

УДК 621.039.5

## Стохастическая динамика кипения на поверхности тепловыделяющего элемента

**А.И. Достов**

*НИИ Курчатовский институт, Москва*

E-mail: a.dostov@gmail.com

Динамика кипения жидкости на обогреваемой поверхности исследуется в рамках эквивалентной задачи динамики температуры тепловыделяющего элемента. Соответствующее уравнение баланса тепла выводится в концепции кривой кипения. Показано, что структурная неустойчивость потенциала кривой кипения приводит к необходимости исследования задачи о флуктуациях температуры поверхности, на которой происходит кипение. Теоретический анализ уравнения Ито для модели рассматриваемой системы показал, что при определенной интенсивности внешнего случайного воздействия система переходит из одного состояния самоорганизованной критичности в другое. Эти процессы сопровождаются  $1/f^\alpha$ -шумом (фликкер-шумом), который рассматривается как объективный показатель кризиса кипения. Теоретические результаты подтверждаются экспериментальными данными других авторов.

**Ключевые слова:** кривая кипения, кризис кипения, ядерные реакторы, стохастическая нелинейная динамика, фликкер-шум.

### Введение

Стохастические явления при кипении оказывают существенное влияние на критические тепловые нагрузки в технических устройствах различного рода. Исследования [1, 2] показали, что при кипении на теплоотдающей поверхности могут происходить лавинообразные стохастические процессы, значительная доля энергии которых приходится на низкочастотные флуктуации параметров системы. Такие процессы, называемые  $1/f$ -шумом, приводят к крупномасштабным энергетическим выбросам в системах с кипением. Генерация фликкер-шума при переходе к кризисному режиму кипения происходит в результате динамического взаимодействия двух параметров порядка, свойственных фазовым переходам. Фликкер-шум, выявленный путем численного анализа системы стохастических дифференциальных уравнений, свидетельствует о состоянии самоорганизованной критичности [3] для рассматриваемой системы. Это означает, что система под действием малых возмущений переходит из одного метастабильного состояния в другое.

Экспериментальное подтверждение этого явления было получено авторами работы [4] при изучении процессов кипения воды на проволочных нагревателях в условиях естественной конвекции. При постановке экспериментальных исследований был использован принцип эквивалентности устойчивости режима кипения и устойчивости температурного поля греющего элемента, впервые предложенный в монографии [5].

При решении задач устойчивости стационарного распределения температуры в тепловыделяющем элементе в работе [6] была впервые применена кривая кипения в большом

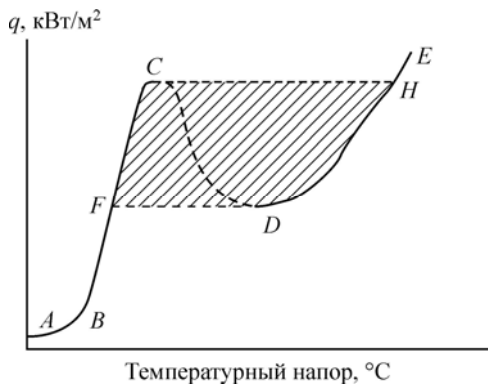


Рис. 1. Кривая кипения.

объеме для задания закона теплообмена на теплоотдающей поверхности. Эта кривая представляет собой зависимость плотности теплового потока ( $q$ ) на теплоотдающей поверхности от разности температуры поверхности и температуры насыщения. Схематично такая кривая представлена на рис. 1, где  $BC$  — режим развитого пузырькового кипения, температурный напор,  $CD$  — режим переходного пузырькового кипения,  $DE$  — режим пленочного кипения,  $C$  — точка кризиса кипения (ката-

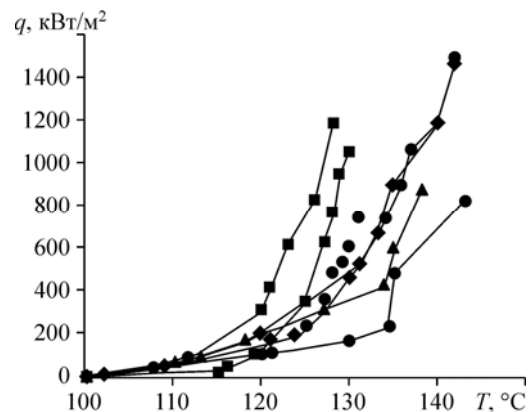
строфа),  $D$  — точка гистерезиса. Несмотря на многочисленные исследования этой кривой, необходимо констатировать, что суть ее остается непонятой в полной мере до настоящего времени. Доподлинно известно лишь существование точек максимума, минимума и точки закипания на этой кривой, впервые выявленных в работе [7]. Заметим, что использованная в работе [6] аналитическая зависимость для кривой кипения представляет собой аппроксимацию экспериментальных данных только по этим трем характерным точкам.

В работе [8] было отмечено, что попытки механистического прогнозирования происходящих при кипении явлений оказываются безуспешным. В качестве иллюстрации этого замечания рассмотрим кривые кипения, полученные в экспериментах Е.В. Анохиной [9] (рис. 2). На этом рисунке представлены результаты семи серий опытов при использовании в качестве нагревателя вольфрамовой проволоочки. Температура, при которой происходил пережог нагревателя, была разной для каждой серии. Видно ветвление кривых при увеличении температурного напора от серии к серии. Причем это ветвление носит случайный характер, то есть в области  $FCND$ , заштрихованной на рис. 1, система может скачком переходить от одного режима кипения к другому. На рис. 2 видно также, что существует разброс экспериментальных данных как по температуре стенки, при которой достигается критический тепловой поток, так и по величине самого потока. В этой же работе опыты проводились с нагревателями из меди и нихрома разных диаметров. Было обнаружено сильное влияние поверхностных условий на кривые кипения и отмечена неопределенность в температуре возникновения кризиса (128–152 °C) и в величине критического теплового потока  $((0,8-1,5) \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2)$ . В публикациях других исследователей, например, в работе [10], также акцентируется внимание на случайности проявления кризиса и гистерезиса. Отсюда можно сделать заключение, что существование различных режимов кипения и случайность их возникновения, как принципиально важных характеристик кипящей системы, десятилетиями ускользали от внимания исследователей.

