

УДК 532.5

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

С. Ахмад, М. Ашраф, К. Али\*

Университет им. Бахауддина Закария, 60800 Мултан, Пакистан

\* Инженерно-технологический университет им. Мухаммеда Наваза Шарифа,  
60000 Мултан, Пакистан

E-mails: sohailkhan1058@gmail.com, muhammadashraf@bzu.edu.pk, kshifali\_381@yahoo.com

С учетом диссипации энергии численно исследуется тепломассоперенос в течении вязкой несжимаемой микрополярной жидкости через резистивную пористую среду, находящуюся в канале с плоскими стенками. С использованием преобразования подобия система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, численное решение которой для различных значений параметров задачи построено методом квазилинеаризации. Установлено, что вследствие диссипации энергии в вязкой жидкости скорости переноса тепла и массы как на верхней стенке канала, так и на нижней увеличиваются.

Ключевые слова: вязкая диссипация, микрополярная жидкость, пористая среда, квазилинеаризация.

DOI: 10.15372/PMTF20190603

**Введение.** Микрополярные жидкости содержат микроструктурированные полимерные добавки и принадлежат к классу неньютоновских жидкостей. Вращение микрочастиц приводит к увеличению интенсивности гидродинамического потока, что позволяет использовать микрополярные жидкости в машиностроении и биотехнологиях. Примерами микрожидкостей являются феррожидкости, коллоидные растворы, полимерные материалы, кровь животных, краски и т. п. В работах [1, 2] впервые предложены уравнения, описывающие течение микрополярных жидкостей. В модели течения микрополярной жидкости содержится дополнительное уравнение, выражающее закон сохранения локального момента импульса. Эта модель развита в работах [3, 4], там же приведены примеры применения микрополярных жидкостей.

Результаты исследований процессов тепломассопереноса применяются при решении прикладных задач биотехнологий и геофизики (циркуляция воздуха в дыхательных системах, диффузия в бинарных газах, сушка пористых твердых поверхностей, процессы горения в ракетных двигателях, производство керамики, полимерных материалов и т. п.). В последнее время проводятся интенсивные исследования процессов тепломассопереноса в течениях микрополярных жидкостей в каналах. В работе [5] при изучении течения микрополярной жидкости в канале использовались методы гомотопии. В [6] с помощью метода

дифференциальных преобразований исследовано течение микрополярной жидкости в канале с пористыми стенками. Установлено, что число Рейнольдса практически не влияет на температуру и концентрацию жидкости. В работе [7] численно исследовано течение микрополярной жидкости в канале, одна стенка которого сжимается, а вторая — неподвижна. В [8] при изучении течения микрополярной жидкости использовались метод наименьших квадратов и метод Рунге — Кутты четвертого порядка. В работе [9] решена задача, поставленная в [8] с использованием метода гомотопических возмущений [10], найденные решения сравнивались с решением, полученным методом Рунге — Кутты четвертого порядка. В [11] методом гомотопического анализа исследовано течение микрополярной жидкости в канале с расширяющимися и сжимающимися стенками. Течение магнитогидродинамической микрополярной жидкости через пористую среду изучено в [12]. На основе результатов численного моделирования в работах [13, 14] установлено, что в случае течения микрополярной жидкости поверхностное трение на стенках канала меньше, чем в случае течения ньютоновской жидкости.

В данной работе с учетом диссипации энергии численно исследуется тепломассоперенос в течении вязкой несжимаемой микрополярной жидкости через резистивную пористую среду, находящуюся в канале с плоскими стенками.

**1. Физическая модель.** Рассматривается установившееся ламинарное течение вязкой несжимаемой микрополярной жидкости через канал, заполненный резистивной пористой средой. Температура и концентрация раствора на нижней стенке канала обозначены через  $T_1$  и  $C_1$ , на верхней — через  $T_2$  и  $C_2$  (рис. 1). Стенки канала параллельны оси  $x$  и имеют координаты  $y = \pm h$  ( $2h$  — ширина канала).

