

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.838

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ ЭКСЦЕНТРИЧНОГО ДИПОЛЯ
ПУТЕМ СРАВНЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ПОЛЕЙ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ЗЕМЛИ

А.В. Ладынин, А.А. Попова

Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Россия

Построены формулы для вычисления компонент поля эксцентричного диполя (ЭД) с произвольным направлением оси по заданным координатам центра диполя, значению и направлению вектора магнитного момента. Эти формулы использованы для оптимизационного подбора дипольных параметров, соответствующих магнитному полю Земли. Функционалом качества подбора избрано стандартное отклонение поля диполя от поля Земли (IGRF) по компонентам X , Y , Z . Проведено разностороннее тестирование способа подбора.

По значениям компонент IGRF на поверхности Земли вычислены параметры ЭД и гармонические коэффициенты поля ЭД за 50 лет. Обнаружены и проанализированы изменения за это время параметров ЭД в сравнении с изменениями параметров эксцентричного диполя модели А. Шмидта (ЭДШ). Показано, что при уменьшении со временем дипольного поля увеличиваются недипольные компоненты геомагнитного поля. Центр диполя удаляется от центра масс Земли в Восточное и Северное полушария.

В разложении геомагнитного поля в ряд Гаусса дипольная часть поля влияет не только на 1-ю и 2-ю гармоники, а распространяется до 5-й гармоники; вес высоких гармоник со временем растет. Поэтому оценки параметров ЭДШ по первым 8 гармоническим коэффициентам ($n \leq 2$) имеют лишь относительное значение — для выявления их изменения. С другой стороны, мировые магнитные аномалии (ММА) проявляются в разложении Гаусса уже с 1-й, 2-й гармоник, а не с 3-й, как принято считать.

Геомагнитное поле, эксцентричный диполь, координаты центра диполя, осевой полюс, дип-полюс, гармонические коэффициенты дипольного поля, изменение параметров диполя за 50 лет.

OPTIMIZATION FITTING OF THE ECCENTRIC DIPOLE MODELS
TO THE OBSERVED GEOMAGNETIC FIELD

A.V. Ladynin and A.A. Popova

We have obtained formulas to calculate the field components of an eccentric dipole (ED) with an arbitrarily directed moment from specified coordinates of the dipole center and from its moment vector. With these formulas, the model dipole position was fitted to the observed geomagnetic field, and the approximation accuracy was estimated according to the standard deviation from IGRF along the X , Y , and Z components; the fitting procedure was checked in several tests.

We computed the ED parameters (position and moment orientation) and harmonic coefficients of the ED field for 50 years using surface IGRF components, discovered some changes, and compared them with those according to the Schmidt eccentric dipole model. It was found that the nondipolar contributions to the geomagnetic field increase as the dipole field decays with time, and the dipole center drifts north- and eastward away from the Earth's gravity center.

The main contribution of the dipole part in the Gaussian spherical harmonic expansion of the geomagnetic field turned out to come from the terms with n of 1 to 5 rather than from two first terms, and the contribution of higher harmonics increases with time. Therefore, the Schmidt ED approximation based on the first eight Gauss coefficients ($n \leq 2$) must have only relative significance indicating changes of the parameters. On the other hand, world magnetic anomalies (WMA) show up already in two first Gauss terms rather than since the third term as it has been commonly assumed.

Geomagnetic field, eccentric dipole, coordinates of dipole center, axial pole, dip pole, harmonic coefficients of dipole field, changes of ED position for 50 years

ВВЕДЕНИЕ

В работе [Ладынин и др., 2006а] приведены результаты сравнения значений скорости векового хода компонент D , I , T геомагнитного поля (ГМП) по данным 27 магнитных обсерваторий мира, объединенных

в 9 региональных групп, и данным моделей IGRF в точках земной поверхности с координатами этих обсерваторий. Обнаружены значительные различия, подтверждающие выводы ряда исследователей [Бенькова, Пушков, 1980; Barraclough, 1985; Lowes, 2000, 2003; и др.] о недостаточно высоком качестве моделей IGRF, основанных в последнее время преимущественно на спутниковых данных, для надежной оценки вековых вариаций ГМП. Главным результатом нашей работы было обнаружение по данным обсерваторий, в отличие от IGRF, короткопериодических (2—4 года) колебаний скорости векового хода наклонения; в изменениях T они проявлены менее четко, а в склонении не выявлены. В работе [Ладынин и др., 2006б] эти короткопериодические флуктуации были исследованы более полно — по результатам около 100 магнитных обсерваторий в разных регионах, континентах, полушариях за период 1985–2002 гг. Оказалось, что наиболее четко они выражены в изменении горизонтальной компоненты (H) геомагнитного поля. В этой работе проведен анализ выявленной периодичности и ее сравнение с данными за 100-летний период наблюдений по трем обсерваториям. На основе сходства амплитуд и периодов вариаций на разных континентах и полушариях высказано предположение об их связи с колебаниями оси эксцентричного диполя. Эти колебания могут быть вызваны изменениями режима конвективной циркуляции во внешнем ядре, ответственной за дипольное поле [Брагинский, 1978].

Для проверки этого предположения потребовалось вычислять магнитное поле эксцентричного диполя на земной поверхности в заданные моменты времени. Подходящих формул в литературе обнаружить не удалось. Обычно для оценки параметров диполя используются решения прямой задачи в форме сферических гармонических коэффициентов для заданных параметров диполя [Bartels, 1936; Калинин, 1963; James, Winch, 1967; Fraser-Smith, 1987]. В работе [Касьяненко и др., 2002] приводятся формулы для вычисления компонент поля эксцентричного диполя на земной поверхности. Но ими воспользоваться не удалось из-за разного рода ошибок в тексте; главное — эти формулы неверны в частных случаях центрального (осевого и неосевого) диполя, а указанная публикация не дает возможности проверки формул по способу их получения.

Мы построили необходимые формулы. Это сделало возможной оценку параметров эксцентричного диполя по пространственному распределению геомагнитного поля для любого времени, на которое имеются данные (IGRF). Упомянутое предположение о связи флуктуаций скорости векового хода с колебаниями оси эксцентричного диполя обсуждалось в устном сообщении на конференции, посвященной 100-летию Э.Э. Фотиади (Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, г. Новосибирск, 23 января 2007 г.) и является предметом статьи [Ладынин, Попова, 2008].

Ниже дан вывод формул для вычисления элементов магнитного поля эксцентричного диполя с произвольной ориентировкой вектора магнитного момента, чтобы ими мог воспользоваться (и проверить) любой специалист. Эти формулы использованы в качестве основы способа оптимизационного подбора параметров таких диполей, соответствующих магнитным полям Земли разных лет. Обоснован выбор вида оптимизационного функционала, проведено всестороннее тестирование предложенного способа подбора параметров эксцентричного диполя. Проведено сравнение результатов оценки этих параметров для различных моделей полей, заданных в разных по структуре сетках на земной поверхности. Показано, что использование в качестве уровня задания поля эллипсоида вращения (WMG-84) приводит к довольно малым изменениям по сравнению с шарообразной Землей. Данные об изменении параметров эксцентричного диполя за 50 лет, с 1955 по 2005 г., сравниваются с результатами, полученными другими авторами на основе оценок параметров моделей эксцентричного диполя по первым 8 коэффициентам ряда Гаусса. Вычислены коэффициенты 1—5-й гармоник поля эксцентричного диполя на тот же период и проведен их анализ.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ПАРАМЕТРЫ ДИПОЛЯ, СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Известно, что в геомагнитном поле главную часть (около 90 %) составляет дипольное поле. В палеомагнетизме используется модель центрального осевого диполя (ЦОД), которая хорошо представляет ГМП в среднем за 100 тыс. лет [Паркинсон, 1986]. Мгновенное поле (в любое время) в первом приближении можно представить полем центрального диполя (ЦД) с центром в центре масс Земли и осью, наклоненной к оси вращения на небольшой угол (порядка 10°). Гораздо лучше ГМП приближается полем эксцентричного диполя (ЭД), чему посвящена обширная литература [Bartels, 1936; James, Winch, 1967; Калинин, 1969; Vochev, 1969; Fraser-Smith, 1987; и др.].