Авторы работы [11] показали, что нелинейность кривой кипения является главным фактором, приводящим к кризису кипения. Следуя теории катастроф, изложенной в монографии [12], в работе [11] в рассмотрение вводится потенциал, критические точки которого находятся из следующего уравнения, определяющего семейство кривых равновесного кипения:

$$(\Delta T - \Delta T_0)^3 - n_u (\Delta T - \Delta T_0) + F(q) = 0,$$

Рис. 2. Кривые кипения воды на вольфрамовом нагревателе диаметром 90 мкм для семи серий опытов.



где  $n_u$  — коэффициент уравнения, зависящий от теплофизических свойств жидкости,  $\Delta T$  — перегрев жидкости,  $\Delta T_0$  — начальное значение перегрева, а  $F(q)$  — константа, зависящая от теплового потока  $q$ . Заметим, что это уравнение зависит от разности  $(\Delta T - \Delta T_0)$ , которую можно рассматривать как флуктуацию также и при  $\Delta T_0 = 0$ . Таким образом, вводится в рассмотрение «математическое топологическое пространство кипения». Смены режимов кипения фактически представляются как бифуркации в этом виртуальном пространстве. Поскольку функция  $F(q)$  неизвестна, то возможности этой модели ограничены. В частности, по этой причине исключается зависимость кризиса кипения от материала, размеров и микроструктуры теплоотдающей поверхности. В то же время получен важный результат: топологическое пространство равновесного кипения описывается полиномами третьей степени.

Уравнение Д.А. Лабунцова [13] для кривой кипения представляет зависимость теплового потока от температурного напора стенка–жидкость ( $\Delta T_s$ ) также в виде полинома третьей степени, но при этом, как будет показано далее, в уравнении учитывается влияние поверхностных условий. Последнее дает основание для применения уравнения Д.А. Лабунцова при построении уравнения динамики потенциала. В качестве потенциала, согласно принципу эквивалентности, используется теплосодержание тепловыделяющего элемента.

Введение в уравнение динамики температуры тепловыделяющего элемента малых возмущений (шума), обусловленных как стохастической природой процесса кипения, так и случайными внешними воздействиями, дает возможность исследовать стохастические процессы самоорганизации таких систем.

### 1. Кривая кипения Д.А. Лабунцова

Зависимость теплового потока  $q$  от перегрева теплоотдающей поверхности  $\Delta T_s$ , предложенная Д.А. Лабунцовым [13], состоит из двух слагаемых:

$$q = q_1 + q_2 = a\Delta T_s^3 + b\Delta T_s^2. \quad (1)$$

где  $\Delta T = T - T_s$ ,  $T$  — температура стенки,  $T_s$  — температура насыщения. Первое слагаемое представляет тепловой поток через тонкий слой жидкости в основании пузыря. Второе — тепло, идущее на испарение жидкости в пузыри, растущие на стенке. Коэффициенты этого уравнения выражаются следующим образом:

$$a = 10^{-3} \lambda^2 / (\sigma T_s \nu), \quad b = 5 \lambda r \rho_v / (\sigma T_s), \quad (2)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\nu$  — кинематическая вязкость воды,  $\rho_v$  — плотность пара,  $r$  — теплота парообразования. В выражениях для  $a$  и  $b$  присутствуют константы ( $\text{const}_1 = 10^{-3}$  и  $\text{const}_2 = 5$ ), которые были подобраны Д.А. Лабунцовым на основе феноменологического метода, позволившего описать экспериментальные данные для определенного типа поверхностных условий в диапазоне давлений от 1 до 200 бар «с минимальными искажениями или толкованиями» [13]. При этом в рассмотрение включались экспериментальные данные как для условий свободной конвекции, так и для вынужденного движения в трубах. Следует отметить, что при выводе соотношений (1) и (2) использовались упрощенные оценки уровня локальной смачиваемости, мелкомасштабной шероховатости, плотности и геометрии впадин и свойств материала теплоотдающей поверхности, влияющих на процесс кипения.

## 2. Структурная неустойчивость потенциала кривой кипения

Рассмотрим кривую кипения (1) в следующем виде:

$$\Delta T_s^3 + \frac{b}{a} \Delta T_s^2 - \frac{q_v \delta}{a} = 0, \quad (3)$$

где  $q_v$  — удельное объемное тепловыделение,  $\delta = V/S$ ,  $V$  — объем тепловыделяющего элемента,  $S$  — поверхность теплоотдачи. Полином (3) удобно записать как

$$\Delta T_s^3 + A \Delta T_s^2 + B \Delta T_s + C = 0, \quad (4)$$

где

$$A = b/a, \quad B = 0, \quad C = -q_v \delta/a. \quad (5)$$

Используя подстановку  $\Delta T_s = \theta - A/3$ , преобразуем уравнение (4) к так называемому «неполному» виду

$$\theta^3 + \lambda_1 \theta + \lambda_2 = 0, \quad (6)$$

в котором

$$\lambda_1 = -A^2/3, \quad (7)$$

$$\lambda_2 = 2A^3/27 + C. \quad (8)$$

Уравнение (6) имеет один действительный корень и два сопряженных комплексных корня, или три действительных корня, по крайней мере два из которых равны, или три различных действительных корня в зависимости от того, будет ли сумма  $(\lambda_1/3)^3 + (\lambda_2/2)^2$  положительна, равна нулю или отрицательна. Составим выражение для этой суммы с учетом (7) и (8):

$$\left(-\frac{A^2}{9}\right)^3 + \left(\frac{A^3}{27} + \frac{C}{27}\right)^2 = \frac{A^3 C}{27} + \frac{C^2}{4}.$$

Подставляя в это соотношение выражения для  $A$  и  $C$  из соотношений (5), получим

$$\frac{A^3 \cdot C}{27} + \frac{C^2}{4} = C \left(\frac{A^3}{27} + \frac{C}{27}\right) = \left(-\frac{q_v \delta}{a}\right) \left(\frac{1}{27} \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{q_v \delta}{4a}\right). \quad (9)$$

