

УДК 519.626.1

Вычисление оптимального управления линейной системой с инерционным управлением*

В.М. Александров

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

E-mails: vladalex@math.nsc.ru, alexhome@yandex.ru

Александров В.М. Вычисление оптимального управления линейной системой с инерционным управлением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 1. — С. 1–13.

Вычисление оптимального по быстродействию инерционного управления состоит из решения трех подзадач: 1) вычисления оптимального управления в предположении безынерционности управления; 2) нахождения оптимального времени переключения управления; 3) вычисления отклонения, вызванного инерционностью, и коррекции времени и моментов переключений. Рассмотрены особенности подзадач и даны методы их решения. Дан способ задания начального приближения. Приведены вычислительный алгоритм, результаты моделирования и численных расчетов.

Ключевые слова: *оптимальное управление, быстродействие, момент переключения, инерционное переключение, безынерционное переключение, фазовая траектория.*

Aleksandrov V.M. Computing of optimal inertial control with a linear system // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 1. — P. 1–13.

Computing of time-optimal inertial control amounts to solving the three problems: 1) computing of optimal control on the assumption that the control is without inertia; 2) finding the optimal switching time of the control; 3) calculating of the error induced by the time lag of the control followed by correcting the control time and switching moments. Characteristics of the problems are considered and methods of their solution are given. A way of assignment of initial approximation is presented. A computational algorithm, results of modeling and numerical computations are performed.

Key words: *optimal control, speed, switching moment, inertial switching, non-inertial switching, phase trajectory.*

1. Введение

Вычисление оптимального управления по различным критериям качества представляет значительный теоретический и практический интерес. Одним из важнейших критериев является быстродействие. При вычислении оптимального по быстродействию управления линейными системами предполагается, что управление может принимать свои предельно допустимые значения мгновенно, что физически не реализуемо. На практике процесс переключения управления происходит во времени, т. е. процесс переключения является инерционным и время переключения может быть соизмеримо с временем

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00329а) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

перевода системы из начального в заданное конечное состояние. В результате инерционное переключение управления приводит к неточному переводу системы в требуемое конечное состояние.

Инерционный процесс переключения управления может быть описан дифференциальным уравнением с новым управляющим параметром. Впервые такой подход высказал Л.С. Понтрягин во время дискуссии с Ла Саллем по проблеме физической реализуемости на I Конгрессе ИФАК в 1960 году [1]. Предполагается, что новый управляющий параметр является практически безынерционным, т. е. время его переключения с одного предельного значения на другое на несколько порядков меньше времени оптимального перевода управляемой системы. И хотя такой подход не решает проблему полностью, но зато позволяет дать строгое математическое решение задачи быстрогодействия. Отказаться полностью от безынерционного управления не представляется возможным, так как оптимальное по быстродействию управление находится в классе кусочно-непрерывных функций [2]. В результате приходим к задаче нахождения оптимального по быстродействию управления системой с фазовыми ограничениями и более высокой размерности описания по сравнению с размерностью исходной управляемой системы.

Проблеме вычисления оптимального инерционного управления посвящена работа [3], в которой предложен метод решения задачи оптимального управления в классе инерционных управлений с использованием линейного программирования. В [4] получен критерий полной управляемости динамических систем с учетом динамики привода.

В настоящей работе рассматривается новый метод вычисления оптимального по быстродействию управления линейной системой с инерционным управлением.

2. Постановка задачи

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\omega(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (2.1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; $\omega(t)$ — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу непрерывных функций и подчинены ограничениям:

$$|\omega_j(t)| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Предполагается, что система (2.1) полностью управляема, т. е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad (2.3)$$

и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D ; V — область управляемости; $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения (2.1); * — знак транспонирования.

Управляющие параметры $\omega_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, являются инерционными и не могут мгновенно переключаться и принимать *мгновенно* свои предельные значения $\pm M_j$, $j = \overline{1, m}$. Инерционное управление описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dy_j}{dt} = C_j(t)y_j + D_j(t)u_j(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.4)$$

Здесь $C_j(t)$ и $D_j(t)$ — матрицы размера $\ell \times \ell$ и $\ell \times 1$ соответственно; $u_j(t)$ — j -я компонента m -мерного вектора нового *безынерционного* управления; $y_{j1}(t) = \omega_j(t)$, т. е. первая компонента вектора состояния системы (2.4) есть управляющий параметр $\omega_j(t)$ системы (2.1). Под безынерционным понимается управление, которое переключается с одного предельно допустимого значения на другое за время $\tau_j^0 \ll \tau_j$, где τ_j — время переключения управляющего параметра $\omega_j(t)$.

Компоненты вектора безынерционного управления принадлежат классу непрерывных функций и подчинены ограничениям:

$$|u_j(t)| \leq L_j, \quad L_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.5)$$

Основная задача. Найти инерционное управление $\omega(t)$, переводящее за минимальное время $T = t_k - t_0$ систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$.