Основной метод анализа ГМП — это представление его рядом по сферическим полиномам (рядом Гаусса) [Паркинсон, 1986; Langel, 1987; и др.]. Для определения параметров эксцентричного диполя используются формулы, впервые полученные А. Шмидтом [Bartels, 1936; Fraser-Smith, 1987], связывающие эти параметры с первыми 8 коэффициентами ряда Гаусса (с $n \leq 2$). Эти формулы удобны в расчетах для особой модели ЭД — эксцентричного диполя Шмидта (ЭДШ), вектор магнитного момента которого равен вектору магнитного момента центрального диполя. Искусственность этой модели очевидна, но результатам оценки параметров диполя обычно не придается абсолютного значения, важны изменения этих параметров во времени.

В качестве параметров эксцентричного диполя мы будем использовать: координаты центра диполя r_D, θ_D, λ_D (расстояние от центра масс Земли, коширота, отсчитываемая от Северного полюса, и долгота от Гринвичского меридиана на восток соответственно) и ориентировку оси диполя, которая задается координатами Северного осевого полюса (СОП) θ_N, λ_N .

В модели центрального диполя геомагнитный полюс (точка пересечения оси диполя с поверхностью Земли) обладает свойством вертикальности силовых линий дипольного поля ($I = 90^\circ$ в Северном и $I = -90^\circ$ в Южном полушариях). В моделях ЭД эти два свойства относятся к разным точкам. Осевой полюс (по терминологии [Fraser-Smith, 1987]) — точка пересечения оси диполя с поверхностью Земли. Свойством $I = 90^\circ$ или $I = -90^\circ$ обладает «dip pole» [там же]. Это понятие было введено для модели ЭДШ, но оно применимо для эксцентричного диполя с произвольной ориентировкой оси магнитного момента. В этой модели прямая, соединяющая дип-полюса — Северный (СДП) и Южный (ЮДП), не лежит в одной плоскости с прямой СОП, центр диполя D , ЮОП с координатами (θ_S, λ_S) . Для определения координат дип-полюсов в модели ЭДШ имеются соответствующие формулы [Fraser-Smith, 1987; Dipole..., 2003]. В нашей модели эксцентричного диполя с произвольной ориентировкой оси координаты дип-полюсов определяются оптимизационным подбором с условием $I = 90^\circ$ или $I = -90^\circ$.

В дальнейшем описании, кроме сферической системы координат, будем использовать картезианскую систему (0 — в центре Земли, z_c — по оси вращения, x_c — по линии пересечения плоскостей экватора и Гринвичского меридиана, y_c — в плоскости меридиана 90°).

В литературе по геомагнетизму нет общепринятых стандартов для параметров диполя. Положение центра диполя дается в картезианских координатах: размерных (x_0, y_0, z_0) или безразмерных (ξ, η, ζ) , например, $\xi = x_0/R$, где R — радиус Земли. Ориентировка оси диполя задается широтой φ и долготой λ геомагнитного полюса; последняя отсчитывается от 0 (Гринвичский меридиан) до 360° на восток или до 180° на восток и до -180° на запад [James, Winch, 1967; Fraser-Smith, 1987; Dipole..., 2003]. В работе [Bochev, 1969] положение оси задано компонентами вектора магнитного момента $\mathbf{m} = MR^3$ по осям картезианской системы: m_x, m_y, m_z . В работе [Dipole..., 2003] обозначения свои: положение центра диполя дается в абсолютных значениях — x_0, y_0, z_0 , коширота центра диполя θ_D , долгота Φ_D , а координаты полюсов — как широта и долгота. Для сравнения параметров диполя по данным разных авторов требуются пересчеты (по очевидным формулам). Дальше все данные приводятся к вышеуказанной нашей системе параметров.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭКСЦЕНТРИЧНОГО ДИПОЛЯ

Потенциал диполя с магнитным моментом M определяется по формуле

$$U(A) = \frac{M}{r^2} \cos \gamma, \quad (1)$$

где r — модуль радиус-вектора диполя в точке A ; γ — угол между осью диполя и радиус-вектором \mathbf{r} .

Обозначим стороны треугольника с вершинами D — центр диполя, N — северный геомагнитный полюс, A — точка определения потенциала диполя U : $DA = r$, $DN = d$, $NA = a$. По теореме косинусов

$$\cos \gamma = \frac{r^2 + d^2 - a^2}{2rd}. \quad (2)$$

Определим r , d и a как длину радиусов векторов:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 + (z - z_D)^2, \\ d^2 &= (x_N - x_D)^2 + (y_N - y_D)^2 + (z_N - z_D)^2, \\ a^2 &= (x - x_N)^2 + (y - y_N)^2 + (z - z_N)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты вектора магнитной индукции \mathbf{T} в картезианских координатах (X_c, Y_c, Z_c) вычисляются как производные потенциала (1) по соответствующим координатам:

$$\begin{aligned} X_c &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M}{r^3} \left(2 \cos \gamma \frac{\partial r}{\partial x} - r \frac{\partial \cos \gamma}{\partial x} \right), \\ Y_c &= -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{M}{r^3} \left(2 \cos \gamma \frac{\partial r}{\partial y} - r \frac{\partial \cos \gamma}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$Z_c = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{M}{r^3} \left(2 \cos \gamma \frac{\partial r}{\partial z} - r \frac{\partial \cos \gamma}{\partial z} \right).$$

Входящие в формулы (4) производные $\cos \gamma$ по координатам выражаются так:

$$\frac{\partial \cos \gamma}{\partial x} = K_r \frac{\partial r}{\partial x} + K_a \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial \cos \gamma}{\partial y} = K_r \frac{\partial r}{\partial y} + K_a \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial \cos \gamma}{\partial z} = K_r \frac{\partial r}{\partial z} + K_a \frac{\partial a}{\partial z}, \quad (5)$$

где

$$K_r = \frac{r^2 - d^2 + a^2}{2r^2d}, \quad K_a = -\frac{a}{rd}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_D}{r}, \quad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{x - x_N}{a},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - y_D}{r}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{y - y_N}{a}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z - z_D}{r}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{z - z_N}{a}.$$

Подстановка величин (6) и (7) в формулы (5), а затем величин (2), (3) и (5) в формулы (4) приводит к громоздким выражениям для компонент X_c , Y_c , Z_c , но в этих выражениях нет необходимости. Вычисления по формулам (4) выполняются путем последовательного подсчета всех указанных величин с подстановкой в эти формулы конкретных числовых значений.