Для иллюстрации проведем вычисления в (9) для давления теплоносителя  $p = 6,92$  МПа и соответствующей температуры насыщения  $T_s = 285$  °С. При этих параметрах  $a = 535$  Вт/(м<sup>2</sup>(°С)<sup>3</sup>),  $b = 32273$  Вт/(м<sup>2</sup>(°С)<sup>2</sup>). При вычислении члена  $q_v \delta/a$  в (9) примем  $q_v = 1,5 \cdot 10^8$  Вт/м<sup>3</sup>, что близко к удельной мощности источников энерговыделения в ядерных реакторах [5]. Рассматривая пластинчатый твэл, положим  $\delta = 1,5$  мм, что приблизительно соответствует толщине стенки трубчатых имитаторов тепловыделяющих элементов.

Тогда  $\frac{q_v \delta}{4a} = 1 \cdot 10^2$ ,  $\frac{1}{27} \left(\frac{b}{a}\right)^3 = 8,1 \cdot 10^3$ ,  $A^3 \cdot C/27 + C^2/4 = -4,7 \cdot (8,1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^2) < 0$ .

Отсюда следует, что уравнение (6) для заданных конкретных условий имеет три действительных корня. Вычисляя  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для этого случая по формулам (7) и (8) соответственно, получим  $\lambda_1 = -1156$ ,  $\lambda_2 = 15116,8$ . Для функции  $f(\theta) = -(\theta^3 + \lambda_1 \theta + \lambda_2)$  введем потенциал  $U(\theta)$ , такой, что  $U(\theta) = -\int_0^\theta f(\theta) d\theta$ . Очевидно, что

$$U(\theta) = \left(\frac{1}{4} \theta^4 + \frac{1}{2} \lambda_1 \theta^2 + \lambda_2 \theta\right). \quad (10)$$

Из выражений (7) и (8) следует важная особенность потенциала (10) — для рассматриваемой задачи только параметр  $\lambda_2$  может принимать нулевое значение.

На рис. 3 представлена функция  $f$ , а на рис. 4 — потенциал  $U$ . Видно, что потенциал, изображаемый кривой 1, в области изменения параметра  $\theta$  от 10 до 25, что соответствует изменению  $\Delta T_s$  от  $-10$  °C до  $5$  °C, представляет собой практически плоскую функцию. Такое состояние системы называется критическим. Система в этих условиях очень чувствительна к малым воздействиям.

В уравнении (10) имеются в общем случае два управляющих параметра —  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , при обращении которых в нуль потенциальная энергия системы представляет собой структурно неустойчивую функцию. Если эти параметры изменяются в диапазоне, включающем нулевые значения, структурная неустойчивость неизбежно реализуется.

Понятие структурной неустойчивости возникает при исследовании задач на экстремум. Рассматриваемый потенциал представляет собой функцию типа  $y = x^4$ , которая имеет минимум в начале координат. Если ввести слабое возмущение  $y = x^4 - \varepsilon x^2$ , где параметр  $\varepsilon > 0$  может быть сколь угодно малым, то в результате получим функцию, которая имеет три критические точки. При этом начало координат становится точкой максимума, а в двух новых критических точках, сколь угодно близких к  $x = 0$ , функция принимает минимальные значения. Таким образом, малые возмущения функции  $y = x^4$  приводят к ее качественным изменениям в окрестности критической точки. На рис. 4 кривая 2, которая может рассматриваться как возмущенная функция типа  $y = x^4 - kx^2$ , представляет собой так называемый бистабильный потенциал. Возмущение  $y = x^4$  путем добавления линейного члена  $\varepsilon x$  приводит к результату, изображаемому на рис. 4 кривой 1.

В рассматриваемой задаче управляющие параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  могут изменяться в определенных пределах, то есть эти параметры формируют семейство функций. Интерес представляют качественные перестройки функций при изменении этих параметров (бифуркации) [12]. В рассматриваемой здесь задаче с семейством (10) точке бифуркации соответствует значение параметра  $\lambda_2 = 0$ , поскольку при переходе  $\lambda_2$  от отрицательных значений к положительным одно устойчивое стационарное состояние заменяется другим устойчивым состоянием, симметричным с первым относительно оси  $\theta = 0$  (рис. 4). При  $\lambda_2 = 0$  возникает пара устойчивых состояний  $\theta_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda_1}$  и одно неустойчивое состояние при  $\theta = 0$ . Очевидно, что можно говорить об отображении множества значений

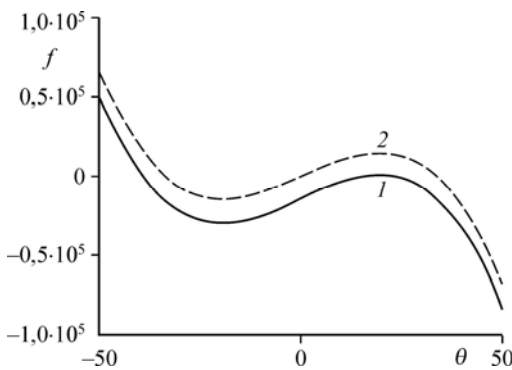


Рис. 3. Вид функции  $f(\theta)$  при изменении параметра  $\lambda_2$ .  
 $\lambda_2 > 0$  (1) и  $\lambda_2 = 0$  (2).

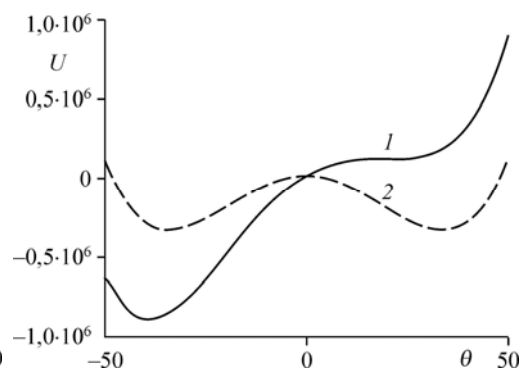


Рис. 4. Бифуркации потенциала при изменении параметра  $\lambda_2$ .  
 $\lambda_2 > 0$  (1) и  $\lambda_2 = 0$  (2).

