УДК 532. 529.591

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ. ВЫВОД ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

А. А. Луговцов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: lugovtsov.anton@gmail.com

Выведены уравнения, описывающие распространение волн малой конечной амплитуды в жидкости с пузырьками газа при условии, что плотность распределения пузырьков является непрерывной функцией размера пузырька и пространственных координат. Установлено, что при однородном распределении пузырьков полученные уравнения переходят в уравнения Кортевега — де Фриза, Кадомцева — Петвиашвили и Хохлова — Заболотской.

Ключевые слова: пузырьковая жидкость, неоднородная среда, непрерывное распределение, волновое уравнение.

Введение. Экспериментальные и численные исследования волновых процессов в полифазных средах существенно затруднены, что в значительной мере обусловлено большим количеством характеристических параметров. Точные и приближенные решения, включающие параметры задачи в явном виде, могут использоваться как для анализа экспериментальных данных, так и в качестве тестов при численных расчетах. Обзор теоретических и экспериментальных работ по волновой механике многофазных сред и библиография к ним приведены в [1, 2]. Исследуемая в данной работе исходная система уравнений движения жидкости, содержащей пузырьки газа, представляет собой односкоростную модель Иорданского [3]. Обоснованность замены уравнения сохранения энергии на уравнение Рэлея для описания пульсаций одного пузырька показана в [4]. Способ учета плотности распределения пузырьков как непрерывной функции размера пузырька описан в [5, 6]. В настоящей работе выведены нелинейные волновые уравнения с учетом зависимости плотности распределения пузырьков газа по размерам от пространственных координат. В рамках приближения Кортевега — де Фриза получены уравнения для одномерных и слабонеодномерных нелинейных волн.

1. Формулировка задачи. Исходную систему уравнений движения жидкости, содержащей пузырьки газа, запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\,[(1-\varphi)\rho] + \frac{\partial}{\partial x_k}\,[(1-\varphi)\rho u_k] = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,[(1-\varphi)\rho u_i] + \frac{\partial}{\partial x_k}\,[p\delta_{ik} + (1-\varphi)\rho u_i u_k] = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,N + \frac{\partial}{\partial x_k}\,(N u_k) = 0; \tag{3}$$

$$R\,\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\Big(\frac{dR}{dt}\Big)^2+\frac{4\nu}{R}\,\frac{dR}{dt}=\frac{1}{\rho_*}\Big[\Big(p_*+\frac{2\sigma}{R_*}\Big)\Big(\frac{R_*}{R}\Big)^{3\gamma}-\frac{2\sigma}{R}-p\Big],$$
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}; \tag{4}$$

$$\varphi=\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty N(R_*,t,x,y,z)\,dR_*; \tag{5}$$

$$\rho=\rho_*\Big(1+n\,\frac{p-p_*}{\rho_* c_{1*}^2}\Big)^{1/n}, \tag{6}$$

где t — время; x, y, z — пространственные координаты; $\rho(t,x,y,z)$ — плотность жидкости; $p(t,x,y,z)$ — давление; $\boldsymbol{u}(t,x,y,z)$ — скорость; c_{1*} — скорость звука в жидкости; σ — поверхностное натяжение; значение показателя n зависит от свойств жидкости (для воды $n\simeq 7{,}5$); $R(R_*,t,x,y,z)$ — текущий радиус пузырька; R_* — невозмущенный радиус пузырьков “R_*-фракции”; $N(R_*,t,x,y,z)$ — плотность функции распределения пузырьков по радиусу; $N(R_*,t,x,y,z)\,dR_*$ — число пузырьков “R_*-фракции” в единице объема смеси; ν — кинематическая вязкость жидкости; φ — объемная концентрация газа; γ — показатель адиабаты для газа в пузырьках. Уравнения сохранения количества и пульсаций пузырьков связаны функциями, зависящими от дополнительной переменной R_*, однако в остальные уравнения эти функции входят только под знаком интеграла по этой переменной. (Заметим, что при интегрировании трудностей не возникает.) Исходная система уравнений (1)–(6) записана в линейном приближении по φ, т. е. параметр φ полагается достаточно малым. Степень малости φ должна обеспечивать не только линейность уравнений движений по φ, но и справедливость уравнения Рэлея (4), описывающего радиальные пульсации пузырька с невозмущенным радиусом R_* под действием давления $p(t,x,y,z)$. Это имеет место при выполнении соотношения