Затем значения $X_c(x, y, z)$, $Y_c(x, y, z)$, $Z_c(x, y, z)$ в точке $A(\theta, \lambda)$ преобразуются в обычную для геомагнетизма систему декартовых координат (ось x — на север, ось y — на восток, ось z — вертикально вниз) с использованием следующих соотношений:

$$X = X_c \cos \theta \cos \lambda + Y_c \cos \theta \sin \lambda - Z_c \sin \theta,$$

$$Y = -X_c \sin \theta \sin \lambda + Y_c \sin \theta \cos \lambda, \quad (8)$$

$$Z = X_c \sin \theta \cos \lambda + Y_c \sin \theta \sin \lambda + Z_c \cos \theta.$$

Значения компонент вектора удобно определять по равномерной сетке географических координат в виде $X(\theta, \lambda)$, $Y(\theta, \lambda)$, $Z(\theta, \lambda)$, поэтому значения x , y , z задаются по формулам

$$x = \rho \sin \theta \cos \lambda,$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \lambda, \quad (9)$$

$$z = \rho \cos \theta.$$

Координаты южного геомагнитного полюса x_S, y_S, z_S определяются по уравнению прямой, соединяющей точки N и D и точку с этими координатами:

$$x_S = Kx_D - x_N,$$

$$y_S = Ky_D - y_N, \quad (10)$$

$$z_S = Kz_D - z_N.$$

$$K = 2 \frac{x_D x_N + y_D y_N + z_D z_N}{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2}. \quad (11)$$

Пока рассмотрение велось для сферической поверхности Земли. Последние модели IGRF дают поле на поверхности сфероида (эллипсоида вращения с малым сжатием α) WMG-84. Поле эксцентричного диполя на этом эллипсоиде можно вычислять с учетом только зависимости радиуса от широты. Несовпадение нормали к эллипсоиду с радиус-вектором приводят к отличию производных по нормали и по радиус-вектору не более $6 \cdot 10^{-6}$ (это максимум на широте 45°) [Грушинский, 1963]. Зависимость $\rho(\varphi)$ — формула Клеро (без учета малых второго порядка) имеет вид

$$\rho(\varphi) = \rho_e (1 - \alpha \sin^2 \varphi),$$

где $\rho_e = 6378.178$ км — экваториальный радиус, $\alpha = 1/298.2528$.

СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ПОДБОРЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКСЦЕНТРИЧНОГО ДИПОЛЯ

1. Вычисления выполняются в Excel. Число строк таблицы соответствует числу точек сети пунктов определения компонент поля плюс строка, в которой задаются начальные значения и определяются параметры диполя и оценивается значение функционала качества подбора (не считая строк и заголовков столбцов). Столбцы подразделены на 5 блоков:

блок 1 — параметры диполя, одинаковые для строк с разными координатами пунктов определения значений компонент дипольного поля;

блок 2 — вычисление компонент поля диполя в картезианской системе координат на сфере единичного радиуса;

блок 3 — вычисление компонент поля диполя в обычной для геомагнетизма системе координат с конкретным (для данного года) значением магнитного момента m ;

блок 4 — компоненты реального геомагнитного поля (модели IGRF) на заданную эпоху;

блок 5 — сравнение компонент дипольного и реального полей по среднеквадратическим отклонениям (СКО) разных компонент или

$$\|F\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{Mi} - X_{Di})^2 + (Y_{Mi} - Y_{Di})^2 + (Z_{Mi} - Z_{Di})^2}{3n}}, \quad (12)$$

где компоненты с индексом Mi — реальное поле конкретной модели IGRF, а компоненты с индексом Di — поле эксцентричного диполя в той же i -й точке (их общее число — n).

Для удобства представления результатов задаются сферические координаты центра диполя, Северного осевого полюса (блок 1) и точек определения поля (блок 2). При вычислении компонент поля (блок 2) по формулам (9) определяются картезианские координаты указанных точек. Перевод значений компонент поля, вычисленных в картезианских координатах, в обычные для геомагнетизма значения (блок 3) производится по формулам (8).

2. Для проверки устойчивости параметров модели ЭД к моделям поля проведены результаты сравнения параметров моделей ЭД на эпохи 2000, 2002 и 2005 годов для моделей геомагнитного поля IGRF (10-я генерация) и WMM (табл. 1). Во всех случаях поле задавалось по сетке $30 \times 30^\circ$, при подборе параметров минимизировался функционал (12).

Параметры диполя показаны с большим числом знаков, чем указывают обычно, чтобы было видно малое отличие параметров для разных моделей поля (все цифры значащие).

Кроме изменения параметров во времени, мы наблюдаем небольшие различия параметров для моделей IGRF и WMM, которые немного возрастают от 2000 к 2005 г. Как видим, выбор модели поля мало влияет на оцениваемые параметры.

3. Влияние эллипсоидальности Земли оценено путем сравнения параметров моделей ЭД в сферической и эллипсоидальной Земле (табл. 2); вычисления выполнены для модели IGRF, сетка $30 \times 30^\circ$, эпохи 2000 и 2005 годов, минимизация функционала $\|F\|$.

Как видим, практически нет разницы в значениях r_D , невелика она в угловых координатах θ_D и λ_D центра диполя, как и в кошироте полюса θ_N , но в значениях долготы полюса λ_N она заметна: 0.16 — 0.19° , что составляет более половины изменения долготы полюса за 5 лет.

Таблица 1. Сравнение оценок параметров диполя в зависимости от моделей магнитного поля

Модель, год	r_D	θ_D , град.	λ_D , град.	θ_N , град.	λ_N , град.	$\ F\ $, нТл
IGRF, 2000	0.098475	79.5226	140.7829	6.2572	-84.4552	5619.37
WMM, 2000	0.098476	79.5232	140.7816	6.2639	-84.4785	5619.37
IGRF, 2002	0.099245	79.3847	140.1899	6.1210	-84.5745	5631.96
WMM, 2002	0.099255	79.3877	140.1892	6.1294	-84.5997	5632.31
IGRF, 2005	0.100401	79.1806	139.3058	5.9178	-84.7413	5652.06
WMM, 2005	0.100384	79.1836	139.3036	5.9236	-84.7775	5652.16

Таблица 2. Сравнение оценок параметров диполя при задании поля на сферической и эллипсоидальной Земле

Год, Земля	r_D	θ_D , град.	λ_D , град.	θ_N , град.	λ_N , град.	$\ F\ $, нТл
2000, сф.	0.0985	79.523	140.783	6.257	-84.455	5619
2000, эл.	0.0984	79.576	140.814	6.285	-84.295	5631
2005, сф.	0.1004	79.181	139.306	5.918	-84.740	5652
2005, эл.	0.1003	79.232	139.338	5.950	-84.532	5663

Таблица 3. Тест для выбора оптимальной сети задания магнитного поля

Сетка	r_D	θ_D , град.	λ_D , град.	θ_N , град.	λ_N , град.	$\ F\ $, нТл
$15 \times 15^\circ$	0.10110	79.657	141.835	6.139	-83.486	5516
$15 \times 30^\circ$	0.10120	79.711	142.071	6.158	-83.366	5401
$30 \times 15^\circ$	0.10020	79.051	138.629	5.864	-84.951	5681
$30 \times 30^\circ N$	0.10200	80.159	144.077	6.355	-81.764	5363
$30 \times 30^\circ$	0.10040	79.181	139.306	5.918	-84.740	5652