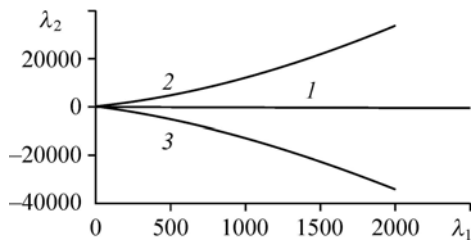


Рис. 5. Границы устойчивости, определяемые полукубической параболой.

управляющего параметра на множество критических точек. В рассматриваемом нами примере это отображение трёхзначное. Точка бифуркации разделяет области с различным поведением критических точек. Ясно, что когда области управляющих параметров являются двухмерными или трехмерными, то границы между областями с различным поведением критических точек представляют собой кривые или поверхности. Полное решение проблемы о типах особенностей таких отображений было получено Х. Уитни [12].

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не равны нулю, то с геометрической точки зрения наблюдается отображение поверхности критических точек на плоскость управляющих параметров. Роль границы будет играть не точка на прямой, а полукубическая парабола на плоскости (рис. 5). Ветви этой параболы изображают зависимость кратных корней кубического уравнения от управляющего параметра  $\lambda_1$ . Точка возврата, разделяющая эти ветви, соответствует тройному корню. Ветви параболы получили в теории катастроф название линии складки, а точка возврата, в которой эти линии собираются, называется сборкой. В области 1 на рис. 5, ограниченной линиями складки, кубическое уравнение имеет три действительных корня. Вне этих линий (области 2 и 3 на рис. 5) существует один действительный корень. Геометрические особенности графика дали название и катастрофе — «сборка». Таким образом, катастрофа «сборка» характеризует семейство функций четвертой степени, зависящих от двух параметров, и геометрию соответствующего кубического уравнения.

Пусть выполняется равенство  $\lambda_2 = 0$ . В этом случае из соотношений (5) и (8) находим

$$\lambda_2 = \frac{2}{27}(b/a)^3 - \frac{q_v \delta}{a} = 0. \tag{11}$$

Поверхностная плотность теплового потока, определяемая из выражения (11), равна  $q_v \delta = (2/27)b^3 / a^2$ .

Кипение представляет собой комплексное явление, включающее фазовые переходы, турбулентность, случайное образование пузырьков на хаотически расположенных потенциальных центрах, взаимодействие пузырьков, а также взрывное вскипание в перегретой жидкости в непосредственной близости к поверхности теплообмена. Взаимодействие пузырьков сильно зависит от микроструктуры центров парообразования, от теплоемкости, теплопроводности и толщины стенки. Определяющую роль здесь играют флуктуации параметров системы. Это приводит к тому, что стохастичность является неотъемлемой и существенной характеристикой процесса кипения. Кипящая система может подвергаться и внешним воздействиям. В частности, в системе могут происходить колебания давления, генерируемые насосами, запорными органами арматуры и др. Эти внешние воздействия могут быть как детерминированными, так и случайными. Необходимо учитывать также флуктуации источников тепла, обусловленные флуктуациями температуры тепловыделяющего элемента и паросодержанием теплоносителя. К кризису теплообмена (запариванию) могут привести при этом коллективные взаимодействия флуктуаций различного рода.

Таким образом, кипение представляет собой динамическое стохастическое явление. Главная характеристика стохастического воздействия — его интенсивность. Исходя из этого возникает задача исследования динамики флуктуаций параметров системы в зависимости от интенсивности этих воздействий.

### 3. Стохастическая динамика кипения

Исследование проводится в рамках концепции кривой кипения и, следовательно, связано с изучением нелинейной неравновесной системы. Среди переменных такой системы находится одна наиболее неустойчивая, называемая параметром порядка [14, 15]. В рассматриваемом случае система описывается одним параметром — перегревом поверхности теплообмена выше температуры насыщения жидкости. Таким образом, параметром порядка является перегрев поверхности кипения.

Будем рассматривать динамику температуры тепловыделяющего элемента в приближении сосредоточенных параметров. Запишем уравнение теплового баланса для тепловыделяющего элемента при охлаждении кипящей водой в виде

$$\rho c_p \frac{dT}{d\tau} = -\frac{S}{V}(a\Delta T_s^3 + b\Delta T_s^2) + q_v, \quad (12)$$

где  $\rho$  — плотность,  $c_p$  — удельная теплоемкость материала. Для уравнений такого типа известно, во-первых, что детерминистская парадигма (совокупность основных положений и принципов, лежащих в основе методов исследований, свойственных детерминистским уравнениям) неверна [15], во-вторых, что очень малые различия в начальных условиях приводят к большим различиям в конечных результатах [16].

Будем рассматривать динамику флуктуаций параметра порядка  $\Delta T_s$ . При учете флуктуаций температуры насыщения теплоносителя можно записать  $T_s = \bar{T}_s + \delta T_s$ , где  $\bar{T}_s$  — среднее значение температуры насыщения,  $\delta T_s$  — флуктуация температуры насыщения. Осцилляции температуры насыщения могут быть обусловлены, в частности, осцилляциями давления среды и происходить по гармоническому закону с частотой  $\omega$ :  $\delta T_s = \delta T_0 \cdot \sin \omega t$ . Уравнение (12) теперь может быть записано в виде

$$\rho c_p \frac{d(\Delta T_s + \delta T_s)}{dt} = -S/V (a\Delta T_s^3 + b\Delta T_s^2) + q_v$$

или

$$\rho c_p \frac{d(\Delta T_s)}{dt} = -\frac{a}{\delta} (\Delta T_s^3 + \frac{b}{a} \Delta T_s^2 - \frac{q_v \delta}{a}) - \rho c_p \delta T_0 \omega \cos \omega t. \quad (13)$$