$$R\ll d\sim N_0^{-1/3},\qquad N_0=\int\limits_0^\infty N(R_*,t,x,y,z)\,dR_*,$$

где d — среднее расстояние между пузырьками; N_0 — полное число пузырьков в единице объема смеси. При значениях R_*, меньших минимального и больших максимального радиусов пузырьков, присутствующих в смеси, функция $N(R_*,t,x,y,z)$ должна соответствовать условию быстрого убывания. Вследствие малости φ массой газа в пузырьках можно пренебречь, поэтому плотность газожидкостной смеси равна

$$\rho_0=\rho(1-\varphi).$$

Кроме того, исходная система уравнений получена для случая “вмороженности” пузырьков, т. е. без учета их относительного движения. Для вывода приближенного уравнения, описывающего распространение слабонелинейных волн, в исходную систему уравнений необходимо ввести в явном виде некоторый малый параметр $\varepsilon\ll 1$. В качестве такого параметра можно принять, например, отношение максимальной скорости в волне к равновесной скорости звука, отношение максимальной пульсации давления к невозмущенному давлению и др. Соотношения между порядками величин неизвестных функций и их производных по независимым переменным можно найти из какого-либо точного решения упрощенной исходной системы уравнений либо из общих соображений относительно порядков величин нелинейных и дисперсионных членов искомого приближенного уравнения.

Рассмотрим решение системы (1)–(6) относительно функций u, p, N, R в виде плоской стационарной волны, распространяющейся с постоянной скоростью V в идеальной несжимаемой жидкости с пузырьками газа одного размера:

$$F = F(x - Vt), \tag{7}$$

удовлетворяющее условиям

$$|x - Vt| \to \infty: \quad u \to 0, \quad p \to p_*, \quad N \to N_*, \quad R \to R_*. \tag{8}$$

Подставляя соотношения (7), (8) в (1)–(3) и интегрируя полученные уравнения, находим

$$-V(1-\varphi) + u(1-\varphi) = -V(1-\varphi_*); \tag{9}$$

$$-V(1-\varphi)u + (1-\varphi)u^2 + p/\rho = p_*/\rho_*; \tag{10}$$

$$-VN + uN = -VN_*. \tag{11}$$

Положив $u \sim \varepsilon u'$, из (9)–(11) имеем

$$p - p_* \sim \varepsilon p', \quad N - N_* \sim \varepsilon N', \quad R - R_* \sim \varepsilon R', \quad V - c_* \sim \varepsilon V'. \tag{12}$$

Выражение (12) можно записать в виде

$$\begin{gathered} u = \varepsilon u', \qquad p = p_* + \varepsilon p', \qquad N = N_* + \varepsilon N', \\ R = R_* + \varepsilon R', \qquad V = c_* + \varepsilon V', \end{gathered} \tag{13}$$

где c_* — скорость звука. Подставляя соотношения (7), (13) в (4) и проводя несложные вычисления, получаем следующую оценку величины производных искомых функций:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial x} \sim \varepsilon^{1/2}. \tag{14}$$

Из последнего соотношения в (13) следует, что производная по времени в системе координат, движущейся со скоростью звука c_*, является величиной порядка $\varepsilon^{3/2}$. Таким образом, при выбранных порядках (13), (14) получаем уравнение

$$u_\tau + uu_\eta + u_{\eta\eta\eta} = 0,$$

где $\eta = x - c_* t$; $\tau = \varepsilon^{3/2} t$, а все члены — одного порядка малости $\varepsilon^{5/2}$. Будем полагать, что наличие в исходной системе уравнений малых вязкости, сжимаемости, неодномерности волн и т. д. существенно не влияет на выбранный порядок величин.

Определим невозмущенную плотность функции распределения пузырьков по размерам как слабо зависящую от пространственных координат:

$$N_*(R_*, x, y, z) = N_*(R_*, \varepsilon^{3/2} x) + \varepsilon n_*(R_*, \varepsilon^{3/2} x, \varepsilon y, \varepsilon z). \tag{15}$$

Отсюда следует, что характерная длина неоднородности распределения пузырьков по координатам много больше длины волны рассматриваемого возмущения.