Таблица 4. Тестирование функционалов качества подбора на модели IGRF 2005 г

Функционал	r_D	θ_D , град.	λ_D , град.	θ_N , град.	λ_N , град.	СКО
$\ I\ $	0.1010	66.508	109.976	4.697	-123.380	6,95
$\ H\ $	0.1077	50.544	13.384	9.690	-151.790	4875
$\ Z\ $	0.2178	81.013	136.341	4.142	-170.819	5965
$\ F\ $	0.1020	80.159	144.077	6.355	-81.764	5363

Таблица 5. Результаты тестирования алгоритма оптимизационного подбора параметров диполя на модели поля диполя

Функционал	r_D	θ_D , град.	λ_D , град.	θ_N , град.	λ_N , град.	СКО
Модель	0.080000	80.0000	140.0000	7.0000	-80.0000	—
$\ I\ $	0.080001	79.9968	139.9998	6.9999	-80.0004	0.00033
$\ H\ $	0.079997	79.9982	139.9994	6.9999	-79.9986	0.536
$\ Z\ $	0.079999	79.9948	140.0014	7.0001	-80.0017	0.359
$\ F\ $	0.080000	79.9963	140.0007	7.0001	-80.0011	0.520

Это могло бы служить основанием для предпочтения сфероидальной Земли в расчетах параметров диполя, если бы не большие значения СКО. По этой причине все дальнейшие оценки относятся к сферической Земле.

4. Роль структуры сети данных о геомагнитном поле в оценке параметров аппроксимирующего это поле эксцентричного диполя покажем на модели IGRF 2005 г. Исходные данные этой модели подготовлены по сети $15 \times 15^\circ$; из этого массива сформированы массивы со следующими сетками: $15 \times 30^\circ$ (15° — по широте, 30° — по долготе), $30 \times 15^\circ$ (наоборот), основная сетка $30 \times 30^\circ$ и вариант $30 \times 30^\circ N$ (шаг 30° по широте и долготе, но со сдвигом на 15° по обеим координатам; N означает «нечетные» значения). Результаты приведены в табл. 3.

Различия имеются, хотя простых закономерностей не видно. Казалось бы, более густая сетка $15 \times 15^\circ$ должна лучше представлять поле, но ее СКО ($\|F\|$) не самое меньшее. Оно максимально для сетки $30 \times 15^\circ$; в этой модели значения всех параметров диполя минимальны в рамках таблицы. Наименьшее значение $\|F\|$ получено для сетки $30 \times 30^\circ N$, но здесь все параметры диполя имеют максимальные значения. По всем параметрам диполя наибольшие отличия отмечаются между моделями $30 \times 30^\circ N$ и $30 \times 30^\circ$, и значения $\|F\|$ у них различны. Поскольку данные (см. табл. 3) не дают убедительных предпочтений сеткам большей детальности представления поля, дальше используются материалы по основной сетке $30 \times 30^\circ$.

5. Рассмотрим обоснование выбора функционала, по которому проводится оптимизация подбора параметров ЭД. Рассматривались три варианта: стандартные отклонения модельного поля диполя от фактических полей по наклонению — $\|I\|$, вертикальной составляющей — $\|Z\|$ и функционалу $\|F\|$, так как эти величины наиболее рельефно описывают поле диполя.

Расчеты проведены для модели поля WMM 2002 г., которая была задана по сетке $15 \times 30^\circ$ с исключением географических полюсов, где значения X , Y и D неоднозначны. Оптимизационным подбором по $\|F\|$ зафиксирован набор 5 параметров диполя: r_D , θ_D , λ_D , θ_N , λ_N . Подбор модуля магнитного момента m не нужен, так как это масштабный коэффициент, не влияющий на топологию поля. Он оценивается для каждой эпохи как геометрическая сумма первых коэффициентов Гаусса: $m = \sqrt{g_{10}^2 + g_{11}^2 + h_{11}^2}$. Затем поочередно значения каждого параметра варьируются в довольно широком диапазоне, оставляя другие неизменными. Определяются СКО $\|I\|$, $\|Z\|$ и $\|F\|$ (рис. 1).

Удовлетворительного совпадения оценок параметров диполя по разным функционалам нет. Более или менее близкие значения θ_D , λ_D и θ_N получаются при подборе по $\|Z\|$ и $\|F\|$. Оценки по $\|I\|$ резко отличаются от других по всем показателям. По этим данным предпочтение можно отдать подбору по $\|F\|$; этот

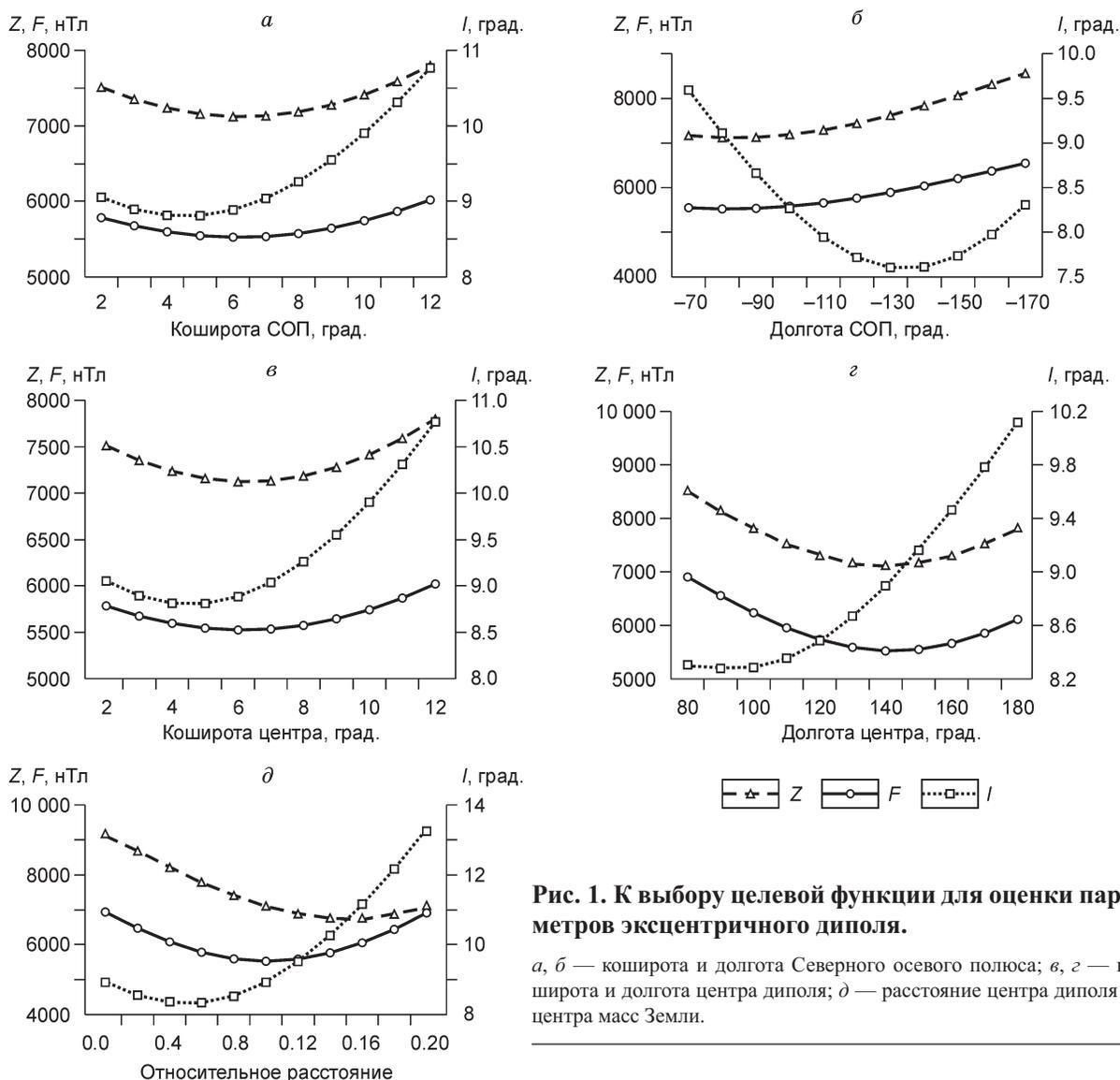


Рис. 1. К выбору целевой функции для оценки параметров эксцентричного диполя.