Введем замену переменных  $\Delta T_s = \frac{b}{a} \left( \frac{\varphi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \right)$ . Тогда из (13) получим

$$\rho c_p \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{b^2}{3a\delta} \left[ \varphi(1-\varphi^2) - 3\sqrt{3} \left( \frac{2}{27} - \frac{q_v \delta}{a} \cdot \frac{a^3}{b^3} \right) \right] - \rho c_p \delta T_0 \frac{a\sqrt{3}}{b} \omega \cos \omega t. \quad (14)$$

Обозначим

$$\chi = \frac{b^2}{3a\delta} \cdot \frac{1}{\rho c_p}, \quad \tau = \chi t, \quad \Omega = \omega / \chi, \quad \beta = \delta T_0 \Omega \frac{a}{b} \sqrt{3}, \quad Q = 3\sqrt{3} \left( \frac{2}{27} - \frac{q_v \delta}{a} \cdot \frac{b^3}{a^3} \right) 3\sqrt{3}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим

$$d\varphi/d\tau = \varphi(1-\varphi^2) + \beta \cos \Omega \tau - Q. \quad (16)$$

Проблема корректного введения шума в правую часть уравнения (16) решается путем использования модели броуновского движения. Рассмотрим сначала модель аддитивного независимого дискретного случайного блуждания с постоянным сносом  $\nu_0$ . В этой модели величина  $x$  испытывает  $n = 1, 2, \dots$  случайных независимых приращений, каждое со средним квадратичным отклонением  $\sigma_0$ . В результате накопления таких изменений  $x$  окажется равным  $x = x_0 + \nu_0 \cdot m + \sigma_0(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$ . Случайные числа предполагаются нормированными:  $\langle \varepsilon \rangle = 0$ ,  $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$ . Далее вводится дискретная переменная Винера

$W_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = \varepsilon\sqrt{n}$ . Пусть длительность каждого шага равна  $\Delta\tau$ , так что за промежуток времени  $(\tau - \tau_0)$  их количество равно  $n = (\tau - \tau_0)/\Delta\tau$ . Обозначив дисперсию и снос в единицу времени как  $\sigma^2 = \sigma_0^2/\Delta\tau$ ,  $\nu = \nu_0/\Delta\tau$ , представим случайную функцию  $x$  в виде

$$x(\tau) = x(\tau_0) + \nu(\tau - \tau_0) + \sigma\sqrt{\tau - \tau_0} \cdot \varepsilon. \quad (17)$$

В зависимости от значения случайного числа  $\varepsilon$  будет получаться случайное число  $x$  в момент времени  $\tau$ . Таким образом, процесс  $x(\tau)$  имеет нормальное распределение с максимумом, смещающимся со скоростью  $\nu$ , и с шириной, увеличивающейся со временем пропорционально  $\sqrt{\tau - \tau_0}$ . Переходя к пределу в (17) при  $(\tau - \tau_0) \rightarrow 0$ , получим

$$dx = \nu d\tau + \sigma dW, \quad (18)$$

где  $dW = \varepsilon\sqrt{d\tau}$ .

Простое Винеровское блуждание (18) представляет собой частный случай уравнения Ито [17]. В сороковых годах прошлого века К. Ито создал теорию стохастических дифференциальных уравнений, за которыми впоследствии укрепилось название «уравнения Ито». В дальнейшем выяснилось, что стохастические уравнения являются удобным инструментом для решения многих прикладных задач. Общие процессы Ито представляют собой деформацию простого винеровского блуждания. Если снос и дисперсия являются функциями времени, которые могут зависеть также и от  $x$ , то уравнение Ито записывается как  $dx = a(x, \tau)d\tau + b(x, \tau)dW$ . Положим в уравнении (16)  $Q = 0$ , что соответствует случаю  $\lambda_2 = 0$  при анализе структурной устойчивости кривой кипения. Тогда уравнение Ито для уравнения (16) запишется как

$$d\varphi = \left[ \varphi(1 - \varphi^2) + \beta \cos \Omega\tau \right] d\tau + \sigma dW. \quad (19)$$

Это уравнение позволяет моделировать динамику стохастического процесса при помощи итерационной схемы

$$\varphi_{k+1} = \left[ \varphi_k(1 - \varphi_k^2) + \beta(\cos(\Omega\tau_k)) \right] \Delta\tau + \sigma\sqrt{\Delta\tau} \cdot \varepsilon_k. \quad (20)$$

Для заданного шага по времени  $\Delta\tau$  и начального значения  $\varphi_0$  генерируется нормальное распределенное случайное число  $\varepsilon_1$ , затем по формуле (20) вычисляется  $\varphi_1$ . Далее  $\varphi_1$  подставляется на место  $\varphi_0$ , сдвигается время  $\tau_1 = \tau_0 + \Delta\tau$  и процесс повторяется. В результате получается последовательность случайных чисел. Сходимость этого алгоритма означает, что при уменьшении  $\Delta\tau$  должны стремиться к определенному пределу среднее значение  $\bar{\varphi}(\tau)$ , среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  и функция распределения вероятностей  $P(\varphi_0, \tau_0 \Rightarrow \varphi, \tau)$  случайного процесса  $\varphi(\tau)$ .

В качестве показателя сходимости при дроблении шага интегрирования в рассматриваемом процессе будем рассматривать также сохранение особого свойства системы, описываемого уравнением (19), — стохастического резонанса. Суть этого явления заключается в возникновении кооперативных эффектов между внутренними флуктуациями параметров системы и внешним силовым воздействием [18].