2. Вывод приближенных уравнений. Для принятых порядков величин (13), (14) искомые функции можно записать в виде

$$\begin{gathered} p = p_*(1 + \varepsilon p'), \qquad u = \varepsilon c_* u', \qquad v = \varepsilon^{3/2} c_* v', \\ w = \varepsilon^{3/2} c_* w', \qquad N = N_*(1 + \varepsilon N'), \qquad R = R_*(1 + \varepsilon R'), \end{gathered} \tag{16}$$

где u', v', w' — безразмерные составляющие скорости по осям координат; N_* задается формулой (15). Безразмерные независимые координаты представим в виде

$$x = \varepsilon^{-1/2} L x', \quad y = \varepsilon^{-1} L y', \quad z = \varepsilon^{-1} L z, \quad t = \varepsilon^{-1/2} (L/c_*) t', \quad \nu = \varepsilon^{1/2} \nu_*; \tag{17}$$

$$\eta = \int\limits_{x'_0}^{x'} \frac{d\tau}{c(\tau)} - t', \qquad \tau = \varepsilon x'. \tag{18}$$

Безразмерные функции p', u', v', w', N', R' зависят от безразмерных переменных τ, η, y', z'. Выражение для η в (18) означает переход в систему координат, движущуюся в положительном направлении оси x с переменной скоростью $c_* c(\tau)$, которая определяется при выводе приближенных уравнений. С учетом (15) и выражения для η в (18) замена $\tau = \varepsilon t'$ на $\tau = \varepsilon x'$ представляется логичной. Константа L в (17) является характерным размером рассматриваемого возмущения, например эффективной шириной импульса или длиной волны периодического сигнала. Как сказано выше, константа L должна быть много больше среднего расстояния между пузырьками в жидкости.

Для упрощения дальнейших вычислений введем новые обозначения. Уравнение (6) запишем в виде

$$\rho = \rho_* [1 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + O(\varepsilon^3)], \qquad \rho_1 = \frac{p}{n}, \qquad \rho_2 = -\frac{n-1}{2} \frac{p^2}{n^2} \tag{19}$$

($c_{1*}^2 = n p_* / \rho_*$). Уравнение (5) представим в виде

$$\varphi = \varphi_* + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + O(\varepsilon^3), \tag{20}$$

где

$$\varphi_*(\tau) = \frac{4\pi}{3} \int\limits_0^\infty N_*(R_*, \tau) R_*^3 \, dR_*; \tag{21}$$

$$\varphi_1(\tau, y, z) = \frac{4\pi}{3} \int\limits_0^\infty N_*(R_*, \tau) R_*^3 [N(\tau, \eta, y, z) + 3R(\tau, \eta, y, z)] \, dR_* + \varphi_{**}(\tau, y, z); \tag{22}$$

$$\varphi_2(\tau, y, z) = \frac{4\pi}{3} \int\limits_0^\infty N_*(R_*, \tau) [3N(\tau, \eta, y, z) R(\tau, \eta, y, z) + 3R^2(\tau, \eta, y, z)] \, dR_* + {}$$
$$+ \frac{4\pi}{3} \int\limits_0^\infty n_*(R_*, \tau, y, z) R_*^3 [N(\tau, \eta, y, z) + 3R(\tau, \eta, y, z)] \, dR_*; \tag{23}$$

$$\varphi_{**}(\tau, y, z) = \frac{4\pi}{3} \int\limits_0^\infty n_*(R_*, \tau, y, z) R_*^3 \, dR_*. \tag{24}$$

Используя соотношения (21)–(24), получаем

$$(1 - \varphi)\rho = \rho_* [1 - \varphi_* + \varepsilon a + \varepsilon^2 b + O(\varepsilon^3)], \tag{25}$$

где

$$a = (1 - \varphi_*) \rho_1 - \varphi_1, \qquad b = (1 - \varphi_*) \rho_2 - \varphi_2 - \rho_2 \varphi_1. \tag{26}$$