a, б — коширота и долгота Северного осевого полюса; *в, г* — коширота и долгота центра диполя; *д* — расстояние центра диполя от центра масс Земли.

же функционал был использован в первой работе по оптимизационному подбору параметров эксцентричного диполя [Bochev, 1969].

Другой тест состоял в оптимизационном подборе параметров диполя для модели IGRF 2005 г., сетка $30 \times 30^\circ$ Н, четыре функционала — к выше перечисленным добавлен $\|H\|$ (табл. 4).

Разброс значений параметров так велик, что мы сочли необходимым проверить способ оптимизационного подбора параметров ЭД на модели чисто дипольного поля. Значения компонент поля были округлены (угловые — до 0.001° , силовые — до 1 нТл; с этой же точностью задавались все модели IGRF и WMM). В табл. 5 приведены результаты теста.

Все параметры ЭД по всем функционалам определены точно; малые отклонения от значений параметров модели обусловлены погрешностями задания компонент поля.

Это приводит к важному выводу: способ оптимизационного подбора параметров ЭД не отвечает за разброс этих параметров, связанный с выбором функционала качества, а также с избранной сеткой входных данных. Причина — в особенностях пространственной структуры геомагнитного поля (об этом будет сказано ниже).

Для изучения поведения параметров эксцентричного диполя с 1955 по 2005 г. оптимизационный подбор ведем по минимуму $\|F\|$.

ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКСЦЕНТРИЧНОГО ДИПОЛЯ ЗА 50 ЛЕТ

Основные результаты этой работы — изменение параметров ЭД с 1955 по 2005 г. по моделям IGRF, значения компонент поля которых заданы на сетке $30 \times 30^\circ$, приведены в табл. 6.

Таблица 6. Изменение во времени параметров эксцентричного диполя и СКО поля диполя от IGRF

Год	r_D	θ_D , град.	λ_D , град.	θ_N , град.	λ_N , град.	СКО	m , нТл
1955	0.0815	83.782	148.840	8.177	-80.405	5159	31129
1960	0.0833	83.049	147.579	8.035	-80.664	5214	31043
1965	0.0847	82.325	146.743	7.937	-80.993	5259	30952
1970	0.0861	81.558	146.213	7.836	-81.366	5305	30829
1975	0.0877	80.828	145.830	7.699	-81.817	5356	30696
1980	0.0899	80.353	145.069	7.476	-82.357	5396	30574
1985	0.0921	80.080	144.279	7.210	-82.833	5468	30435
1990	0.0942	79.930	143.299	6.935	-83.396	5520	30318
1995	0.0963	79.712	142.219	6.627	-84.035	5575	30215
2000	0.0985	79.523	140.783	6.257	-84.455	5619	30120
2005	0.1004	79.181	139.306	5.918	-84.740	5652	30037
Δ	21 %	-4.601	-9.534	-2.259	-4.335	9.1 %	-3.6 %

В последней строке показано изменение параметров за 50 лет, в относительной форме для r_D , $\|F\|$ и m и в абсолютной — для угловых координат центра диполя и Северного осевого полюса (СОП). Изменения всех параметров ЭД во времени имеют регулярный характер. Обратим сначала внимание на r_D , $\|F\|$ и m . Магнитный момент диполя за 50 лет уменьшился на 3.6 %, а СКО — $\|F\|$ как показатель степени недипольности ГМП обнаруживает увеличение на 9.1 %, тогда как центр диполя сместился от центра масс Земли на 21 % своего среднего расстояния (примерно уровня 1980 г.) или почти на 120 км.

Полученные оценки координат центра ЭД, координат осевых и дип-полюсов мы сравнили с данными других авторов по ЭДШ [James, Winch, 1967; Bochev, 1969; Fraser-Smith, 1987; Dipole..., 2003]. Материалы [James, Winch, 1967; Bochev, 1969; Fraser-Smith, 1987] мы не приводим по следующим причинам. Данные [Bochev, 1969], пересчитанные в нашу систему параметров, показали неплохое соответствие с данными [Fraser-Smith, 1987], но они охватывают небольшой отрезок (до 1960 г.) изучаемого периода. В материалах [James, Winch, 1967] (они имеются до 1965 г.) обнаружены незакономерные изменения параметров во времени при общей близости средних значений к данным [Fraser-Smith, 1987]. Используемая нами сводка [Dipole..., 2003], по-видимому, базируется в основном на материалах [Fraser-Smith, 1987], дополненных результатами последних лет (до 2000 г.).

На рис. 2 показано изменение положения центра эксцентричного диполя — расстояния от центра Земли и его угловых координат.

Центр ЭД располагается на (0.013—0.014) R дальше от центра Земли, чем центр ЭДШ в работе [Dipole..., 2003]. Тенденция — удаление со временем центра диполя от центра Земли в обеих моделях одинакова, как и скорость удаления. В плане (по угловым координатам) центры ЭД и ЭДШ находятся недалеко друг от друга и имеют сходную тенденцию смещения на ЗСЗ, но центр ЭД располагается примерно на 11° ближе к экватору, чем центр ЭДШ.

Изменение во времени положения полюсов эксцентричного диполя, по нашим данным, и диполя Шмидта по работе [Dipole..., 2003] показано на рис. 3. Для удобства чтения графиков кошироту мы заменили широтой.

Северный осевой полюс в обеих моделях смещается к ЗСЗ, но СОП ЭД располагается на $4\text{—}7^\circ$ восточнее и примерно на 1° ближе к географическому полюсу, чем СОП ЭДШ. Иное соотношение смещений Южного осевого полюса в разных моделях. Южный осевой полюс диполя Шмидта за 55 лет

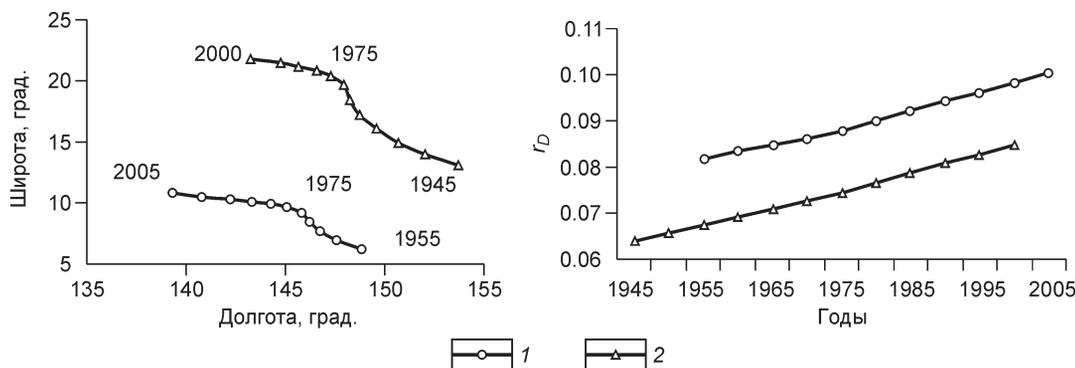


Рис. 2. Сравнение наших оценок (1) координат центра диполя с данными о положении центра диполя Шмидта по работе [Dipole..., 2003] (2).