Замечание. Перевод системы в ненулевое конечное состояние преобразованием координат сводится без потери общности к переводу системы из нового начального состояния в начало координат [5].

Решение основной задачи состоит из решения следующих трех подзадач.

Задача 1. Найти допустимое управление $\omega^0(t)$, переводящее линейную систему (2.1) за минимальное время $T = t_k - t_0$ из заданного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$ в предположении безынерционности переключения управления $\omega(t)$.

Задача 2. Найти допустимое управление $u(t)$, переводящее за минимальное время τ_j систему (2.4) из начального состояния $y_j(\nu_j^p) = (+M_j, 0, \dots, 0)$ (либо $y_j(\nu_j^p) = (-M_j, 0, \dots, 0)$) в конечное состояние $y_j(\nu_j^p + \tau_j) = (-M_j, 0, \dots, 0)$ (либо $y_j(\nu_j^p) = (+M_j, 0, \dots, 0)$).

Задача 3. Вычислить отклонение фазовых координат системы (2.1) в конечный момент времени $t = t_k$, вызванное инерционностью управления. Для вычисления оптимального инерционного управления $\omega(t)$ скорректировать время и моменты переключений оптимального безынерционного управления $\omega^0(t)$.

3. Вычислительный метод решения задачи 1

3.1. Вычисление отклонений фазовых координат при изменении величин управляющих параметров. Разделим интервал $[t_0, t_k]$ произвольно точками переключений управления ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, и полагаем для единообразия записи $\nu_j^0 = t_0$, $\nu_j^{r_j} = t_k$. Принимаем ν_j^p в качестве точек переключения квазиоптимального управления [6]. Весовые коэффициенты N_{ij} принимают различные значения N_{ij}^p на каждом p -м интервале знакопостоянства компонент вектора управления, где r_j — число интервалов знакопостоянства j -й компоненты. Квазиоптимальное управление формируется из начального условия i -фазовой координаты по алгоритму

$$\omega_j^{(i)}(t) = N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j}, \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.1)$$

В общем случае, когда вектор начальных условий $x(t_0)$ содержит все ненулевые составляющие, компоненты вектора квазиоптимального управления образуются суммированием составляющих (3.1):

$$\omega_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j}, \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.2)$$

С учетом обозначения $\hat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t)$ получаем для квазиоптимального управления (3.2) простое выражение

$$\omega_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j}, \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.3)$$

Квазиоптимальное управление представляет собой последовательность разнополярных импульсов, сформированных из начальных условий каждой фазовой координаты. Величины импульсов пропорциональны начальным условиям, взятыми с некоторыми весами \hat{N}_{ij}^p , которые различны на каждом интервале постоянства. Весовые коэффициенты \hat{N}_{ij}^p , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, находятся из решений систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{q_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=q_j+1}^{r_j} (-1)^{p-q_j} \hat{N}_{ij}^{q_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.4)$$

Решение существует, если выполнено условие полной управляемости (2.3).

Квазиоптимальное управление (3.3) обладает рядом важных свойств. Во-первых, оно переводит систему из *любого* начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$. Во-вторых, из (3.4) непосредственно видно, что весовые коэффициенты \hat{N}_{ij}^p не зависят от начальных условий и поэтому *вычисляются предварительно до начала процесса управления*. Это свойство резко упрощает реализацию квазиоптимального управления (3.3). В-третьих, квазиоптимальное управление является своеобразной кусочно-постоянной аппроксимацией искомого оптимального управления и содержит информацию о его структуре (т. е. о знаке оптимального управления в начальный момент $t = t_0$ и о моментах переключения оптимального управления).

Квазиоптимальное и оптимальное управления в общем случае имеют разные моменты переключений и время перевода и, как следствие этого, разные величины управлений: оптимальное по быстродействию управление принимает предельно допустимые значения $\pm M_j$, а квазиоптимальное управление имеет различные величины управляющих воздействий на каждом интервале знакопостоянства. Суть предлагаемого метода вычисления оптимального управления состоит в выравнивании величин квазиоптимального управления до предельных значений $\pm M_j$, $j = \overline{1, m}$, с которыми формируется оптимальное по быстродействию управление линейной системой (2.1). При выравнивании управляющих воздействий изменяются моменты переключений квазиоптимального управления: они стремятся к моментам переключений оптимального управления.