Из (18) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\varepsilon^{1/2}\,\frac{c_*}{L}\,\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2}\,\frac{1}{c(\tau)L}\,\frac{\partial}{\partial \eta} + \tau^{3/2}\frac{1}{L}\,\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

С учетом (16)–(26) исходная система уравнений (1)–(6) принимает вид

$$\varepsilon^{3/2}\Big[\frac{1-\varphi_*(\tau)}{c(\tau)}\,u_\eta - a_\eta\Big] + \varepsilon^{5/2}\hat{l}_1 = O(\varepsilon^{7/2}), \tag{27}$$

где $\hat{l}_1$ — оператор:

$$\hat{l}_1 = [(1-\varphi_*)u]_\tau + \frac{1}{c(\tau)}\,(au)_\eta - b_\eta + (1-\varphi_*)\Big(\frac{k}{\tau}\,u + v_y + w_z\Big) \tag{28}$$

(индексы τ, η, y, z обозначают частные производные по соответствующей переменной).

Уравнения сохранения импульса (2) представим в виде

$$\varepsilon^{3/2}\Big[\frac{p_*}{c(\tau)}\,p_\eta - (1-\varphi_*)\rho_* c_*^2 u_\eta\Big] + \varepsilon^{5/2}\hat{l}_2 = O(\varepsilon^{7/2}); \tag{29}$$

$$\varepsilon^2[p_* p_y - (1-\varphi_*)\rho_* c_*^2 v_\eta] = O(\varepsilon^3); \tag{30}$$

$$\varepsilon^2[p_* p_z - (1-\varphi_*)\rho_* c_*^2 w_\eta] = O(\varepsilon^3). \tag{31}$$

Здесь

$$\hat{l}_2 = p_* p_\tau + \frac{(1-\varphi_*)\rho_* c_*^2}{c(\tau)}\,(u^2)_\eta - \rho_* c_*^2 (au)_\eta + \frac{\nu_*[1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*}{L^2}\,u_{\eta\eta}. \tag{32}$$

Уравнение (3) имеет вид

$$\varepsilon^{3/2}\Big[\frac{N_*}{c(\tau)}\,u_\eta - N_* N_\eta\Big] + \varepsilon^{5/2}\hat{l}_3 = O(\varepsilon^{7/2}), \tag{33}$$

где

$$\hat{l}_3 = \frac{N_*}{c(\tau)}\,(Nu)_\eta + \frac{k}{\tau}\,N_* u + (N_* u)_\tau + N_*(v_y + w_z). \tag{34}$$

Уравнение пульсаций пузырьков (4) запишем в форме

$$\varepsilon(p_* p + \theta_1 R) + \varepsilon^2 \hat{l}_4 = O(\varepsilon^3), \tag{35}$$

где

$$\hat{l}_4 = \frac{\rho_* c_*^2 R_*^2}{L^2}\,R_{\eta\eta} - \theta_2 R^2 - \frac{4\nu_*\rho_* c_*}{L}\,R_\eta; \tag{36}$$

$$\theta_1 = 3\gamma p_* + (3\gamma - 1)\,\frac{2\sigma}{R_*}, \qquad \theta_2 = \Big(p_* + \frac{2\sigma}{R_*}\Big)\frac{3\gamma(2\gamma+1)}{2} - \frac{2\sigma}{R_*}. \tag{37}$$

В представленном виде уравнения (27)–(36) можно использовать для решения задач о распространении как одномерных волн, так и неодномерных. Для одномерного случая в этих уравнениях необходимо положить

$$v = w = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0, \qquad n_* = 0.$$

При этом для плоских, цилиндрических и сферических волн $k = 0, 1, 2$ соответственно. В случае неодномерных волн

$$k = 0, \quad v, \quad w, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad n_* \neq 0.$$

В представленной записи исходной системы уравнений малый параметр ε присутствует в уравнениях в явном виде. Это позволяет искать неизвестные функции u, v, w, p, N, R путем формального разложения их в ряды по степеням малого параметра ε:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\tau, \eta, y, z)\varepsilon^k.$$