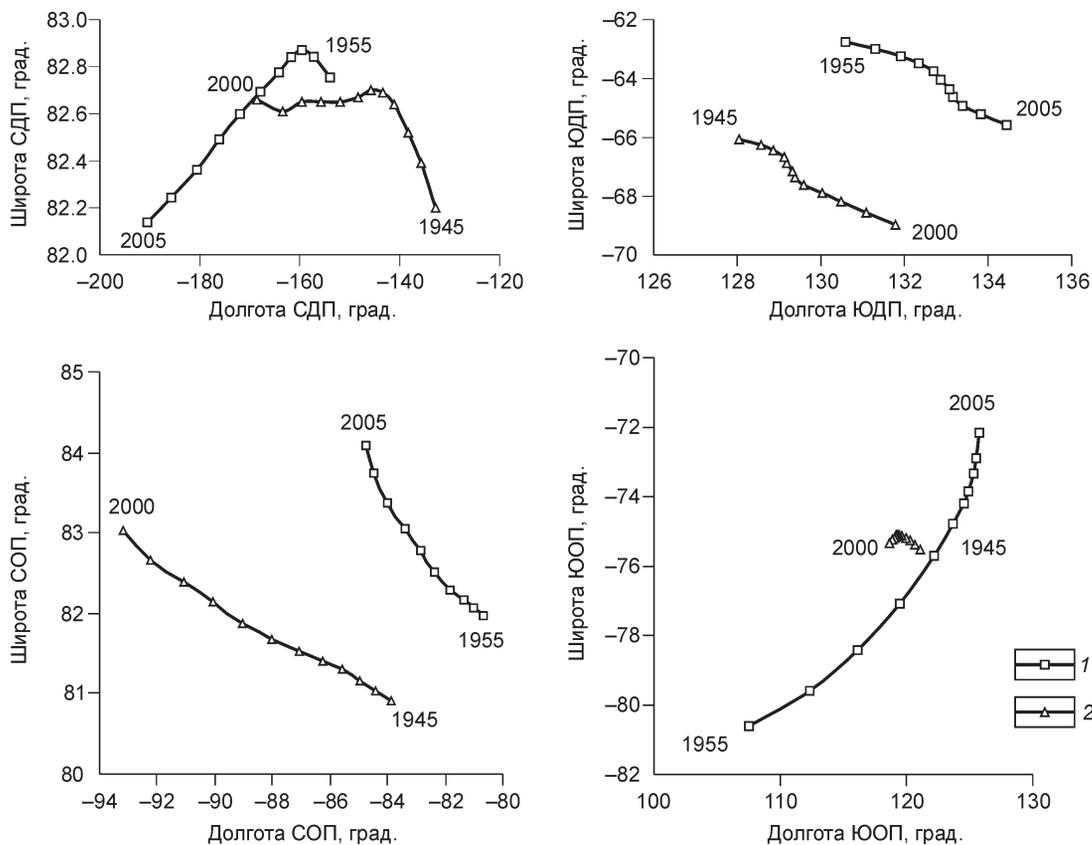


Рис. 3. Сравнение оценок координат дип-полюсов (СДП, ЮДП) и осевых полюсов (СОП, ЮОП) эксцентричного диполя, по нашим данным (1), с координатами диполя Шмидта по работе [Dipole..., 2003] (2).

сместился на запад на $\sim 4^\circ$ практически без изменения широты (около 75°). Южный осевой полюс в нашей модели за 50 лет сместился на север более чем на 8° , удаляясь от Южного географического полюса, и на восток почти на 19° , причем скорость его смещения медленно уменьшалась с 1955 до 1975 г. и быстро в последние десятилетия.

С дип-полюсами ситуация существенно иная. Общие направления смещения СДП в моделях ЭД и ЭДШ различны: СДП ЭД смещался к юго-западу, а СДП ЭДШ — к северо-западу. В обоих случаях отмечаются изменения в направлении движения СДП в 1965 г.: в модели ЭД с СЗ на ЮЗ, а в модели ЭДШ — с северо-западного на почти западное. Изменения положения ЮДП в обеих моделях похожи — смещение на ВЮВ, но ЮДП ЭДШ располагается все время на $\sim 3^\circ$ ближе к Южному географическому полюсу, чем ЮДП ЭД.

Различия параметров ЭД и ЭДШ и их изменений во времени нуждаются в объяснении их причин. Для этого мы использовали вычисление гармонических коэффициентов магнитного поля эксцентричного диполя (поскольку параметры диполя Шмидта определяются по первым 8 коэффициентам ряда Гаусса).

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧНОГО ДИПОЛЯ ЗА 50 ЛЕТ

Вычисление гармонических коэффициентов магнитного поля ЭД является менее сложной задачей, чем обычный сферический гармонический анализ данных измерений реального геомагнитного поля: анализируется потенциал $U(\theta, \lambda)$, заданный на поверхности сферы ($R = a$). При этом можно ограничиться небольшим числом ряда Гаусса, проверка показала, что достаточно $N = 5$. Расчетная формула имеет вид:

$$\frac{1}{a} U(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda), \quad (13)$$

где a — средний радиус Земли (6371.2 км), g_n^m и h_n^m — искомые коэффициенты, $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра в квазинормировке Шмидта, по [Langel, 1987]. Вид нормировочных коэффициентов

Таблица 7.

**Сравнение гармонических коэффициентов эксцентричного диполя
и дипольных параметров 1965 г. с данными по IGRF и других авторов**

Параметр	ЭД	IGRF	[James, Winch, 1967]	[Калинин, 1969]	[Leaton et al., 1965]
g_1^0	-30301	-30334	-30380	-30365	-30365
g_1^1	-2838	-2119	-2090	-2070	-2070
h_1^1	5640	5776	5770	5816	5816
m , нТл	30952	30952	30994	30986	30986
M ($\cdot 10^{25}$), А·м ²	8.000	8.000	8.011	8.009	8.009
θ , град.	11.77	11.47	11.42	11.49	11.49
λ , град.	-63.29	-69.85	-70.09	-70.41	-70.41
g_2^0	-1144	-1662	-1650	-1595	-1595
g_2^1	1621	2997	2950	1694	2934
h_2^1	-1028	-2016	-1960	-1147	-1987
g_2^2	-47	1594	1580	460	1593
h_2^2	-408	114	120	24	84
r , км	268.4	451.5	442.9	294.7	440.8
θ_r , град.	3.77	7.35	7.16	3.85	7.29
λ_r , град.	140.72	148.11	147.60	129.93	148.84

$$P_n^0(\cos\theta) = P_{n,0}(\cos\theta),$$

$$P_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(\cos\theta), \quad m > 0. \quad (14)$$

Вычисление коэффициентов g_n^m и h_n^m производилось оптимизационным методом: выбирались такие их значения, которые минимизировали СКО левой части (13) относительно аналогичной величины поля ЭД с заданными координатами центра и СОП.