Итак, задав произвольно моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$, решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.5) и находим весовые коэффициенты \hat{N}_{ij}^p . Формируем согласно (3.3) квазиоптимальное управление. Отклонение величины квазиоптимального управления от соответствующего предельно допустимого значения оптимального управления для j -й компоненты на p -м интервале составляет

$$\Delta\omega_j^p = M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j}, \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.5)$$

Введем обозначение $S_j(p) = \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t)$, $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$. Отклонения $\Delta\omega_j^p$ вызывают следующие отклонения фазовых координат в конечный момент t_k :

$$\Delta\hat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \quad (3.6)$$

3.2. Вычисление отклонений фазовых координат при вариации моментов переключений управления. Рассмотрим решение уравнения (2.1) в конечный момент времени $t = t_k$ для кусочно-постоянного управления $\omega(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$ (включая начальный момент $t_0 = \nu_j^{p-1}$ и конечный момент $t_k = \nu_j^{r_j}$ в число переключений для компактной формы записи), и принимают значения $\omega_j(t) = \omega_j^p$, $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$. Изменим моменты переключений ν_j^p на $\Delta\nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$, а конечный момент t_k — на Δt_k . Для отклонения фазовых координат $\Delta\tilde{x}(t_k)$, порожденных вариацией моментов переключений управления, получим выражение

$$\Delta\tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^p}^{\nu_j^p + \Delta\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[\omega_j^p - \omega_j^{p+1} \right] d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{t_k}^{t_k + \Delta t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \omega_j^{r_j} d\tau.$$

Если $\Delta\nu_j^p$ и Δt_k достаточно малы (а это, как показано ниже, достигается выбором хорошего начального приближения), то можно записать следующее приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю $\Delta\nu_j^p$ и Δt_k :

$$\Delta\tilde{x}(t_k) \cong \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \left[\omega_j^p - \omega_j^{p+1} \right] \Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \omega_j^{r_j} \Delta t_k. \quad (3.7)$$

3.3. Уравнение баланса отклонений. Отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$, вызванное отличием управляющих параметров от предельно допустимых значений, должно быть скомпенсировано отклонением $\Delta\tilde{x}(t_k)$, вызванным изменением моментов переключений и конечного момента. Должно выполняться уравнение баланса отклонений

$$\Delta\hat{x}(t_k) + \Delta\tilde{x}(t_k) = 0. \quad (3.8)$$

Подставим в (3.8) выражения (3.6) и (3.7). Получим систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \left[\omega_j^p - \omega_j^{p+1} \right] \Delta \nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \omega_j^{r_j} \Delta t_k + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \quad (3.9)$$

Для нахождения оптимального управления (а не просто допустимого) необходимо перейти к определению числа и расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. Для этого необходимо установить связь между отклонениями ($\Delta \nu_j^p$) моментов переключений и отклонениями ($\Delta \hat{\psi}(t_0)$) начальных условий нормированной сопряженной системы. Такая связь была найдена [7]:

$$\Delta \nu_j^p \cong \left\{ [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} \times [B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta \hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (3.10)$$

Следует подчеркнуть, что несмотря на кажущуюся сложность, выражение (3.10) имеет простой вид благодаря матрицам размера $n \times 1$ и $1 \times n$, входящим в (3.10). Соотношение (3.10) компактно запишем так:

$$\Delta \nu_j^p \cong \mathcal{L}(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (3.10)'$$

3.4. Вычисление оптимального по быстродействию управления линейной системой. Подставив (3.10)' в (3.9), получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n - 1)$ отклонение компонент вектора $\Delta \hat{\psi}(t_0)$ начального условия нормированной сопряженной системы $\hat{\psi}(t)$ и отклонение Δt_k конечного момента t_k :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \left[\omega_j^p - \omega_j^{p+1} \right] \mathcal{L}(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}(t_0) + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \omega_j^{r_j} \Delta t_k + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \rho \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \quad (3.11)$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.11) и находим $\Delta \hat{\psi}(t_0)$ и Δt_k . По формуле (3.10) вычисляем $\Delta \nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$. Проверяем выполнение условия

$$\max_{j,p} [|\Delta \nu_j^p|, |\Delta t_k|] \leq \gamma(t_k - t_0), \quad 0 < \gamma < 1. \quad (3.12)$$

Если (3.12) выполняется, то находим новые значения конечного момента, моментов переключений и начального условия сопряженной системы:

$$t_k^{s+1} = t_k^s + \Delta t_k^s, \quad \nu_j^{p,s+1} = \nu_j^{p,s} + \Delta \nu_j^{p,s}, \quad \hat{\psi}^{s+1}(t_0) = \hat{\psi}^s(t_0) + \Delta \hat{\psi}^s(t_0),$$

где s — номер итерации. Если (3.12) не выполняется, то полагаем: $t_k^{s+1} = t_k^s + \rho \Delta t_k^s$, $\nu_j^{p,s+1} = \nu_j^{p,s} + \rho \Delta \nu_j^{p,s}$, $\hat{\psi}^{s+1}(t_0) = \hat{\psi}^s(t_0) + \rho \Delta \hat{\psi}^s(t_0)$, где коэффициент ρ вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{\gamma(t_k - t_0)}{\max_{j,p} [|\Delta \nu_j^p|, |\Delta t_k|]}.$$

В результате максимальное отклонение на этой итерации принимается равным предельно допустимому значению, а остальные отклонения уменьшаются пропорционально в ρ раз и компенсируется не все отклонение $\Delta \hat{x}(t_k)$, а лишь его ρ часть. Ограничение больших отклонений позволяет избежать расходимости итерационного процесса вычислений из-за приближенности выражений (3.7) и (3.10). Процесс вычислений заканчивается, если $\|x(t_k^s)\| \leq \varepsilon$, где ε задано и характеризует точность перехода в начало координат.