Уравнение (19) совпадает с уравнением

$$d\varphi = \left[ \varphi(\mu - \varphi^2) + \beta \cos \omega_0\tau \right] d\tau + \varepsilon dW, \quad (21)$$

если положить в нем  $\mu = 1$ ,  $\omega_0 = \Omega$ . Для этого уравнения доказывается [18], что для винеровского процесса с дисперсией  $\sigma$ , заключенной в интервале  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , решение имеет пик в спектре спектральной мощности. Этот пик свидетельствует о периодическом изменении



функции  $\varphi(\tau)$ , причем период этих колебаний равен  $T = 2\pi/\Omega$ , а амплитуда  $A = 2\sqrt{\mu}$ . В этой работе показано также, что для заданной амплитуды внешнего воздействия  $\beta$ , при условии, что она меньше величины  $\mu^{3/2}$ , границы интервала для величины интенсивности шума, в котором выполняются эти закономерности, определяются как

$$\sigma_1 = \mu \left( \frac{1 - 4\beta / \mu^{3/2}}{2 \ln(2\sqrt{2}\mu / \omega_0)} \right)^{1/2}, \quad (22)$$

$$\sigma_2 = \mu \left( \frac{1 + 4\beta / \mu^{3/2}}{2 \ln(2\sqrt{2}\mu / \omega_0)} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Определим теперь граничные точки интервала ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ) для случая, когда  $\beta = 0,125$ ,  $\Omega = 0,001$ ,  $\mu = 1$ . Подставляя эти значения в формулы (18) и (19), получим

$$\sigma_1 = \left( \frac{1 - 4 \cdot 0,125}{2 \cdot \ln(2\sqrt{2} / 0,001)} \right)^{1/2} = 0,181, \quad \sigma_2 = \left( \frac{1 + 4 \cdot 0,125}{2 \cdot \ln(2\sqrt{2} / 0,001)} \right)^{1/2} = 0,305.$$

#### 4. Результаты численного анализа

Численное интегрирование уравнения Ито (19) с использованием итерационной схемы (20) требует очень малых интервалов  $\Delta\tau$  из-за неустойчивости интегрирования детерминистской части уравнения. При этом необходимо получить решение задачи для больших интервалов времени с целью анализа низкочастотных флуктуаций искомой величины. В задачах такого рода при больших интервалах и малых шагах интегрирования происходит накопление ошибок вычислений. Вычислительный эксперимент показал, что более совершенной схемой вычислений в данном случае оказалась схема Мильштейна [19]. Был установлен также оптимальный шаг интегрирования  $\Delta\tau = 0,001$ . Ниже приводятся основные результаты расчетов. Для параметров уравнения (18)  $\beta = 0,125$ ,  $\Omega = 0,001$ ,  $\sigma = 0,25$ , соответствующих условиям резонанса в работе [18], построены графики изменения  $\Delta T_s$  (параметра порядка) (рис. 6) от времени, функция распределения флуктуаций (рис. 7) и мощность спектральной плотности (МСП)  $\Delta T_s$  (рис. 8).

На рис. 6 видно, что при заданных значениях параметров стохастического процесса возникает периодичность в изменении параметра порядка. Решение изменяется скачком между двумя устойчивыми состояниями, процесс почти периодический и синхронный с внешним воздействием. Этот результат совпадает с расчетными данными, полученными в работе [18].

Из рис. 7 следует, что флуктуации параметра порядка в резонансном режиме сосредоточены в области притяжения точек с координатами 1 и  $-1$  на оси амплитуд колебаний. Функция распределения имеет ярко выраженный двугорбый вид.

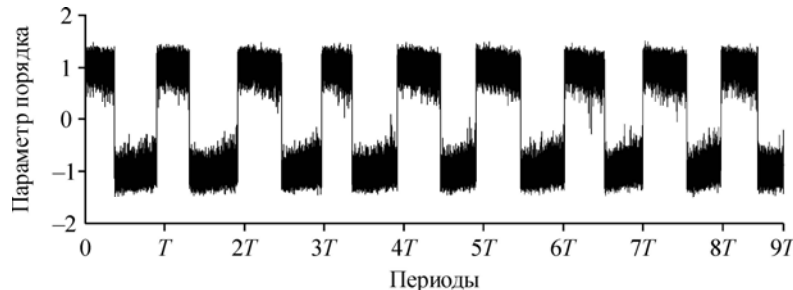


Рис. 6. Изменение  $\Delta T_s$  во времени в резонансном режиме.

$$\beta = 0,125, \Omega = 0,001, \sigma = 0,25.$$

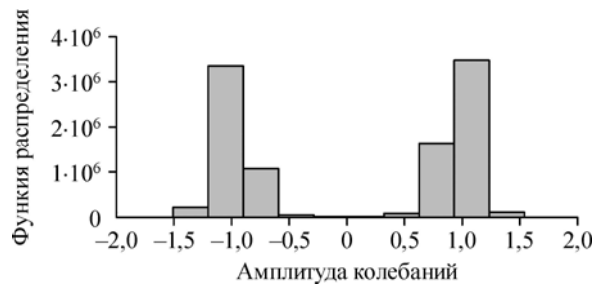


Рис. 7. Функция распределения  $\Delta T_s$  в резонансном режиме.  
 $\beta = 0,125, \Omega = 0,001, \sigma = 0,25$ .

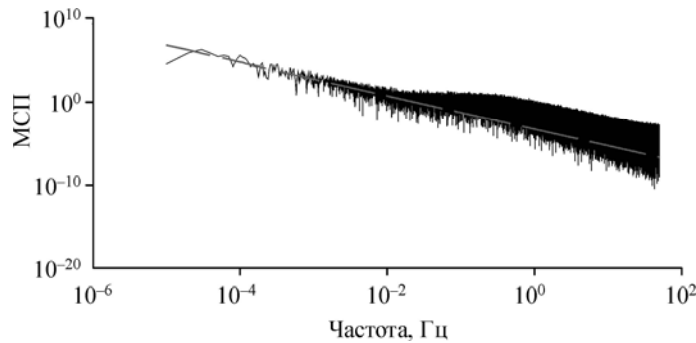


Рис. 8. Мощность спектральной плотности  $\Delta T_s$  в резонансном режиме.  
 $\beta = 0,125, \Omega = 0,001, \sigma = 0,25; \text{МСП} = 0,0015/f^2$ .

Рисунок 8 показывает, что в резонансном режиме возникает  $1/f^2$ -шум (фликкер-шум) в мощности спектральной плотности  $\Delta T_s$ . Характерная особенность этого шума — возрастание амплитуды флуктуаций по расходящемуся типу.