Дифференциальные уравнения, описывающие течение, перенос тепла и изменение концентрации, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu + k}{k^*} u + k \frac{\partial N}{\partial y}, \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu + k}{k^*} v - k \frac{\partial N}{\partial x}, \\ \rho \left( u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= -\frac{k}{j} \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\mu_s}{j} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

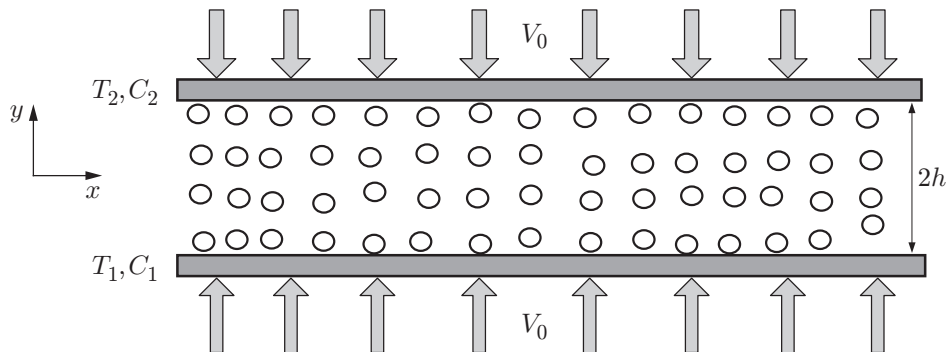


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D^* \frac{\partial^2 C}{\partial y^2},$$

где  $x, y$  — координаты осей, направленных вдоль и поперек канала;  $u, v$  — компоненты вектора скорости в направлениях  $x, y$  соответственно;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $N$  — угловая скорость микрочастиц;  $p$  — давление;  $k^*$  — коэффициент проницаемости;  $C_p$  — удельная теплоемкость;  $k$  — вихревая вязкость;  $j$  — микроинерция;  $\mu_s = \mu + k/2$  — вязкость микровращения;  $k_1$  — теплопроводность;  $D^*$  — коэффициент молекулярной диффузии;  $T$  — температура;  $C$  — концентрация.

При  $y = \pm h$  ставятся следующие краевые условия:

$$y = -h: \quad u = 0, \quad v = -v_0, \quad N = 0, \quad T = T_1, \quad C = C_1,$$

$$y = h: \quad u = 0, \quad v = v_0, \quad N \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_2, \quad C \rightarrow C_2.$$

Введем преобразования подобия

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \psi = -v_0 x f(\eta), \quad N = \frac{v_0 x}{h^2} g(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}, \quad \varphi(\eta) = \frac{C - C_2}{C_1 - C_2}, \quad (2)$$

где  $T_2 = T_1 - Ax$ ;  $C_2 = C_1 - Bx$ ;  $A, B$  — константы. Используя преобразования (2) в уравнениях (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1 + C_1) f^{iv} - \text{Re} f f''' + \text{Re} f' f'' - \varepsilon(1 + C_1) f'' - C_1 g'' = 0,$$

$$C_2 g'' + C_1 (f'' - 2g) - C_3 \text{Re} (f g' - f' g) = 0; \quad (3)$$

$$\theta'' + \text{Pe}_h (\text{Ec} f'^2 + f' \theta - f \theta') = 0, \quad \varphi'' + \text{Pe}_m (f' \varphi - f \varphi') = 0 \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$\eta = -1: \quad f = 1, \quad f' = 0, \quad g = 0, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1,$$

$$\eta = 1: \quad f = -1, \quad f' = 0, \quad g = 0, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0. \quad (5)$$

В уравнениях (3), (4) определены следующие константы:

$$\text{Re} = \frac{v_0}{v} h, \quad C_1 = \frac{k}{\mu}, \quad C_2 = \frac{\mu_s}{\mu h^2}, \quad C_3 = \frac{j}{h^2}, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{k^*},$$

$$\text{Pr} = \frac{v \rho C_p}{k_1}, \quad \text{Pe}_h = \text{Pr} \text{Re}, \quad \text{Ec} = \frac{v_0^2 x v}{h^3 C_p}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D^*}, \quad \text{Pe}_m = \text{Sc} \text{Re}.$$

Здесь  $\text{Re}$  — число Рейнольдса;  $C_1$  — параметр вихревой вязкости;  $C_2$  — параметр вязкости, обусловленной градиентом вращения;  $C_3$  — параметр плотности микроинерции;  $\varepsilon$  — параметр пористости;  $\text{Pr}$  — число Прандтля;  $\text{Pe}_h, \text{Pe}_m$  — числа Пекле, характеризующие диффузию тепла и массы соответственно;  $\text{Ec}$  — число Эккерта;  $\text{Sc}$  — число Шмидта. Наибольший интерес представляют числа Нуссельта и Шервуда

$$\text{Nu}_x = \frac{q'' x}{(T_1 - T_2) k_1} \Big|_{y=-h} = -\theta'(-1), \quad \text{Sh}_x = \frac{m'' x}{(C_1 - C_2) k_1} \Big|_{y=-h} = -\varphi'(-1)$$

( $q'', m''$  — локальные потоки тепла и массы соответственно).