3.5. Задание начального приближения. Задание хорошего начального приближения значительно уменьшает число итераций и, следовательно, уменьшает вычислительные затраты. Для этого используем изложенный в [5, 8] метод деления области начальных условий $x(t_0) \in D$ на k подмножеств достижимости Y_c , $c = \overline{1, k}$, с различными значениями весовых коэффициентов $N_{ij}^{p,c}$, моментов переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$, и времени перевода T_c для каждого подмножества, полагая $T_{c+1} > T_c$. Достаточно просто такое деление осуществляется совокупностью гиперплоскостей. Каждая гиперплоскость является опорной для некоторого вполне определенного подмножества начальных условий. Каждая опорная гиперплоскость имеет единственный нормальный вектор, направленный внутрь множества достижимости, который является вектором начальных условий сопряженной системы. Нормированный (единичный) вектор начальных условий определяется через направляющие косинусы. Оптимальное по быстродействию управление выражается с использованием нормированного вектора начальных условий сопряженной системы $\hat{\psi}(t_0)$ следующим образом:

$$\omega_j^{(0)}(t) = M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \hat{\Phi}(t, t_0) \hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m},$$

где $\hat{\Phi}(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ сопряженной системы. Из этого выражения непосредственно видно, что задание нормированного вектора начального условия $\hat{\psi}(t_0)$ позволяет вычислить моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$, оптимального по быстродействию управления. В результате для целой подобласти начальных условий $x(t_0) \in Y_c$, для которых выбранная гиперплоскость является опорной, удастся предварительно (т. е. до начала процесса управления) вычислить *приближенные* значения моментов переключений $\nu_j^{p,c}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$, $c = \overline{1, k}$, и времени $T_c = t_k^c - t_0$ искомого оптимального управления. Задав моменты переключений $\nu_j^{p,c}$ на интервале $[t_0, t_k^c]$, вычисляем предварительно до начала процесса управления весовые коэффициенты $N_{ij}^{p,c}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, $c = \overline{1, k}$, решая системы линейных алгебраических уравнений (3.4). С этими значениями весовых коэффициентов формируем квазиоптимальное управление (3.3).

Важно отметить, что деление области начальных условий на подобласти на основе аппроксимации областей достижимости совокупностью гиперплоскостей позволяет получить близкие к оптимальным значения моментам переключений и времени искомого оптимального управления. Поэтому сформированное квазиоптимальное управление близко к оптимальному и нескольких итераций достаточно для вычисления оптимального управления с требуемой точностью.

4. Решение задачи 2

Это задача оптимального по быстродействию перевода ограниченным управлением (2.5) линейной системы из точки, находящейся на первой фазовой оси, в симметричную точку на этой же оси. В силу симметрии относительно начала координат начальной и конечной точек и их последовательного чередования оптимальное управление также симметрично: $u_j^p(\nu_j^p) = -u_j^{p+1}(\nu_j^{p+1})$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$, где $u_j^p(\nu_j^p)$ — оптимальное по быстродействию управление, соответствующее точке ν_j^p . Наличие симметрии упрощает вычислительный процесс и позволяет ограничиться рассмотрением только одного перехода.

Следует также отметить, что компоненты вектора управления y_j , $j = \overline{1, m}$, могут иметь различную физическую природу и поэтому имеют различное математическое описание (2.4) и, как следствие, различные времена оптимального процесса τ_j , $j = \overline{1, m}$.

На рисунке приведена качественная картина переключения инерционного управления $\omega_j(t)$, показаны моменты (ν_j^p) начала переключения и время (τ_j) переключения. Пунктиром показано безынерционное переключение управляющего параметра $(\omega_j^0(t))$.

