $M_3 = 3$, в — $M_3 = 5$, г — $M_3 = 7$; 1 — $\delta = 0,02$, 2 — $\delta = 0,06$, 3 — $\delta = 0,09$

Объединяя уравнения (49)–(51), получаем

$$\int_0^1 w^*(D^2 - a^2) \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] w dz = -(1 + M_1) \int_0^1 \theta (D^2 - a^2 - \text{Pr} \omega^*) \theta^* dz -$$

$$- a \text{Ra}^{1/2} M_1 \int_0^1 w^* D\varphi dz + \int_0^1 \zeta \left[(1 + \delta M_3) \left(D^2 - a^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \omega \right] \zeta^* dz. \quad (52)$$

Интегрируя члены уравнения (51) по частям необходимое количество раз, используя граничные условия (28) и равенство (34), находим

$$\int_0^1 (1 + \delta M_3) (|D^2 w|^2 + 2a^2 |Dw|^2 + a^4 |w|^2) dz + \frac{1 + \delta M_3}{k_0} \int_0^1 (|Dw|^2 + a^2 |w|^2) dz +$$

$$+ \omega \int_0^1 (|Dw|^2 + a^2 |w|^2) dz = (1 + M_1) \int_0^1 (|D\theta|^2 + a^2 |\theta|^2 + \text{Pr} \omega^* |\theta|^2) dz -$$

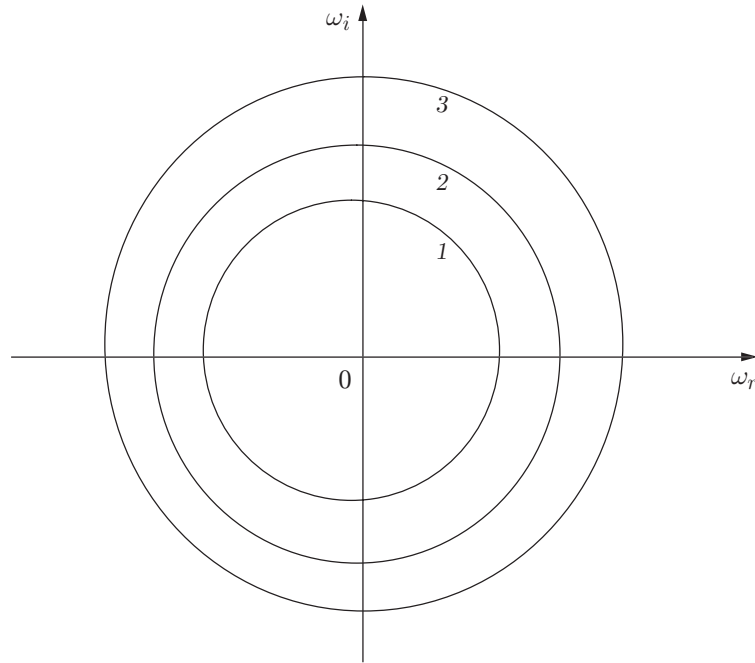


Рис. 3. Границы скорости роста возмущений при $Ta = 10^6$, $M_3 = 1$ и различных значениях δ :

1 — $\delta = 0,02$, 2 — $\delta = 0,06$, 3 — $\delta = 0,09$

$$-a Ra^{1/2} M_1 \int_0^1 w^* D\varphi dz - \int_0^1 \left[(1 + \delta M_3) \left(|D\zeta|^2 + a^2 |\zeta|^2 + \frac{1}{k_0} |\zeta|^2 \right) + \omega^* |\zeta|^2 \right] dz. \quad (53)$$

Приравняв мнимые части (53) и разделив полученное уравнение на $\omega_i \neq 0$, находим