**2. Метод квазилинеаризации.** Методом линеаризации строятся последовательности функций  $\{f^{(k)}\}, \{g^{(k)}\}, \{\theta^{(k)}\}, \{\varphi^{(k)}\}$ , сходящиеся к решению системы уравнений

(3), (4). Для построения последовательности  $\{f^{(k)}\}$  линеаризуем уравнение (3). Определим функцию

$$G(f, f', f'', f''', f^{iv}) = (1 + C_1)f^{iv} - \operatorname{Re} f f''' + \operatorname{Re} f' f'' - \varepsilon(1 + C_1)f''.$$

Разлагая функцию  $G$  в ряд Тейлора и удерживая в нем только члены первого порядка, находим

$$\begin{aligned} G(f^{(k)}, f^{(k)'}, f^{(k)''}, f^{(k)'''}, f^{(k)iv}) + (f^{(k+1)} - f^{(k)}) \frac{\partial G}{\partial f^{(k)}} + (f^{(k+1)'} - f^{(k)'}) \frac{\partial G}{\partial f^{(k)'}} + \\ + (f^{(k+1)''} - f^{(k)''}) \frac{\partial G}{\partial f^{(k)''}} + (f^{(k+1)'''} - f^{(k)'''}) \frac{\partial G}{\partial f^{(k)'''}} + (f^{(k+1)iv} - f^{(k)iv}) \frac{\partial G}{\partial f^{(k)iv}} = 0. \end{aligned}$$

В результате вычислений получаем

$$\begin{aligned} (1 + C_1)f^{(k+1)iv} - \operatorname{Re} f^{(k)} f^{(k+1)'''} + [\operatorname{Re} f^{(k)'} - \varepsilon(1 + C_1)]f^{(k+1)''} + \\ + \operatorname{Re} f^{(k)''} f^{(k+1)'} - \operatorname{Re} f^{(k)'''} f^{(k+1)} = \operatorname{Re} (f^{(k)'} f^{(k)''} - f^{(k)} f^{(k)'''}) + C_1 g^{(k)''}. \quad (6) \end{aligned}$$

Заменяя в обыкновенных дифференциальных уравнениях (6) производные центральными разностями, получаем уравнения для определения последовательности  $\{f^{(k)}\}$ :

$$\begin{aligned} [(1 + C_1) + h \operatorname{Re} f_i^{(k)}] f_{i-2}^{(k+1)} + [-4(1 + C_1) - 2h \operatorname{Re} f_i^{(k)} + 0,5h \operatorname{Re} (f_{i+1}^{(k)} - f_{i-1}^{(k)}) - \\ - \varepsilon(1 + C_1)h^2 - 0,5h \operatorname{Re} (f_{i+1}^{(k)} - 2f_i^{(k)} + f_{i-1}^{(k)})] f_{i-1}^{(k+1)} + [6(1 + C_1) + h \operatorname{Re} (f_{i+1}^{(k)} - f_{i-1}^{(k)}) + \\ + 2\varepsilon(1 + C_1)h^2 - h \operatorname{Re} (f_{i+2}^{(k)} - 2f_{i+1}^{(k)} + 2f_{i-1}^{(k)} - 2f_{i-2}^{(k)})] f_i^{(k+1)} + \\ + [-4(1 + C_1) + 2h \operatorname{Re} f_i^{(k)} + 0,5h \operatorname{Re} (f_{i+1}^{(k)} - f_{i-1}^{(k)}) - \varepsilon(1 + C_1)h^2 + \\ + 0,5h \operatorname{Re} (f_{i+1}^{(k)} - 2f_i^{(k)} + f_{i-1}^{(k)})] f_{i+1}^{(k+1)} + [(1 + C_1) - h \operatorname{Re} f_i^{(k)}] f_{i+2}^{(k+1)} = \\ = 0,5h \operatorname{Re} (f_{i+1}^{(k)} - f_{i-1}^{(k)}) (f_{i+1}^{(k)} - 2f_i^{(k)} + f_{i-1}^{(k)}) - h \operatorname{Re} f_i^{(k)} (f_{i+2}^{(k)} - 2f_{i+1}^{(k)} + 2f_{i-1}^{(k)} - 2f_{i-2}^{(k)}) + \\ + h^2 C_1 (g_{i+1}^{(k)} - 2g_i^{(k)} + g_{i-1}^{(k)}). \quad (7) \end{aligned}$$