Схема вычисления гармонических коэффициентов тестирована на различных данных 1965 г. — IGRF, а также [James, Winch, 1967; Калинин, 1969; Leaton et al., 1965]. В работе [Калинин, 1969] изложены данные, относящиеся к этой эпохе — единственной попытке оценки параметров эксцентричного диполя, которая основана на значениях первых 8 гармонических коэффициентов потенциала ЭД с произвольным направлением магнитного момента [Калинин, 1963]. Эта работа не получила продолжения, возможно, по той причине, что автор [Калинин, 1969] использовал данные работы [Leaton et al., 1965], заменив общепринятую нормировку полиномов на иную без указания ее вида.

В табл. 7 приводятся на эпоху 1965 г. значения первых 8 коэффициентов до $N = 2$ (по ним обычно оцениваются параметры ЭДШ). Наши данные о гармонических коэффициентах поля ЭД в квазинормировке Шмидта сравниваются с данными IGRF [Leaton et al., 1965; James, Winch, 1967; Калинин, 1969]. Кроме значений коэффициентов g_n^m и h_n^m ($n = 1, 2; m = 0, 1, 2$) приведены: значения магнитного момента m ; координаты северного геомагнитного полюса ЭДШ θ и λ ; координаты центра ЭДШ r , θ_r и λ_r .

Коэффициенты первой гармоники ЭД и IGRF распределены по-разному (при одинаковом значении m), что приводит к различию координат северного геомагнитного полюса. Различаются и коэффициенты второй гармоники: g_2^0 и g_2^1 в ЭД больше, чем в IGRF, а все другие, напротив, меньше. Это объясняется тем, что в чисто дипольном поле нет влияния мировых магнитных аномалий (ММА), а IGRF оно есть. Положительные ММА — Канадская, Сибирская и Антарктическая — расположены в высоких широтах обоих полушарий, а отрицательная Бразильская ММА — в экваториальной области. Поэтому они проявляются во второй гармонике. Нарушение симметрии относительно экватора (две положительные ММА в Северном и одна ММА в Южном полушариях)

Таблица 8. **Изменение во времени геометрических сумм гармонических коэффициентов**

Год	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
1955	2052	193	18.6	6.7	6.5
1960	2091	201	19.7	7.2	6.9
1965	2120	208	20.5	7.5	7.2
1970	2149	214	21.4	7.7	7.4
1975	2180	222	22.5	7.9	7.6
1980	2227	233	24.1	8.5	8.1
1985	2272	243	25.7	9.1	8.7
1990	2316	254	27.4	9.9	9.5
1995	2360	264	29.1	10.7	10.3
2000	2407	276	31.0	11.7	11.2
2005	2449	286	32.8	12.6	12.0

Таблица 9.

**Скорость изменения среднеквадратических значений коэффициентов
и координат Северных полюсов из анализа поля ЭД**

Модель	Скорость изменения, нТл/год					СОП ЭД $\Delta\theta/\Delta t$, град./год	СОП ЭДШ $\Delta\theta/\Delta t$, град./год
	1	2	3	4	5		
ЭД	-12.615	7.356	1.766	0.048	0.037	-0.0452	-0.0867
IGRF	-12.615	7.100	1.676	-0.634	0.121	-0.0257	-0.0524

Примечание. 1—5 — максимальное число гармоник.

влияет на соотношение коэффициентов g_1^0 и g_1^1 первой гармоники. Предположение, заложенное в методе определения координат геомагнитных полюсов и координат центра ЭДШ в работах [Bartels, 1936; James, Winch, 1967; Fraser-Smith, 1987; Dipole..., 2003], о том, что первые две гармоники представляют только дипольное поле, несправедливо. Поэтому координаты геомагнитных полюсов и центра ЭДШ не имеют абсолютного значения, но важны их изменения во времени.

Сравнение столбцов таблицы по работам [Leaton et al., 1965; James, Winch, 1967; Калинин, 1969] свидетельствует о значительном отличии этих моделей поля от IGRF даже в значениях m . О причине различия данных [Калинин, 1969] и [Leaton et al., 1965] из-за разной нормировки полиномов Лежандра уже говорилось. Заметим, что оценки расстояния центра диполя по методу [Калинин, 1969] для нормировки, используемой в IGRF [Leaton et al., 1965; James, Winch, 1967], непригодны.

Рассмотрим некоторые обобщенные характеристики моделей полей ЭД за 1955—2005 гг., основанные на вычисленных гармонических коэффициентах.

В табл. 8 приведены СКО аппроксимации поля ЭД разным числом гармоник (N — максимальное значение n — от 1 до 5).

Видны два важных обстоятельства:

1. Значения СКО с $N = 5$ мало отличаются от значений с $N = 4$, а последние значительно отличаются от значений с $N = 3$; это значит, что магнитное поле ЭД с произвольным направлением вектора магнитного момента удовлетворительно описывается не менее чем 4 гармониками (24 коэффициента). При определении ЭДШ предполагается [Калинин, 1969; Fraser-Smith, 1987], что его поле описывается 2 гармониками (8 коэффициентов). Как сказано выше, это не совсем так.

2. От 1955 к 2005 г. закономерно увеличиваются значения СКО во всех столбцах. Это означает, что с удалением центра диполя от центра Земли (см. табл. 6) его поле все хуже представляется заданным числом гармоник.

Из этого следует, что оценка параметров ЭД со свободным направлением оси по первым 8 коэффициентам ($n = 1, 2$) в работе [Калинин, 1969] была некорректной.

Отметим очевидные факты, вытекающие из сравнения гармонических коэффициентов поля ЭД и IGRF (10-я генерация).

Значения $m = \sqrt{g_{10}^2 + g_{11}^2 + h_{11}^2}$ поля ЭД и IGRF совпадают с большой точностью так же, как и изменения магнитного момента во времени: скорость в обоих случаях равна — 19.86 нТл/год. Близка и скорость изменения среднеквадратических значений коэффициентов 2-й гармоники: 7.100 нТл/год — IGRF и 7.356 нТл/год — ЭД (табл. 9). В этой таблице приведены значения средней скорости (с 1965 по 2005 г.) изменения среднеквадратических значений коэффициентов всех 5 гармоник, учитывавшихся в анализе поля ЭД в сравнении с аналогичными значениями IGRF, а также средняя скорость изменения координат Северных осевого полюса ЭД и геомагнитного полюса ЭДШ (град./год).

Различие значений скорости изменения 2-й и 3-й гармоник, вероятно, вызвано тем, что в IGRF в этих гармониках существенно влияние длинноволновых мировых магнитных аномалий. Различие же значений скорости изменения координат полюса, очевидно, объясняется разным определением этого полюса

в ЭД и IGRF.

Представляет интерес сравнение графиков изменения среднеквадратических значений коэффициентов 3, 4, 5-й гармоник с изменением СКО поля ЭД от поля, включающего 5 гармоник (рис. 4).