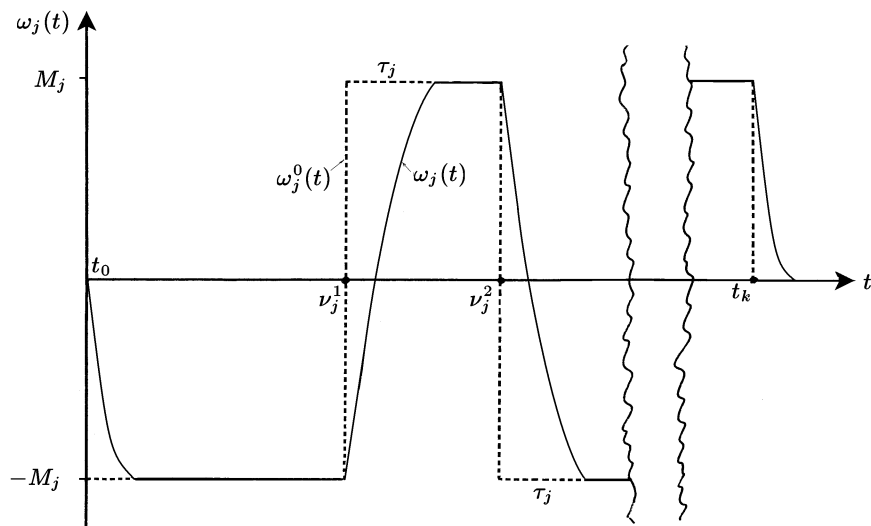


Рис. Переключение управляющего параметра $\omega_j(t)$

Если в задаче 1 начальное условие $x(t_0) = x_0 \in D$ может принимать любое значение из области D , то в задаче 2 начальное условие фактически принимает единственное значение. Поэтому нет необходимости разрабатывать специальный метод решения задачи 2. Достаточно предварительно любым из методов, например [9], найти оптимальное управление $u_j^0(t)$, $j = \overline{1, m}$, запомнить времена τ_j , $j = \overline{1, m}$, оптимального процесса и впоследствии реализовать оптимальное управление в моменты ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$.

5. Метод решения задачи 3

5.1. Вычисление отклонения, вызванного инерционностью управления. Итак, найдено оптимальное безынерционное управление, переводящее систему (2.1) из заданного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$.

Выпишем решение уравнения (2.1) в конечный момент времени $t = t_k$ для оптимального безынерционного управления, компоненты которого переключаются в моменты времени ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$. Это управление переводит систему в заданное конечное

состояние $x(t_k)$, которое не обязательно нулевое. (В [5] показано, как задача перевода в $x(t_k) \neq 0$ сводится преобразованием начального и конечного условий к решению задачи перевода в $x(t_k) = 0$.) Если подставить в решение инерционное управление $\omega(t)$, то система (2.1) будет переведена в момент времени $t = t_k$ в некоторое другое конечное состояние $\hat{x}(t_k)$. Отклонение $\Delta\hat{x}(t_k) = \hat{x}(t_k) - x(t_k)$ вызывается инерционностью управления, т. е. отличием инерционного управления от безынерционного управления только на интервалах переключения $t \in [\nu_j^p, \nu_j^p + \tau_j]$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$. Отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$ равно

$$\Delta\hat{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \xi)B_j(\xi)\omega_j(\xi) d\xi, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.1)$$

Процесс изменения управляющего параметра $\omega_j(t)$ на интервале $t \in [\nu_j^p, \nu_j^p + \tau_j]$ может быть представлен как первая компонента решения линейного дифференциального уравнения (2.4):

$$y_j(t) = \int_{\nu_j^p}^t \tilde{\Phi}(t, \xi)D_j(\xi)u_j^0(\xi) d\xi + \tilde{\Phi}(t, \nu_j^p)y_j(\nu_j^p), \quad p = \overline{1, r_j - 1},$$

где $u_j^0(t)$ — оптимальное управление, вычисленное при решении задачи 2; $\tilde{\Phi}(t, \nu_j^p)$ — фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения (2.4); $y_j(\nu_j^p) = (+M_j, 0, \dots, 0)$ или $y_j(\nu_j^p) = (-M_j, 0, \dots, 0)$ (соответствующее начальное условие). Вне интервалов переключений инерционное управление совпадает с оптимальным безынерционным управлением.

Отклонение (5.1) должно быть скомпенсировано отклонением фазовых координат, вызванным изменением начала моментов переключений инерционного управления и изменением конечного момента.

5.2. Отклонение фазовых координат при вариации конечного момента и моментов переключений управления. Для отклонения фазовых координат в конечный момент $t = t_k$ справедливо выражение (3.7):

$$\Delta\tilde{x}(t_k) \cong \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p)B_j(\nu_j^p) \left[\omega_j^p - \omega_j^{p+1} \right] \Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k)\omega_j^{r_j} \Delta t_k.$$

Учитывая, что $\omega_j^p = M_j S_j(p)$, а $\omega_j^{p+1} = M_j S_j(p+1)$, можно записать $\omega_j^p - \omega_j^{p+1} = 2M_j S_j(p)$ (принимая во внимание, что $S_j(p+1) = -S_j(p)$). В результате имеем

$$\Delta\tilde{x}(t_k) \cong 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p)B_j(\nu_j^p)M_j S_j(p)\Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k)M_j S_j(r_j)\Delta t_k. \quad (5.2)$$