Аналогично линеаризуются уравнения (4). В результате имеем систему уравнений для определения последовательностей  $\{g^{(k)}\}$ ,  $\{\theta^{(k)}\}$ ,  $\{\varphi^{(k)}\}$ :

$$\begin{aligned} C_2 g^{(k+1)''} + C_1 (f^{(k)''} - 2g^{(k+1)}) - C_3 \operatorname{Re} (f^{(k)} g^{(k+1)'} - f^{(k)'} g^{(k+1)}) = 0, \\ \theta^{(k+1)''} - \operatorname{Re}_h (f^{(k)} \theta^{(k+1)'} - f^{(k)'} \theta^{(k+1)}) - \operatorname{Ec} f^{(k)''2} = 0, \quad (8) \\ \varphi^{(k+1)''} - \operatorname{Re}_m (f^{(k)} \varphi^{(k+1)'} - f^{(k)'} \varphi^{(k+1)}) = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить решение систем уравнений (7), (8), используем следующую итерационную процедуру.

1. Выбирается начальное приближение  $f^{(0)}$ ,  $g^{(0)}$ ,  $\theta^{(0)}$ ,  $\varphi^{(0)}$ , удовлетворяющее краевым условиям (5).

2. С использованием решения линейной системы (7) определяется приближение  $f^{(1)}$ .

3. Производные в системе уравнений (8) заменяются конечными разностями и из полученной алгебраической системы находятся приближения  $g^{(1)}$ ,  $\theta^{(1)}$ ,  $\varphi^{(1)}$ .

4. После того как функции  $f^{(1)}$ ,  $g^{(1)}$ ,  $\theta^{(1)}$ ,  $\varphi^{(1)}$  определены, процедура повторяется. В результате строятся последовательности  $\{f^{(k)}\}$ ,  $\{g^{(k)}\}$ ,  $\{\theta^{(k)}\}$ ,  $\{\varphi^{(k)}\}$ , сходящиеся к функциям  $f$ ,  $g$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  соответственно.

5. Вычисления прекращаются, если выполняются неравенства

$$\max (\|f^{(k+1)} - f^{(k)}\|_{L_2}, \|g^{(k+1)} - g^{(k)}\|_{L_2}, \|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\|_{L_2}, \|\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}\|_{L_2}) < 10^{-8}.$$

**3. Результаты численного решения и их обсуждение.** Нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) с краевыми условиями (5) решалась численно с использованием метода квазилинеаризации при различных значениях числа Рейнольдса  $Re$ , параметра пористости  $\varepsilon$ , параметров микрополярной среды  $C_1, C_2, C_3$ , числа Пекле  $Pe_h$ , числа Эккерта  $Ec$  и числа Пекле  $Pe_m$ . Ниже приводятся результаты исследования влияния этих параметров на поле скорости  $F'(\eta)$ , параметр микровращения  $G(\eta)$ , температуру  $\theta(\eta)$ , концентрацию  $\varphi(\eta)$ , а также на величины  $f''(\pm 1), \theta'(\pm 1), \varphi'(\pm 1)$ . Шаг по безразмерной координате  $\eta$  выбирался таким образом, чтобы скорость потока, скорость микровращения, температура и пористость были близки к их асимптотическим значениям. В табл. 1 представлены результаты вычислений при различных значениях величины шага  $\eta$ .

В табл. 2 приведены значения сдвигового напряжения  $f''(-1), f''(1)$ , скорости теплопереноса  $\theta'(-1), \theta'(1)$  и скорости массопереноса  $\varphi'(-1), \varphi'(1)$  на обеих стенках канала при  $\varepsilon = 2,5, C_1 = 4, C_2 = 3, C_3 = 2, Pe_h = 4, Ec = 5, Pe_m = 6$  и различных значениях числа Рейнольдса, в табл. 3 — при  $Re = 10, C_1 = 4, C_2 = 3, C_3 = 2, Pe_h = 4, Ec = 5, Pe_m = 6$  и

Таблица 1

Безразмерные значения температуры  $\theta(\eta)$  при  $Re = 10, \varepsilon = 2,5, C_1 = 4, C_2 = 3, C_3 = 2, Pe_h = 4, Ec = 5, Pe_m = 6$  и различных значениях  $\eta, h$

$\eta$	$\theta$		
	$h = 0,01$	$h = 0,005$	$h = 0,0025$
-0,8	4,623 886	4,623 075	4,622 887
-0,4	5,473 856	5,473 752	5,473 746
0	3,923 333	3,923 930	3,924 093
0,4	5,014 426	5,014 323	5,014 316
0,8	3,758 809	3,757 999	3,757 811