В нулевом приближении выражения при наименьшей степени ε в уравнениях (27), (29), (33), (35) необходимо приравнять к нулю:

$$\frac{1-\varphi_*(\tau)}{c(\tau)}\, u_{0\eta} - [1-\varphi_*(\tau)]\, \frac{p_*}{\rho_* c_{1*}^2} p_{0\eta} + \frac{4\pi}{3} \int\limits_0^\infty N_*(R_*, \tau) R_*^3 (N_{9\eta} + 3R_{0\eta})\, dR_* = 0; \tag{38}$$

$$\frac{p_*}{c(\tau)}\, p_{0\eta} - [1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 u_{0\eta} = 0; \tag{39}$$

$$\frac{1}{c(\tau)}\, u_{0\eta} - N_{0\eta} = 0; \tag{40}$$

$$p_* p_0 + \theta_1 R_0 = 0. \tag{41}$$

Из уравнений (39)–(41) имеем

$$N_0 = \frac{1}{c(\tau)}\, u_0, \quad p_0 = \frac{[1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 c(\tau)}{p_*}\, u_0, \quad R_0 = -\frac{[1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 c(\tau)}{\theta_1}\, u_0. \tag{42}$$

Подставляя формулы (42) в (38), получаем

$$\Big\{\frac{1}{c(\tau)} - \frac{[1-\varphi_*(\tau)]^2 \rho_* c_*^2 c(\tau)}{\rho_* c_{1*}^2} - 4\pi[1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 c(\tau) \int\limits_0^\infty \frac{N_*(R_*, \tau) R_*^3\, dR_*}{\theta_1}\Big\} u_0 = 0. \tag{43}$$

Из соотношения (6) следует, что $c_{1*}^2 = np_*/\rho_*$. Уравнение (43) означает, что для существования ненулевого решения для функции u_0 выражение в фигурных скобках должно обращаться в нуль. Тот же результат можно получить другим путем. Проинтегрировав уравнения (38)–(40) и добавив к ним уравнение (41), получаем линейную алгебраическую систему уравнений для четырех неизвестных функций u_0, p_0, N_0, R_0. Для существования нетривиального решения такой однородной системы необходимо, чтобы ее определитель обращался в нуль, что приводит к уже полученному результату. Условие обращения в нуль выражения в фигурных скобках в (43) запишем в виде

$$[1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 c^2(\tau) = np_*\theta_0(\tau), \tag{44}$$

где

$$\theta_0 = \frac{1}{1-\varphi_*(\tau) + np_* I_1}; \tag{45}$$

$$I_1 = 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{N_*(R_*, \tau) R_*^3\, dR_*}{\theta_1}, \tag{46}$$

величина θ_1 определяется формулой (37). С учетом (45) нулевое решение представим в виде

$$N_0 = \frac{u_0}{c(\tau)}, \qquad p_0 = n\theta_0(\tau)\, \frac{u_0}{c(\tau)}, \qquad R_0 = -\frac{n\theta_0(\tau) p_*}{\theta_1}\, \frac{u_0}{c(\tau)}. \tag{47}$$

Формула (44) определяет скорость $c_*c(\tau)$ движения выбранной в соотношении (16) системы координат (ранее эта скорость была неопределенной). Функция u_0 в нулевом приближении остается произвольной. Для того чтобы получить уравнение для функции u_0, необходимо рассмотреть первое приближение. Уравнения (27), (29), (30), (31), (33), (35) в первом приближении имеют вид

$$\frac{1-\varphi_*(\tau)}{c(\tau)}\,u_{1\eta} - [1-\varphi_*(\tau)]\,\frac{p_*}{\rho_* c_{1*}^2}\,p_{1\eta} + {}$$
$$+ \frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty N_*(R_*,\tau)R_*^3(N_{1\eta}+3R_{1\eta})\,dR_* + \hat{l}_1(u_0) = 0; \qquad (48)$$

$$\frac{p_*}{c(\tau)}\,p_{1\eta} - [1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 u_{1\eta} + \hat{l}_2(u_0) = 0,$$
$$\frac{N_*(R_*,\tau)}{c(\tau)}\,u_{1\eta} - N_*(R_*,\tau)N_{1\eta} + \hat{l}_3(u_0) = 0, \qquad (49)$$
$$p_*p_1 + \theta_1 R_1 + \hat{l}_4(u_0) = 0;$$

$$p_*p_{0y} - [1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 v_{0\eta} = 0, \qquad p_*p_{0z} - [1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 w_{0\eta} = 0. \qquad (50)$$