5.3. Уравнение баланса отклонений. Отклонение фазовых координат $\Delta\hat{x}(t_k)$ (5.1), вызванное инерционностью переключения управления, должно быть скомпенсировано отклонением $\Delta\tilde{x}(t_k)$ (5.2), порожденным вариацией моментов переключений управления и конечного момента

$$\Delta\hat{x}(t_k) + \Delta\tilde{x}(t_k) = 0. \quad (5.3)$$

Подставим в (5.3) выражения (5.1), (5.2) и соотношение (3.10), устанавливающее связь между отклонениями моментов переключений и отклонениями начальных условий нормированного вектора сопряженной системы. Получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n-1)$ отклонение $\Delta\hat{\psi}_i(t_0)$ и отклонение Δt_k :

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \mathcal{L}(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}(t_0) + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) M_j S_j(r_j) \Delta t_k + \Delta \hat{x}(t_k) = 0. \quad (5.4)$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений (5.4) и находим $\Delta \hat{\psi}(t_0)$ и Δt_k . По формуле (3.10) вычисляем отклонения моментов переключений $\Delta \nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$. Из-за приближенности выражений (5.2) и (3.10) необходима итерационная процедура вычисления моментов переключений и конечного момента.

Важно отметить, что для уменьшения числа итераций целесообразно в качестве начального *приближения* сразу сдвинуть влево по оси времени на $(-\mu\tau_j)$ начало каждого момента переключения инерционного управления, т. е. принять $\nu_j^{p,0} = \nu_j^p - \mu\tau_j$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$. Здесь ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$, — моменты переключений найденного при решении задачи 1 оптимального безынерционного управления. Параметр $\mu \in [0.5, 1]$ зависит от размера ℓ системы (2.4) и определяется из условия прохождения решения $\omega(t)$ через нуль.

6. Моделирование и результаты вычислений

В качестве тестового примера рассмотрим систему третьего порядка, которая рассматривалась в [10] и в ряде других работ:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(t_0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_3 &= b\omega, & x_3(t_0) &= x_{30}, & |\omega| &\leq M. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Предположим, что инерционное управление $\omega(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(t_0) &= \pm M, \\ \dot{y}_2 &= du, & y_2(t_0) &= 0, & |u| &\leq L. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Принимаем следующими численные значения коэффициентов и ограничений: $b = 4$, $M = 5$, $L = 100$. Рассмотрим два значения параметра τ : 1) $\tau = 0.1$ (при $d = 40$); 2) $\tau = 0.3$ (при $d = 4.444$).

В [8] изложен метод построения аппроксимирующей конструкции, и в качестве тестовой рассмотрена система (6.1), для которой проведены необходимые вычисления.

Ограниченная область начальных условий $x(t_0) \in D$ разделена гиперплоскостями на подобласти достижимости с различными временами перевода системы (6.1) в начало координат. Начальное условие $x(t_0) = (7, -10, 15)$ принадлежит подобласти, для всех точек которой получено *единое начальное приближение*: $\hat{\psi}(t_0) = (-1, -0.817835, -0.308690)$. Этому значению $\hat{\psi}(t_0)$ соответствуют следующие моменты переключений: $\nu^{1,0} = 0.590957$, $\nu^{2,0} = 1.044713$. Приближенное время перевода $t_k^0 \approx 1.69$. Весовые коэффициенты, найденные из решения систем линейных алгебраических уравнений (3.4) и “прикрепленные” к опорной гиперплоскости, следующие: $N_1^1 = -1.437645$, $N_1^2 = 3.652127$, $N_1^3 = -1.251517$, $N_2^1 = -1.593711$, $N_2^2 = 3.045977$, $N_2^3 = -0.682356$, $N_3^1 = -0.810272$, $N_3^2 = 0.687448$, $N_3^3 = -0.128777$. Оптимальное безынерционное управление имеет последовательность $(-M; +M; -M)$. Это позволяет еще до решения задачи 1 задать и установить значение $\omega(t)$ в начальный момент времени $t = t_0$: $\omega(t_0) = -M$. В табл. 1 приведены ре-

Таблица 1.

s	ν^1	ν^2	t_k	$\hat{\psi}_1(t_0)$	$\hat{\psi}_2(t_0)$	$\hat{\psi}_3(t_0)$	$\ x(t_k)\ $
0	0.590957	1.044713	1.690000	-1	-0.817835	-0.308690	3.552596
1	0.756298	1.225418	1.688239	-1	-0.990858	-0.463390	0.210288
2	0.780367	1.278838	1.746941	-1	-1.029603	-0.498982	0.019449
3	0.778973	1.276547	1.745149	-1	-1.027760	-0.497198	0.000036
4	0.778972	1.276548	1.745152	-1	-1.027760	-0.497198	0.000000