Таблица 2

Значения сдвиговых напряжений, скоростей тепло- и массопереноса при  $\varepsilon = 2,5, C_1 = 4, C_2 = 3, C_3 = 2, Pe_h = 4, Ec = 5, Pe_m = 6$  и различных значениях  $Re$

$Re$	$f''(-1)$	$\theta'(-1)$	$\varphi'(-1)$	$f''(1)$	$\theta'(1)$	$\varphi'(1)$
6	-2,9171	25,3783	-0,3865	2,9171	-25,8847	-0,004 496
12	-2,7226	23,8979	-0,3740	2,7226	-24,3923	-0,004 419
18	-2,6037	22,9303	-0,3654	2,6037	-23,4165	-0,004 364
24	-2,5277	22,2763	-0,3595	2,5277	-22,7565	-0,004 325
30	-2,4763	21,8165	-0,3552	2,4763	-22,2925	-0,004 297

Таблица 3

Значения сдвиговых напряжений, скоростей тепло- и массопереноса при  $C_1 = 4, C_2 = 3, C_3 = 2, Pe_h = 4, Ec = 5, Pe_m = 6, Re = 10$  и различных значениях  $\varepsilon$

$\varepsilon$	$f''(-1)$	$\theta'(-1)$	$\varphi'(-1)$	$f''(1)$	$\theta'(1)$	$\varphi'(1)$
9	-3,4462	29,8477	-0,4197	3,4462	-30,3856	-0,004 70
18	-4,2297	37,0049	-0,4634	4,2297	-37,5836	-0,004 98
27	-4,8982	43,5481	-0,4967	4,8982	-44,1574	-0,005 20
36	-5,4853	49,5547	-0,5232	5,4853	-50,1879	-0,005 37
45	-6,0116	55,1120	-0,5450	6,0116	-55,7648	-0,005 51

Таблица 4

Значения сдвиговых напряжений, скоростей тепло- и массопереноса при  $Re = -6$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $Re_h = 4$ ,  $Ec = 5$ ,  $Re_m = 6$  и различных значениях  $C_1, C_2, C_3$

№ п/п	Параметры жидкости	$f''(-1)$	$\theta'(-1)$	$\varphi'(-1)$	$f''(1)$	$\theta'(1)$	$\varphi'(1)$
1	$C_1 = C_2 = C_3 = 0$ (ньютоновская жидкость)	-9,3689	88,2389	-0,6350	9,3689	-88,9670	-0,006 02
2	$C_1 = 0,6, C_2 = 0,8, C_3 = 0,6$	-6,2452	53,7636	-0,5366	6,2452	-54,4063	-0,005 40
3	$C_1 = 1,2, C_2 = 1,2, C_3 = 0,9$	-5,0668	42,5491	-0,4904	5,0668	-43,1507	-0,005 11
4	$C_1 = 1,8, C_2 = 1,6, C_3 = 1,2$	-4,5051	37,5985	-0,4660	4,5051	-38,1780	-0,004 96
5	$C_1 = 2,4, C_2 = 2,0, C_3 = 1,5$	-4,1889	34,9254	-0,4513	4,1889	-35,4916	-0,004 87

Таблица 5

Значения скорости теплопереноса при  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = 2$ ,  $Ec = 5$ ,  $Re_m = 6$  и различных значениях  $Re_h$

$Re_h$	$\theta'(-1)$	$\theta'(1)$
0,2	2,1858	-3,1460
0,4	4,4931	-5,4157
0,6	6,5229	-7,4098
0,8	8,3385	-9,1917
1,0	9,9824	-10,8036

Таблица 6

Значения скорости теплопереноса при  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = 2$ ,  $Re_h = 4$ ,  $Re_m = 6$  и различных значениях  $Ec$

$Ec$	$\theta'(-1)$	$\theta'(1)$
0,3	0,4157	-1,1005
0,6	1,4380	-2,1227
0,9	2,4602	-3,1449
1,2	3,4824	-4,1672
1,5	4,5047	-5,1894

Таблица 7

Значения скорости массопереноса при  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = 2$ ,  $Re_h = 4$ ,  $Ec = 5$  и различных значениях  $Re_m$

$Re_m$	$\varphi'(-1)$	$\varphi'(1)$
0	-0,5000	-0,4999
0,3	-0,5850	-0,3560
0,6	-0,6247	-0,2621
0,9	-0,6395	-0,1974
1,2	-0,6397	-0,1512