Из уравнений (49) находим

$$p_{1\eta} = \frac{[1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 c(\tau)}{p_*}\,u_{1\eta} - \frac{c(\tau)}{p_*}\,\hat{l}_2(u_0),$$
$$N_{1\eta} = \frac{1}{c(\tau)}\,u_{1\eta} + \frac{1}{N_*}\,\hat{l}_3(u_0), \qquad (51)$$
$$R_{1\eta} = \frac{[1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 c(\tau)}{\theta_1}\,u_{1\eta} + \frac{c(\tau)}{\theta_1}\,\hat{l}_2(u_0) - \frac{1}{\theta_1}\,[\hat{l}_4]_\eta$$

($\hat{l}_i(u_0)$ определяются формулами (28), (32), (34), (36) с учетом (47)).

Подставляя соотношения (51) в уравнение (48), получаем

$$\Big\{\frac{1}{c(\tau)} - \frac{[1-\varphi_*(\tau)]^2\rho_* c_*^2 c(\tau)}{\rho_* c_{1*}^2} - 4\pi[1-\varphi_*(\tau)]\rho_* c_*^2 c(\tau)\int\limits_0^\infty \frac{N_*(R_*,\tau)R_*^3\,dR_*}{\theta_1}\Big\}u_{1\eta} + {}$$
$$+ \hat{l}_1(u_0) + \frac{\hat{l}_2(u_0)}{1-\varphi_*(\tau)}\,\rho_* c_*^2 c(\tau) + \frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty R_*^3\hat{l}_3(u_0)\,dR_* - {}$$
$$- 4\pi\int\limits_0^\infty \frac{N_*(R_*,\tau)R_*^3[\hat{l}_4(u_0)]_\eta\,dR_*}{\theta_1} = 0. \qquad (52)$$

Из уравнений (42), (43) следует, что в (52) выражение в фигурных скобках равно нулю, а остальная часть уравнения (52) и уравнения (50) представляют собой систему уравнений для определения величин u_0, v_0, w_0. С учетом соотношений (27), (29), (33), (35), (43)–(50) эту систему уравнений запишем в виде

$$u_{0\tau} - c_1(\tau,y,z)u_{0\eta} + \alpha(\tau)u_0u_{0\eta} + \beta(\tau)u_{0\eta\eta\eta} - \mu(\tau)u_{0\eta\eta} + \\ + [k/(2\tau) + \delta(\tau)]u_0 + (v_{0y} + w_{0z})/2 = 0; \qquad (53)$$

$$v_{0\eta} = c(\tau)u_{0y}, \qquad w_{0\eta} = c(\tau)u_{0z}, \qquad (54)$$

где

$$c_1(\tau,y,z) = \frac{1}{2c(\tau)}\Big(np_*\theta_0(\tau)I_{1*}(\tau,y,z) - \frac{\varphi_{**}(\tau,y,z)}{1-\varphi_*(\tau)}\Big),$$
$$\alpha(\tau) = \frac{\theta_0^2(\tau)}{c^2(\tau)}\Big(\frac{n+1}{2}\,[1-\varphi_*(\tau)] + n^2p_*^2(I_2+I_3)\Big),$$
$$\beta(\tau) = \frac{n^2p_*^2\theta_0^2(\tau)}{2c^3(\tau)[1-\varphi_*(\tau)]L^2}\,I_4, \qquad \mu(\tau) = \frac{2\nu_*n^2p_*^2\theta_0^2(\tau)}{c^3(\tau)[1-\varphi_{*2}(\tau)]Lc_*}\,I_2, \qquad (55)$$
$$\delta(\tau) = \frac{1}{2[1-\varphi_*(\tau)]c(\tau)}\,\{[1-\varphi_*(\tau)]c(\tau)\}_\tau;$$

$$I_{1*}(\tau,y,z) = 4\pi\int_0^\infty \frac{n_*(R_*,\tau,y,z)R_*^3\,dR_*}{\theta_1}, \qquad I_2(\tau) = 4\pi\int_0^\infty \frac{N_*(R_*,\tau)R_*^3\,dR_*}{\theta_1^2},$$

$$I_3(\tau) = 4\pi\int_0^\infty \frac{N_*(R_*,\tau)R_*^3\theta_2\,dR_*}{\theta_1^3}, \qquad I_4(\tau) = 4\pi\int_0^\infty \frac{N_*(R_*,\tau)R_*^5\,dR_*}{\theta_1^2}.$$