результаты вычислений на каждой итерации (s) оптимального безынерционного управления при решении задачи 1. Время переключения управления $u(t)$ для принятой модели (6.2) может быть найдено аналитически и связано с параметрами системы соотношением $\tau = (2bM/dL)^{1/2}$. Управляющий параметр $u(t)$ при переключении в момент ν^1 управления $\omega(t)$ с $\omega = -M$ на $\omega = +M$ принимает значения:

$$u(t) = \begin{cases} +L & \text{при } \nu^1 \leq t < \nu^1 + 0.5\tau, \\ -L & \text{при } \nu^1 + 0.5\tau \leq t < \nu^1 + \tau, \\ 0 & \text{при } \nu^1 + \tau \leq t < \nu^2, \end{cases}$$

а при переключении в момент ν^2 с $\omega = +M$ на $\omega = -M$ имеем:

$$u(t) = \begin{cases} -L & \text{при } \nu^2 \leq t < \nu^2 + 0.5\tau, \\ +L & \text{при } \nu^2 + 0.5\tau \leq t < \nu^2 + \tau, \\ 0 & \text{при } \nu^2 + \tau \leq t < t_k. \end{cases}$$

В табл. 2 (слева) приведены результаты вычислений оптимального инерционного управления для $\tau = 0.1$. В качестве начального приближения взяты моменты переключений и время оптимального безынерционного управления: $\nu^{1,0} = 0.778972$, $\nu^{2,0} = 1.276548$, $t_k^0 = 1.745152$. В табл. 2 (справа) приведены результаты вычислений оптимального инерционного управления для $\tau = 0.1$, когда в качестве начального приближения сразу взяты сдвинутые значения: $\nu^{1,0} = \nu^1 - 0.5\tau$, $\nu^{2,0} = \nu^2 - 0.5\tau$. Из таблицы следует, что достаточно трех итераций для вычисления оптимального управления с точностью 10^{-3} . Сдвиг сразу на (-0.5τ) моментов переключений при задании начального приближения дополнительно уменьшает на две число итераций при вычислении оптимального инерционного управления с той же точностью. Это означает, что одной итерации достаточно для вычисления оптимального инерционного управления с точностью 10^{-3} .

Таблица 2.

s	ν^1	ν^2	t_k	$\ x(t_k)\ $	ν^1	ν^2	$x(t_k)$	$\ x(t_k)\ $
0	0.778972	1.276548	1.745152	1.2078	0.728972	1.226548	1.745152	0.0045
1	0.732039	1.232872	1.751674	0.0251	0.729426	1.227445	1.746035	0.0009
2	0.729590	1.228074	1.746966	0.0046	—	—	—	—
3	0.729445	1.227567	1.746247	0.0007	—	—	—	—

В табл. 3 приведены результаты вычислений на каждой итерации оптимального безынерционного управления для другого начального условия $x(t_0) = (3, 5, 7)$. Начальное условие принадлежит подобласти, для всех точек которой получено единое начальное приближение $\hat{\psi}(t_0) = (-1, -1.588546, -1.234744)$. Этому значению $\hat{\psi}(t_0)$ соответствуют следующие моменты переключений: $\nu^1 = 1.356189$, $\nu^2 = 1.820902$. Приближенное время перевода системы $t_k^0 \approx 3.3$. Весовые коэффициенты, найденные из решения систем линейных алгебраических уравнений (3.5) и “прикрепленные” к опорной гиперплоскости, следующие: $N_1^1 = -0.184065$, $N_1^2 = 1.04036$, $N_1^3 = -0.158098$, $N_2^1 = -0.397401$, $N_2^2 = 1.692652$, $N_2^3 = -0.167430$, $N_3^1 = -0.397392$, $N_3^2 = 0.828864$, $N_3^3 = -0.065070$.

Таблица 3.

s	ν^1	ν^2	t_k	$\hat{\psi}_1(t_0)$	$\hat{\psi}_2(t_0)$	$\hat{\psi}_3(t_0)$	$\ x(t_k)\ $
0	1.356189	1.820902	3.300000	-1	-1.588546	-1.234744	74.288028
1	1.436108	2.753912	2.985607	-1	-2.095010	-1.977458	22.05621
2	1.118324	2.386807	2.886965	-1	-1.752568	-1.334612	2.5168
3	1.176137	2.620149	3.238022	-1	-1.898143	-1.540828	0.463817
4	1.168104	2.584832	3.183456	-1	-1.876468	-1.509676	0.014219
5	1.167847	2.583711	3.181727	-1	-1.875779	-1.508690	0.0000138

Оптимальное безынерционное управление имеет последовательность $(-M, +M, -M)$. Это позволяет еще до решения задачи 1 задать и установить значение $\omega(t)$ в начальный момент времени $t = t_0$: $\omega(t_0) = -M$.