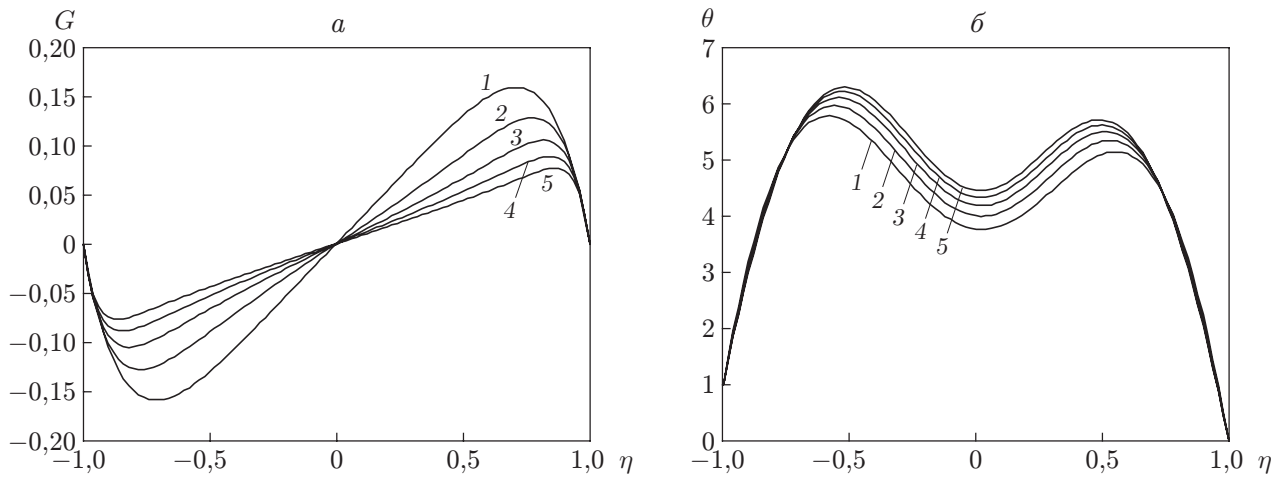


Рис. 2. Зависимости  $G(\eta)$  (а) и  $\theta(\eta)$  (б) при  $\varepsilon = 2,5$ ,  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = 2$ ,  $Re_h = 4$ ,  $Es = 5$ ,  $Re_m = 6$  и различных значениях  $Re$ :  
 1 —  $Re = 6$ , 2 —  $Re = 12$ , 3 —  $Re = 18$ , 4 —  $Re = 24$ , 5 —  $Re = 30$

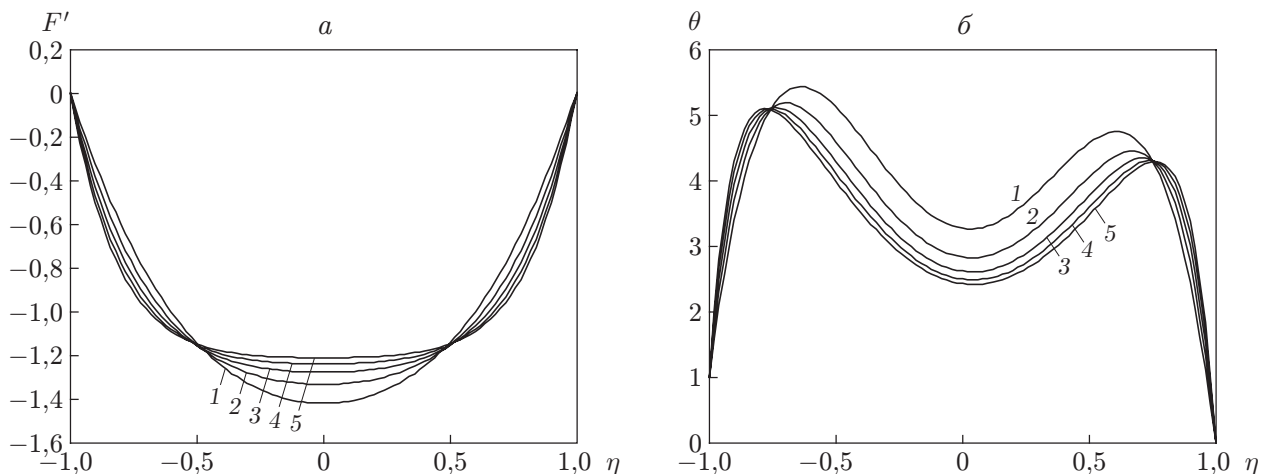


Рис. 3. Зависимости  $F'(\eta)$  (а) и  $\theta(\eta)$  (б) при  $Re = 10$ ,  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = 2$ ,  $Re_h = 4$ ,  $Es = 5$ ,  $Re_m = 6$  и различных значениях  $\varepsilon$ :  
 1 —  $\varepsilon = 9$ , 2 —  $\varepsilon = 18$ , 3 —  $\varepsilon = 27$ , 4 —  $\varepsilon = 36$ , 5 —  $\varepsilon = 45$