$$\int_0^1 (|Dw|^2 + a^2 |w|^2) dz = -(1 + M_1) Pr \int_0^1 |\theta|^2 dz - \frac{a Ra^{1/2} M_1}{\omega_i} \operatorname{Im} \int_0^1 w^* (D\varphi) dz + \int_0^1 |\zeta|^2 dz. \quad (54)$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{a Ra^{1/2} M_1}{\omega_i} \operatorname{Im} \int_0^1 w^* (D\varphi) dz &\leq \left| -\frac{a Ra^{1/2} M_1}{\omega_i} \operatorname{Im} \int_0^1 w^* (D\varphi) dz \right| \leq \\ &\leq a Ra^{1/2} M_1 \left| \frac{1}{\omega_i} \int_0^1 w^* (D\varphi) dz \right| \leq \frac{a Ra^{1/2} M_1}{|\omega_i|} \left| \int_0^1 w^* (D\varphi) dz \right| \leq \\ &\leq \frac{a Ra^{1/2} M_1}{|\omega_i|} \int_0^1 |w^* (D\varphi)| dz \leq \frac{a Ra^{1/2} M_1}{|\omega_i|} \int_0^1 |w| |D\varphi| dz \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{a \text{Ra}^{1/2} M_1}{|\omega_i|} \left(\int_0^1 |w|^2 dz \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |D\varphi|^2 dz \right)^{1/2}. \quad (55)$$

Из (39), (42) получаем

$$\left(\int_0^1 |D\varphi|^2 dz \right)^{1/2} \leq \frac{\text{Ra}^{1/2}}{\text{Pr} |\omega|} \left(\int_0^1 |w|^2 dz \right)^{1/2}. \quad (56)$$

Объединяя неравенства (55), (56), имеем

$$-\frac{a \text{Ra}^{1/2} M_1}{\omega_i} \text{Im} \int_0^1 w^*(D\varphi) dz \leq \frac{a^2 \text{Ra} M_1}{\text{Pr} |\omega| |\omega_i|} \int_0^1 |w|^2 dz. \quad (57)$$

Умножая уравнение (24) на ζ^* и интегрируя результирующее уравнение по частям необходимое количество раз по z , получаем мнимую часть итогового уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\zeta|^2 dz &= \frac{1}{\omega_i} \text{Im} \text{Ta}^{1/2} \int_0^1 \zeta^*(Dw) dz \leq \text{Ta}^{1/2} \left| \frac{1}{\omega_i} \text{Im} \int_0^1 \zeta^*(Dw) dz \right| \leq \\ &\leq \frac{\text{Ta}^{1/2}}{|\omega_i|} \left| \int_0^1 \zeta^*(Dw) dz \right| \leq \frac{\text{Ta}^{1/2}}{|\omega_i|} \int_0^1 |\zeta| |Dw| dz \leq \\ &\leq \frac{\text{Ta}^{1/2}}{|\omega_i|} \left(\int_0^1 |\zeta|^2 dz \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |Dw|^2 dz \right)^{1/2} \leq \frac{\text{Ta}}{|\omega| |\omega_i|} \int_0^1 |Dw|^2 dz. \end{aligned} \quad (58)$$

В последнем неравенстве (58) использовано неравенство (40).

Используя неравенства (57), (58) в уравнении (54), получаем

$$\left(1 - \frac{\text{Ta}}{|\omega| |\omega_i|} \right) \int_0^1 |Dw|^2 dz + a^2 \left(1 - \frac{\text{Ra} M_1}{\text{Pr} |\omega| |\omega_i|} \right) \int_0^1 |w|^2 dz + (1 + M_1) \text{Pr} \int_0^1 |\theta|^2 dz \leq 0,$$

откуда следует

$$|\omega|^2 \omega_i^2 < \max \left\{ \left(\frac{\text{Ra} M_1}{\text{Pr}} \right)^2, \text{Ta}^2 \right\}. \quad (59)$$

Теорему 2 можно сформулировать в эквивалентной форме: значение скорости роста возмущений произвольного осциллирующего движения с возрастающей амплитудой при конвективном течении ферромагнитной жидкости с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся неплотной пористой среде для случая твердой границы находится внутри области, описываемой неравенством (59).