Как отмечалось выше, при увеличении интервала интегрирования возрастает ошибка в вычислениях. Чтобы проиллюстрировать это, был проведен расчет для интервала, в 10 раз меньшего, при сохранении других параметров задачи. Сравнение рис. 8 с рис. 9 подтверждает это. В то же время видно, что точность расчетных результатов на рис. 8 вполне приемлема для доказательства существования фликкер-шума. Дальнейшее исследование при сохранении интенсивности шума, но при отсутствии внешнего периодического воздействия показало, что вид функции распределения сохраняет двугорбый вид,

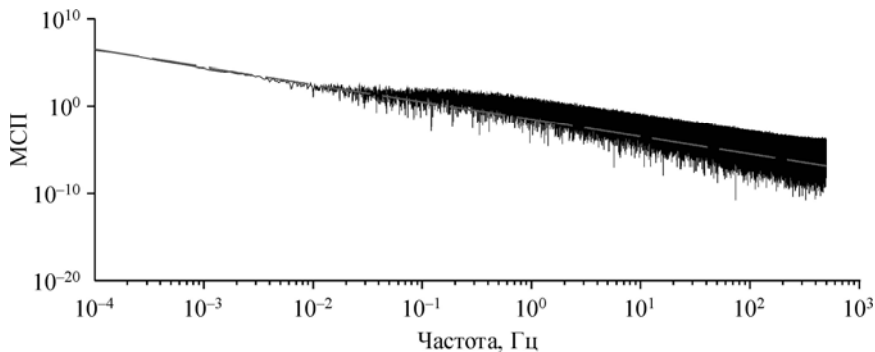


Рис. 9. Мощность спектральной плотности  $\Delta T_s$  в резонансном режиме.  
 $\beta = 0,125, \Omega = 0,001, \sigma = 0,25; \text{МСП} = 0,03/f^2$ .

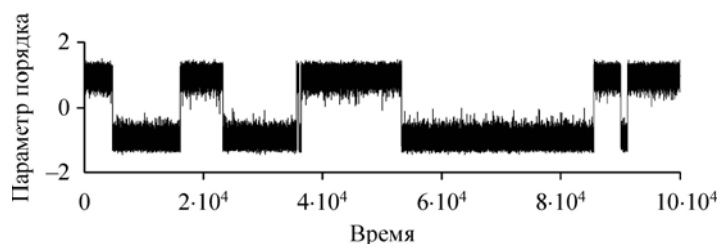


Рис. 10. Изменение параметра порядка при  $\sigma = 0,25$ ,  $\beta = 0$ .

а мощность спектральной плотности изменяется с частотой, аналогично тому, как это происходит и в случае с периодическим внешним воздействием.

Характер изменения флуктуаций  $\Delta T_s$  с течением времени при отсутствии внешнего воздействия показан на рис. 10. Видно, что этот параметр изменяется скачкообразно также и при рассматриваемых условиях, если уровень шума тот же, при котором в случае периодического внешнего воздействия происходит резонанс. Однако скачки происходят случайным образом. Мощность спектральной плотности при этом имеет тот же вид, что и на рис. 9. Возникновение фликкер-шума и скачкообразный характер изменения флуктуаций параметра порядка говорят об особом (критическом) состоянии рассматриваемой системы. Система в критических условиях переходит из одного метастабильного состояния в другое случайным образом, а фликкер-шум является наглядной характеристикой такого состояния. Важно подчеркнуть, что  $1/f$ -шум возникает только при достижении достаточной интенсивности  $\sigma$  случайной составляющей в уравнении Ито. Чтобы показать это, был проведен расчет при малой интенсивности шума ( $\sigma = 0,025$ ). Было показано, что в этом случае в спектре флуктуаций при низких частотах возможен только шум Лоренца (рис. 11) [14]. Следовательно состояние системы не является критическим.

Полученные результаты требуют экспериментального подтверждения. С этой целью воспользуемся данными работ [3, 4] по исследованию кипения воды на платиновой проволочке (кипение в свободном объеме). Диаметр платинового нагревателя изменялся от 20 до 100 мкм. Давление в воде было атмосферным. В экспериментах регистрировались колебания транспортного тока в цепи, связанные с кипением.

Сравним расчетные данные, полученные при численном решении уравнения (19) при  $\sigma = 0,25$  в реальном времени, с данными по МСП, представленными в работах [3, 4]. Для этого воспользуемся преобразованием временной координаты  $\tau = \chi t$ , где  $\chi$  вычисляется

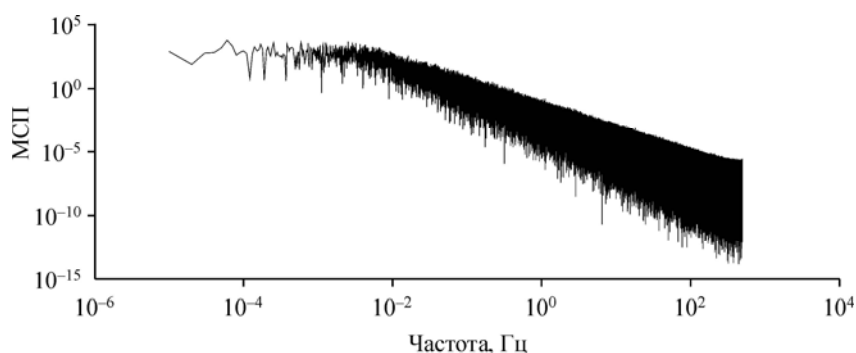


Рис. 11. Мощность спектральной плотности  $\Delta T_s$  при  $\beta = 0$  и  $\sigma = 0,025$ .

МПС имеет вид шума Лоренца при низких частотах.