различных значениях параметра пористости  $\varepsilon$ , в табл. 4 — при  $Re = -6$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $Re_h = 4$ ,  $Es = 5$ ,  $Re_m = 6$  и различных значениях параметров микропористой среды  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .

В табл. 5–7 приведены значения скоростей тепло- и массопереноса при  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = 2$  и различных значениях  $Re_h$ ,  $Es$ ,  $Re_m$ .

Число Рейнольдса практически не оказывает влияния на сдвиговые напряжения  $f''(-1)$  и  $f''(1)$ , скорости теплопереноса  $\theta'(-1)$  и  $\theta'(1)$  и скорости массопереноса  $\varphi'(-1)$  и  $\varphi'(1)$  (см. табл. 2). С увеличением параметра пористости сдвиговые напряжения  $f''(-1)$  и  $f''(1)$ , скорости теплопереноса  $\theta'(-1)$  и  $\theta'(1)$  и скорости массопереноса  $\varphi'(-1)$  и  $\varphi'(1)$  увеличиваются. На обеих стенках канала величины  $\theta'(-1)$  и  $\theta'(1)$  увеличиваются с увеличением числа Пекле  $Re_h$  и числа Эккерта  $Es$ . При увеличении числа Пекле  $Re_m$  скорость массопереноса на верхней стенке канала увеличивается, на нижней — уменьшается (см. табл. 7).

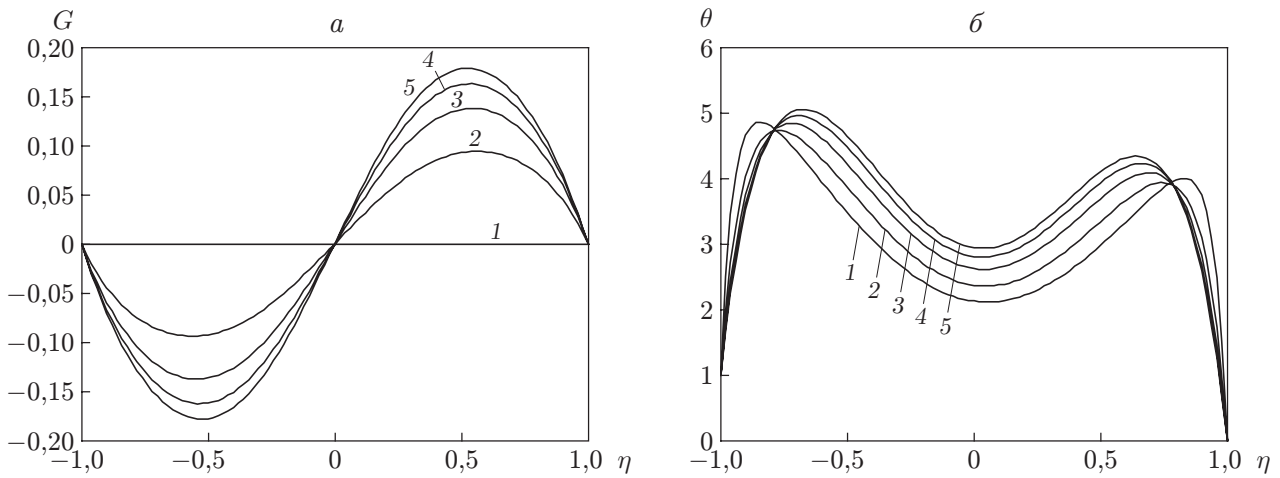


Рис. 4. Зависимости  $G(\eta)$  (а) и  $\theta(\eta)$  (б) при  $Re = -6$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $Re_h = 4$ ,  $Ec = 5$ ,  $Re_m = 6$  и различных параметрах жидкости (см. табл. 4):  
1 — жидкость 1, 2 — жидкость 2, 3 — жидкость 3, 4 — жидкость 4, 5 — жидкость 5