Для одномерных волн $c_1 = v_0 = w_0 = 0$; для плоских, цилиндрических и сферических волн $k = 1, 2, 3$ соответственно. В случае неодномерных волн $k = 0$.

Система уравнений (53), (54) является искомой приближенной системой для описания распространения нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде. Как сказано выше, при описании распространения одномерных нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде система уравнений (53), (54) сводится к одному уравнению для u (индекс 0 опускается):

$$u_\tau - c_1(\tau)u_\eta + \alpha(\tau)uu_\eta + \beta(\tau)u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau)u_{\eta\eta} + [k/(2\tau) + \delta(\tau)]u = 0 \qquad (56)$$

($c_1(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\mu(\tau)$, $\delta(\tau)$ определены в (55); $k = 0, 1, 2$ для плоских, цилиндрических и сферических волн соответственно). Для одномерных волн в случае переменных коэффициентов законы сохранения импульса и энергии при $\mu(\tau) = 0, u(\tau,\eta) \to 0$ для $|\eta| \to \infty$ имеют вид

$$[1-\varphi_*(\tau)]\tau^k c(\tau)\int_{-\infty}^\infty u(\tau,\eta)\,d\eta = C_1 + O(\varepsilon); \qquad (57)$$

$$[1-\varphi_*(\tau)]\tau^k c(\tau)\int_{-\infty}^\infty u^2(\tau,\eta)\,d\eta = C_2 + O(\varepsilon). \qquad (58)$$

Нетрудно показать, что при нулевой вязкости закон сохранения энергии (58) выполняется для любого точного решения уравнения (56). Для выполнения закона сохранения импульса (57) в случае, когда $\delta(\tau) \neq 0$, достаточно, чтобы в начальный момент времени выполнялось условие $C_1 = 0$, поскольку из уравнения (56) следует, что условие равенства импульса нулю справедливо для любого последующего момента времени. В случае если $N_*(R_*, \tau) = N_*(R_*)$, т. е. плотность функции распределения пузырьков по размерам одинакова во всех точках пространства, коэффициенты α, β, μ являются константами, $\delta = 0$ и уравнение (56) превращается в классическое уравнение Кортевега — де Фриза — Бюргерса:

$$u_\tau + \alpha u u_\eta + \beta u_{\eta\eta\eta} - \mu u_{\eta\eta} + ku/(2\tau) = 0.$$

При $k = 0$ из соотношений (53), (54) получаем систему уравнений, описывающую распространение нелинейных неодномерных волн (индекс 0 опускается):

$$\begin{gathered} u_\tau + \alpha(\tau) u u_\eta + \beta(\tau) u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau) u_{\eta\eta} + \delta(\tau) u - c_1(\tau, y, z) u_\eta + (v_y + w_z)/2 = 0, \\ v_\eta = c(\tau) u_y, \qquad w_\eta = c(\tau) u_z. \end{gathered} \tag{59}$$

Исключая функции v, w из соотношений (59), для u получаем уравнение

$$[u_\tau + \alpha(\tau) u u_\eta + \beta(\tau) u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau) u_{\eta\eta} + \delta(\tau) u - c_1(\tau, y, z) u_\eta]_\eta + c(\tau)(u_{yy} + u_{zz})/2 = 0. \tag{60}$$