Заключение. С использованием линейной теории устойчивости определены границы комплексного инкремента при конвективном течении ферромагнитной жидкости с вязкостью, зависящей от магнитного поля, во вращающейся неплотной пористой среде, нагреваемой снизу, при наличии однородного вертикального магнитного поля. Поскольку полученные результаты определены через безразмерные величины и не зависят от волнового числа, они обладают универсальной применимостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rosensweig R. E.** Ferrohydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
2. **Finlayson B. A.** Convective instability of ferromagnetic fluids // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 40. P. 753–767.
3. **Lalas D. P., Carmi S.** Thermoconvective stability of ferrofluids // *Phys. Fluids.* 1971. V. 14. P. 436–437.
4. **Shliomis M. I.** Magnetic fluids // *Soviet Phys. Uspekhi (English Ed.)*. 1974. V. 17, N 2. P. 153–169.
5. **Tarapov I. E.** Surface waves and stability of free surface of a magnetizable liquid // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1974. V. 15, N 4. P. 465–469.
6. **Rosensweig R. E., Zhan M., Vogler T.** Stabilization of fluid penetration through a porous medium using magnetizable fluids // *Thermo-mechanics of magnetic fluids: Theory and applications*. Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1978. P. 195–211.
7. **Zhan M., Rosensweig R. E.** Stability of a magnetic fluid penetration through a porous medium with uniform magnetic field oblique to the interface // *IEEE Trans. Magn. Mag.* 1980. V. 16. P. 275–282.
8. **Schwab L., Hilderbrandt U., Stierstadt K.** Magnetic Benard convection // *J. Magn. Magn. Mater.* 1983. V. 39. P. 113–114.
9. **Qin Y., Chadan J.** A nonlinear stability problem for ferromagnetic fluids in a porous medium // *Appl. Math. Lett.* 1995. V. 8, N 2. P. 25–29.
10. **Vadasz P.** Convection and stability in a rotating porous layer with alternating direction of the centrifugal body force // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1996. V. 39. P. 1639–1647.
11. **Borglin S. E., Moridis G. J., Oldenburg C. M.** Experimental studies of the flow of ferrofluid in porous media // *Transport Porous Media.* 2000. V. 41. P. 60–80.
12. **Belyaev A. V., Smorodin B. L.** Convection of a ferrofluid in an alternating magnetic field // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2009. V. 50, N 4. P. 558–565.
13. **Sekar R., Vaidyanathan G., Vasanthakumari R.** Ferroconvection induced by point heat source // *Indian J. Engng Mater. Sci.* 2004. V. 11. P. 331–337.
14. **Sarvanan S., Yamaguchi H.** Onset of centrifugal convection in a magnetic-fluid — saturated porous medium // *Phys. Fluids.* 2005. V. 17. 084105(1-9).
15. **Suslov S. A.** Thermomagnetic convection in a vertical layer of ferromagnetic fluid // *Phys. Fluids.* 2008. V. 20. 084101.
16. **Shivakumara I. S., Lee J., Nanjundappa C. E., Ravisha M.** Ferromagnetic convection in a rotating ferrofluid saturated porous layer // *Transport Porous Media.* 2011. V. 87, N 1. P. 251–273.
17. **Shliomis M. I.** Effective viscosity of magnetic suspensions // *Soviet Phys. JETP.* 1972. V. 34. P. 1291–1294.
18. **Sunil, Sharma D., Sharma R. C.** Effect of magnetic field dependent viscosity on ferroconvection in a porous medium in the presence of dust particles // *J. Geophys. Engng.* 2004. V. 1, N 4. P. 277–286.
19. **Sunil, Sharma P., Mahajan A.** A non linear analysis for thermoconvective magnetized ferrofluid with magnetic field dependent viscosity // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 35. P. 1281–1287.
20. **Vaidyanathan G., Sekar R.** Effect of magnetic field dependent viscosity on ferroconvection in rotating medium // *Indian J. Pure Appl. Phys.* 2002. V. 40. P. 159–165.
21. **Vaidyanathan G., Sekar R., Vasanthakumari R., Ramanathan A.** The effect of magnetic field dependent viscosity on ferroconvection in a rotating sparsely distributed porous medium // *J. Magn. Magn. Mater.* 2002. V. 250. P. 65–76.

22. **Prakash J.** On stationary convection and oscillatory motions in ferromagnetic convection in a ferrofluid layer // J. Magn. Magn. Mater. 2012. V. 324. P. 1523–1527.
23. **Prakash J.** On arresting the complex growth rates in ferromagnetic convection in a ferrofluid saturated porous layer // J. Porous Media. 2013. V. 16, N 3. P. 217–226.
24. **Prakash J., Gupta S.** On arresting the complex growth rates in ferromagnetic convection with magnetic field dependent viscosity in a rotating ferrofluid layer // J. Magn. Magn. Mater. 2013. V. 345. P. 201–207.

*Поступила в редакцию 18/XI 2013 г.,
в окончательном варианте — 30/IX 2014 г.*