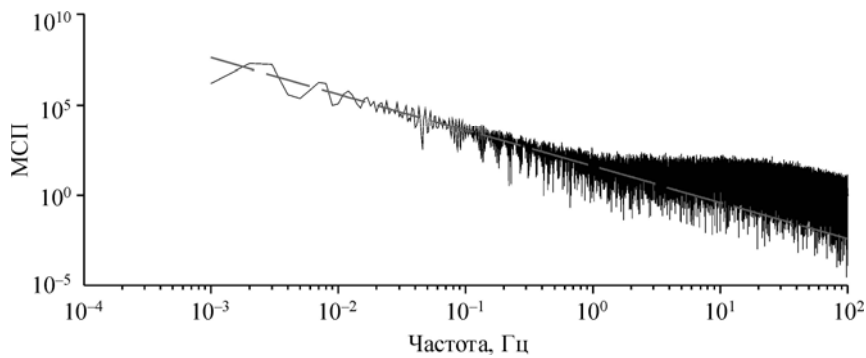


Рис. 12. Мощность спектральной плотности  $\Delta T_s$  при  $\beta = 0$ ,  $\sigma = 0,25$  в реальном времени.

$$\text{МСП} = 0,03/f^2.$$

из соотношения (15) при  $\delta = d/4$ , где  $d$  — диаметр платиновой проволоочки, а коэффициенты  $a$  и  $b$  рассчитываются по формулам (2). В результате получим

$$a = 267,5 \text{ Вт}/(\text{м}^2(\text{°C})^3), \quad b = 1279 \text{ Вт}/(\text{м}^2(\text{°C})^2), \quad \chi = 141,5/c.$$

При вычислениях принималось  $\alpha = 100$ . Тогда при шаге интегрирования  $\Delta \tau = 0,001$  шаг интегрирования в реальном времени составит  $10^{-5}$  с. Расчет для периода времени  $T = 1000$  с при длине временного ряда  $10^8$  дает результат МСП, представленный на рис. 12. Поскольку электрическое сопротивление платины линейно зависит от температуры, то флуктуации температуры платинового нагревателя и транспортного тока в нем должны быть эквивалентны. Сравнивая кривую на рис. 12 и кривую 2 на рис. 5 в работе [3], можно утверждать, что получено хорошее соответствие экспериментальных и теоретических данных.

### Заключение

При тепловых потоках, близких к критическим, в кипящих системах возникает неустойчивость. Точное описание поведения таких систем невозможно, поскольку совокупность основных положений и принципов, лежащих в основе методов исследований, свойственных детерминистским системам (детерминистская парадигма), неверна. В настоящей работе исследования проведены в рамках новой концепции, связанной с изучением нелинейных систем и процессов вдали от термодинамического равновесия. Согласно этой концепции, среди переменных в системе имеется одна, наиболее неустойчивая, называемая параметром порядка. В качестве параметра порядка в процессах кипения выступает перегрев теплоотдающей поверхности выше температуры насыщения. В этих процессах использование кривой кипения дает возможность связать энергетический показатель системы — отводимую мощность — с параметром порядка и получить объективный показатель достижения предельно допустимой тепловой нагрузки на поверхности тепловыделяющего элемента.

В работе показано, что под воздействием малых возмущений кипящая система переходит из одного метастабильного состояния в другое, то есть возникает состояние самоорганизованной критичности, которое имеет наглядное изображение в виде  $1/f$ -шума в мощности спектральной плотности рассматриваемого параметра. Таким образом, фликкер-шум выступает как объективный показатель критичности. Это дает основание утверждать, что для контроля критических условий и совершенствования полуэмпирических соотношений для предельных тепловых нагрузок в процессах теплопередачи в энергонапряженных технических устройствах целесообразно использовать возможности фликкер-шумовой спектроскопии.

### Список литературы

1. Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. 1/f-шум при неравновесном фазовом переходе. Эксперимент и математическая модель // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1998. Т. 113, № 5. С. 1748–1757.
2. Скоков В.Н., Коверда В.П. Фликкер-шум при переходе к кризисному режиму кипения на нелинейном нагревателе // Теплофизика высоких температур. 2000. Т. 38, вып. 2. С. 268–273.
3. Скоков А.В., Решетников В.П., Коверда В.П. Самоорганизация критических флуктуаций и 1/f-спектры в кризисных режимах кипения // Теплофизика высоких температур. 2000. Т. 38, № 5. С. 787–783.
4. Виноградов А.В. Динамика флуктуаций в кризисных и переходных режимах кипения: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2005. 138 с.
5. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Атомиздат, 1974. 470 с.
6. Ковалев С.А., Усатилов С.В. Оценка устойчивости режимов кипения с помощью функционала Ляпунова // Теплофизика высоких температур. 1991. Т. 29, № 4. С. 730–737.
7. Nukiyama S. The maximum and minimum values of the heat  $Q$  transmitted from metal to boiling water under atmospheric pressure // Int. J. Heat Transfer. 1966. Vol. 9. P. 1419–1433.
8. Ягов В.В. Теплообмен в однофазных средах и при фазовых превращениях [Электронный ресурс]: уч. пособие для вузов. М.: Изд. Дом МЭН, 2014. 542 с.
9. Анохина Е.В. Влияние материала поверхности нагрева на кривую кипения жидкостей // Журнал технической физики. 2009. Т. 79, вып. 9. С. 20–25.
10. Unger E.K., Eichhorn R. Transition boiling curves in saturated pool boiling from horizontal cylinder // Int. J. Heat Transfer. 1996. Vol. 118, No. 3. С. 654–661.
11. Chai L.H., Shoji M. Boiling curves — bifurcation and catastrophe // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2001. Vol. 44, No. 21. P. 4175–4179.
12. Постон Т., Стюарт Й. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 487 с.
13. Лабунцов Д.А. Приближенная теория теплообмена при развитом пузырьковом кипении // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1963. № 1. С. 58–64.
14. Хакен Г. Синергетика. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 324 с.
15. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 345 с.
16. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1961. 331 с.
17. Ito K. On stochastic differential equations // American Mathematical Society. 1951. 360 p.
18. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J. of Physics, A: Math. Gen. 1981. Vol. 14. P. L453–L461.
19. Любу Ю.Д. Методы и алгоритмы финансовой математики. Пер. с англ. М.: Бином, 2014. 754 с.

*Статья поступила в редакцию 16 января 2017 г.,  
после доработки — 7 июля 2017 г.*