В табл. 4 (слева) приведены результаты вычислений оптимального инерционного управления при $\tau = 0.3$. В качестве начального приближения взяты моменты переключений и время оптимального безынерционного управления: $\nu^{1,0} = 1.167847$, $\nu^{2,0} = 2.583711$, $t_k^0 = 3.181727$. Справа приведены результаты вычислений оптимального инерционного управления для $\tau = 0.3$, когда в качестве начального приближения сразу взяты сдвинутые значения: $\nu^{1,0} = \nu^1 - 0.5\tau = 1.017847$, $\nu^{2,0} = \nu^2 - 0.5\tau = 2.433711$.

Таблица 4.

s	ν^1	ν^2	t_k	$\ x(t_k)\ $	ν^1	ν^2	$x(t_k)$	$\ x(t_k)\ $
0	1.167847	2.583711	3.181727	13.3922	1.017847	2.433711	3.181727	0.1049
1	1.030868	2.477603	3.243462	0.6511	1.019566	2.438719	3.188298	0.0201
2	1.020678	2.448060	3.204770	0.1183	1.019706	2.439792	3.190145	0.0059
3	1.019654	2.441251	3.193231	0.0369	1.019699	2.439951	3.190493	0.0006
4	1.019690	2.439970	3.190573	0.0086	—	—	—	—
5	1.019695	2.439946	3.190541	0.0007	—	—	—	—

Из таблицы следует, что достаточно пяти итераций для вычисления оптимального управления с точностью 10^{-3} . Сдвиг сразу на (-0.5τ) моментов переключений при задании начального приближения уменьшает число итераций на два при вычислении оптимального инерционного управления с той же точностью.

Рассмотрим влияние инерционности управления на точность перевода системы в заданное конечное состояние.

В табл. 5 приведена погрешность, которая возникает в конечный момент времени $t = t_k$, если не учитывать инерционность управления при переводе системы (6.1) из начального состояния $x(t_0) = (3, 5, 7)$ в начало координат. Рассмотрены различные значения параметра τ .

В табл. 6 приведены погрешности при переводе системы из другого начального условия $x(t_0) = (7, -10, 15)$.

Таблица 5.

τ	0.0125	0.025	0.05	0.1	0.3
$\ x(t_k)\ $	0.5812	1.1604	2.3129	4.5927	13.3922

Таблица 6.

τ	0.0125	0.025	0.05	0.1	0.3
$\ x(t_k)\ $	0.1528	0.3052	0.6083	1.2084	3.5290

Из таблиц видно, что погрешность весьма значительна и необходим учет инерционности при вычислении оптимального управления.

Заключение

Деление области начальных условий на области достижимости и аппроксимация каждой области достижимости совокупностью гиперплоскостей позволяет получить для каждого начального условия хорошее начальное приближение, т. е. найти близкие к оптимальным значения времени, моментов переключений искомого оптимального управления и одновременно вычислить весовые коэффициенты для формирования квазиоптимального управления. Весовые коэффициенты не зависят от начальных условий и вычисляются предварительно до начала процесса управления. Квазиоптимальное управление переводит систему из любого начального состояния в начало координат и является своеобразной кусочно-постоянной аппроксимацией искомого оптимального управления и содержит информацию о его структуре. Применение квазиоптимального управления в итерационной процедуре нахождения оптимального по быстродействию управления позволяет значительно уменьшить вычислительные затраты. Использование в итерационной процедуре вычисления оптимального инерционного управления в качестве начального приближения оптимального безынерционного управления значительно уменьшает число необходимых итераций, а сдвиг сразу моментов переключений дополнительно уменьшает число итераций. На каждой итерации интегрирование ведется не на всем интервале управления $[t_0, t_k]$, а только на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений, что резко сокращает вычислительные затраты и делает возможным вычисление оптимального инерционного управления в реальном времени.

Литература

1. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С. Принцип максимума в теории оптимальных процессов // Тр. Первого конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — С. 68–83.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Синтез оптимальных обратных связей в классе инерционных управлений // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 2. — С. 22–49.
4. Матюхин В.И. Управляемость механических систем при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 12. — С. 75–92.
5. Александров В.М. Вычисление оптимального управления в реальном времени // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 10. — С. 1778–1800.
6. Александров В.М. Оптимальное по быстродействию позиционно-программное управление линейными динамическими системами // Сибирские электронные математические известия. — 2009. — Т. 6. — С. 385–439.
7. Александров В.М. Последовательный синтез оптимального по быстродействию управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1999. — Т. 39, № 9. — С. 1464–1478.
8. Александров В.М. Построение аппроксимирующей конструкции для вычисления и реализации оптимального управления в реальном времени // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 1. — С. 1–19.
9. Александров В.М. Численный метод решения задачи линейного быстродействия // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 6. — С. 918–931.
10. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1976.

*Поступила в редакцию 18 ноября 2013 г.,
в окончательном варианте 21 января 2014 г.*