Впервые уравнение, аналогичное уравнению (60), получено в работе [7] для поверхностных волн в водоеме конечной глубины ($c(\tau) = 1$, $\mu(\tau) = \delta(\tau) = 0$; α, β — константы). Позднее это уравнение (для $c_1 = 0$) стало известно как уравнение Кадомцева — Петвиашвили. Если из уравнения (60) исключить дисперсионный член, то оно превращается в известное уравнение Хохлова — Заболотской, выведенное для описания распространения нелинейных звуковых пучков в вязкой жидкости. Как и в случае одномерных волн, к уравнению (60) добавим законы сохранения импульса и энергии. Для $\mu = 0$, $u \to 0$ при $|\eta| \to \infty$, $|y| \to \infty$, $|z| \to \infty$ законы сохранения имеют вид

$$[1 - \varphi_*(\tau)] \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau, \eta, y, z)\, d\eta\, dy\, dz = C_1 + O(\varepsilon),$$

$$[1 - \varphi_*(\tau)] \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau, \eta, y, z)\, d\eta\, dy\, dz = C_2 + O(\varepsilon),$$

где C_1, C_2 — константы. Уравнение, описывающее распространение сигнала, излученного осесимметричным источником, имеет вид

$$[u_\tau + \alpha(\tau) u u_\eta + \beta(\tau) u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau) u_{\eta\eta} + \delta(\tau) u - c_1(\tau, r) u_\eta]_\eta + c(\tau)(u_{rr} + u_r/r)/2 = 0.$$

В этом случае для $\mu = 0$, $u \to 0$ при $|\eta| \to \infty$, $r \to \infty$ законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$[1 - \varphi_*(\tau)] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} u(\tau, \eta, r) r\, dr\, d\eta = C_1 + O(\varepsilon),$$

$$[1 - \varphi_*(\tau)] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} u^2(\tau, \eta, r) r\, dr\, d\eta = C_2 + O(\varepsilon).$$

3. Выводы. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Порядки величин неизвестных функций и степени растяжений независимых координат выбираются таким образом, чтобы при наименьшей степени малого параметра ε остались только линейные интегрируемые уравнения, что приводит к линейной однородной алгебраической системе относительно неизвестных функций и позволяет определить скорость системы координат, оставляя произвольной одну из неизвестных функций. Именно поэтому члены, пропорциональные k/τ в уравнениях (27), (33), можно считать членами с порядком малости $\varepsilon^{5/2}$. Это позволяет получить нелинейное уравнение (53) при формальном разложении неизвестных функций в ряды по степеням малого параметра, что, как правило, приводит к последовательности только линейных уравнений.

Выбранный порядок малости членов, пропорциональных k/τ, означает, что в случае одномерных цилиндрических и сферических волн уравнение (53) справедливо лишь на достаточно больших расстояниях от начала координат, т. е. при $\tau_0 \geqslant \varepsilon^{3/2}$. На меньших расстояниях наряду с волнами, распространяющимися в положительном направлении, существенный вклад вносят волны противоположного направления, т. е. выделение волн одного направления на таких расстояниях некорректно.

Порядок $\varepsilon^{3/2}$ малости $\partial/\partial\tau$ обеспечивает исключение члена $\delta(\tau)u$ из системы уравнений при наименьшей степени ε, что позволяет интегрировать эту систему. В плоском случае, в отличие от цилиндрического и сферического случаев, ограничение на τ_0 отсутствует, поскольку для требуемой малости соответствующих членов уравнений (27), (33) достаточно малости производной по τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кутателадзе С. С.** Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах / С. С. Кутателадзе, В. Е. Накоряков. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
2. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 2.
3. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.
4. **Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И.** Структура ударных волн в газожидкостной среде с нелинейным уравнением состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 62. С. 75–92.
5. **Гаврилюк С. Л.** Асимптотика решения задачи Коши для уравнений распространения линейных волн в пузырьковой жидкости с непрерывным распределением пузырьков по размерам. Новосибирск, 1990. (Препр. / СО АН СССР. Ин-т гидродинамики; № 1).
6. **Gavrilyuk S. L., Teshukov V. M.** Kinetic model for the motion of compressible bubbles in a perfect fluid // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 459–491.
7. **Луговцов А. А., Луговцов Б. А.** Исследование осесимметричных длинных волн в приближении КДВ // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 1. С. 195–206.

Поступила в редакцию 13/X 2006 г.,
в окончательном варианте — 28/I 2008 г.