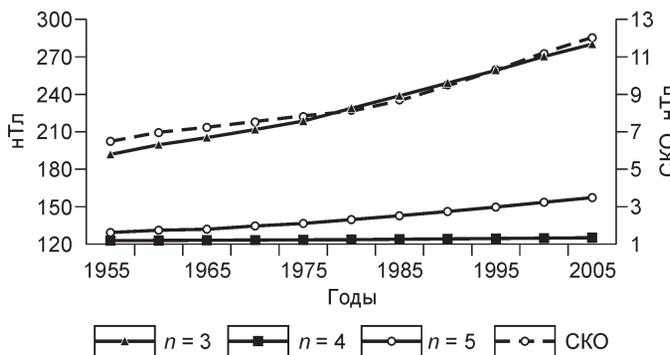


Рис. 4. Изменение во времени среднеквадратических значений коэффициентов 3, 4, 5-й гармоник и СКО приближения поля ЭД рядом с $N = 5$.

Все гармоники (см. рис. 4, табл. 9), кроме первой, определяющей магнитный момент диполя, растут. Энергия магнитного поля перераспределяется во времени так, что за счет уменьшения первой гармоники растут все другие, которые входят в определение поля ЭД с произвольной ориентировкой оси.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Построены формулы для вычисления компонент поля эксцентричного диполя с произвольным направлением оси по заданным координатам центра диполя, значению и направлению вектора магнитного момента. Магнитное поле такого диполя можно вычислять на поверхности сферической или эллипсоидальной Земли и на любой высоте.

2. Эти формулы использованы для оптимизационного подбора параметров эксцентричного диполя, соответствующих магнитному полю Земли. В качестве целевой функции для минимизации избрано стандартное отклонение поля диполя от поля Земли (IGRF или WMM) по компонентам X , Y , Z . Проведено разностороннее тестирование способа подбора.

3. По значениям компонент IGRF вычислены параметры эксцентричного диполя и гармонические коэффициенты поля диполя за 50 лет.

4. Обнаружены следующие изменения за 50 лет параметров эксцентричного диполя (ЭД) в сравнении с изменениями параметров эксцентричного диполя модели А. Шмидта (ЭДШ):

регулярное удаление центра диполя от центра масс Земли на 120 км (средняя скорость 2.4 км/год); сходное изменение наблюдается и для ЭДШ,

смещение центра ЭД на север от экватора на 4.6° ; близкая тенденция имеет место для ЭДШ, но его центр систематически располагается севернее центра ЭД на $10\text{—}12^\circ$,

сравнение изменений координат полюсов диполей ЭД и ЭДШ показывает, что их общий характер сходен для СОП и ЮДП и довольно резко различается для ЮОП и СДП.

5. Показано, что со временем дипольное поле уменьшается и увеличивается степень недипольности геомагнитного поля. Об этом свидетельствуют следующие изменения за 50 лет:

уменьшение момента m на 3.6 % (т. е. на 21.8 нТл/год),

увеличение СКО приближения геомагнитного поля полем ЭД на 9.1 %,

увеличение среднеквадратических значений гармоник ЭД со 2-й по 5-ю,

увеличение почти вдвое СКО приближения поля ЭД рядом с $N = 5$.

6. Показано, что в разложении геомагнитного поля в ряд Гаусса дипольная часть поля влияет не только на 1-ю и 2-ю гармоники, как обычно считается, а распространяется до 5-й гармоники; вес высоких гармоник со временем растет. С другой стороны, мировые магнитные аномалии (ММА) проявляются в разложении Гаусса с 1-, 2-й гармоник, а не с 3-й, как принято считать. Поэтому оценки параметров ЭДШ по первым 8 гармоническим коэффициентам имеют относительное значение — для выявления закономерностей их изменения.

ЛИТЕРАТУРА

Бенькова Н.П., Пушков А.Н. Магнитное поле Земли // Итоги науки и техники. Геомагнетизм и высокие слои атмосферы. Т. 5, 1980, с. 5–95.

Брагинский С.И. Геомагнитное динамо // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1978, № 9, с. 74–90.

Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. М., Физматгиз, 1963, 448 с.

Калинин Ю.Д. Выражение в сферических координатах потенциала магнитного диполя, расположенного в любой точке пространства и имеющего магнитный момент любого направления // Геомагнетизм и аэрономия, 1963, т. III, № 6, с. 1058–1059.

Калинин Ю.Д. Определение параметров произвольно ориентированного магнитного диполя, представляющего геомагнитное поле // Геомагнетизм и аэрономия, 1969, т. IX, № 6, с. 1089–1093.

Касьяненко Л.Г., Демина И.М., Сас-Ухрыновский А. Представление главного магнитного поля Земли системой оптимальных по ориентации и местоположению диполей // Геомагнетизм и аэрономия, 2002, т. 42, № 6, с. 838–844.

Ладынин А.В., Попова А.А. Квазипериодические флуктуации скорости векового хода геомагнитного поля по данным мировой сети обсерваторий за 1985–2005 гг. // Геология и геофизика, 2008, т. 49 (12), с. 1262–1273.

Ладынин А.В., Попова А.А., Семаков Н.Н. Вековые вариации геомагнитного поля: сравнение спутниковых и наземных данных // Геология и геофизика, 2006а, т. 47 (2), с. 278–291.

Ладынин А.В., Попова А.А., Хомутов С.Ю. О короткопериодных флуктуациях скорости векового хода геомагнитного поля по обсерваторским данным // 170 лет обсерваторских наблюдений на Урале: история и современное состояние. Материалы Междунар. семинара (Екатеринбург, 17–23 июля 2006 г.). Екатеринбург, 2006б, с. 119–122.

- Паркинсон У.** Введение в геомагнетизм. М., Мир, 1986, 528 с.
- Яновский Б.М.** Земной магнетизм. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978, 592 с.
- Barraclough D.R.** A comparison of satellite and observatory estimates of geomagnetic secular variation // J. Geophys. Res., 1985, v. 90, № B3, p. 2523—2526.
- Bartels J.** The eccentric dipole approximating the Earth's magnetic field // J. Geophys. Res., 1936, v. 41, p. 225—250.
- Bochev A.** A dipole approximating to the highest possible degree the Earth's magnetic field // Pure Appl. Geophys., 1969, v. 74, № III, p. 25—28.
- Dipole** approximations of the geomagnetic field. 2003. www.spnvis.oma.be.
- Fraser-Smith A.C.** Centered and eccentric geomagnetic dipoles and their poles, 1600—1985 // Rev. Geophys., 1987, v. 25, № 1, p. 1—16.
- James R.W., Winch D.E.** The eccentric dipole // Pure Appl. Geophys., 1967, v. 66, № I, p. 77—86.
- Langel R.A.** The Main Field // Geomagnetism. Ed. J.A. Jacobs. V. 1. Academic Press, London, 1987, p. 249—492.
- Leaton B.R., Malin S.R.C., Evans M.J.** An analytical representation of the estimated geomagnetic field and its secular change for epoch 1965.0 // J. Geomagn. Geoelek., 1965, v. 17, № 3—4, p. 187—194.
- Lowes F. J.** An estimate of the errors of the IGRF/DGRF fields 1945—2000 // Earth, Planets and Space, 2000, v. 52, № 12, p. 1207—1211.
- Lowes F. J.** The International Geomagnetic Reference Field: a «health» warning // IAGA Division V-MOD geomagnetic field modelling: IGRF proper use. 2003.

*Рекомендована к печати 27 августа 2008 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию 25 июня 2007 г.,
после доработки – 28 февраля 2008 г.*