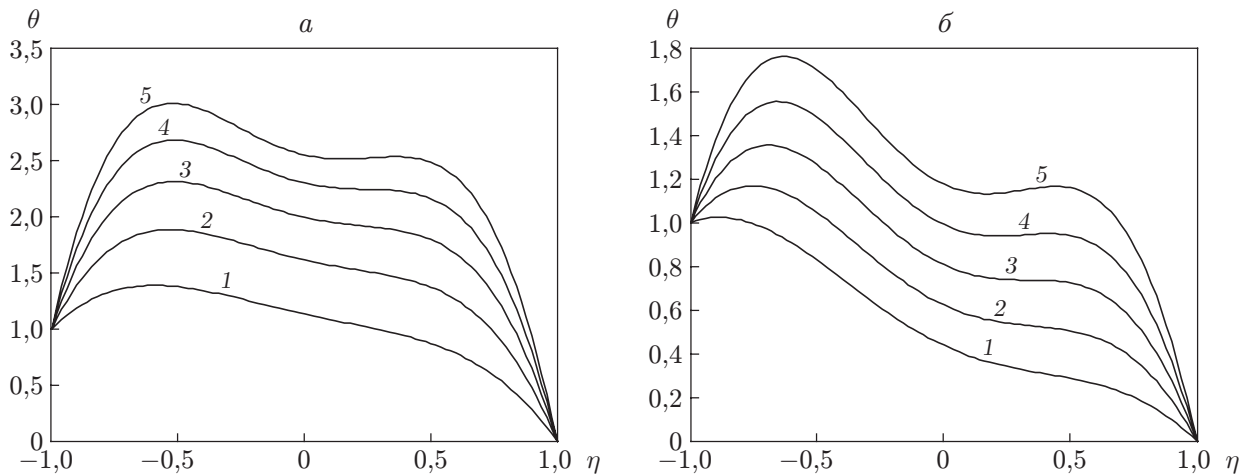


Рис. 5. Зависимости  $\theta(\eta)$  при  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = 2$ ,  $Re_m = 6$  и различных значениях чисел Пекле  $Re_h$  (а) и Эккерта  $Ec$  (б):  
а —  $Ec = 5$  (1 —  $Re_h = 0,2$ , 2 —  $Re_h = 0,4$ , 3 —  $Re_h = 0,6$ , 4 —  $Re_h = 0,8$ , 5 —  $Re_h = 1,0$ ),  
б —  $Re_h = 2$  (1 —  $Ec = 0,3$ , 2 —  $Ec = 0,6$ , 3 —  $Ec = 0,9$ , 4 —  $Ec = 1,2$ , 5 —  $Ec = 1,5$ )

С увеличением числа Рейнольдса абсолютное значение функции параметра микровращения  $G(\eta)$  уменьшается, а температура на обеих стенках канала увеличивается (рис. 2). При этом скорость и концентрация вещества практически не зависят от числа Рейнольдса.

Зависимости скорости потока  $F'$  и температуры  $\theta$  от координаты  $\eta$  при различных значениях параметра пористости  $\varepsilon$  представлены на рис. 3, зависимости  $G(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$  при различных значениях параметров микрополярной среды  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  (см. табл. 4) — на рис. 4. Из зависимостей, приведенных на рис. 3, следует, что скорость потока и температура уменьшаются при увеличении параметра пористости. На рис. 5 приведены зависимости температуры  $\theta$  от координаты  $\eta$  при различных значениях чисел Пекле  $Re_h$  и Эккерта  $Ec$ . Видно, что с увеличением обоих параметров температура увеличивается. Концентрация уменьшается с увеличением числа Пекле  $Re_m$  (рис. 6).



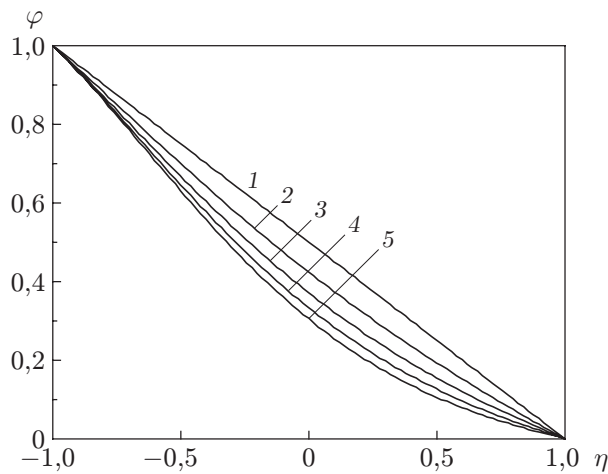


Рис. 6. Зависимости  $\varphi(\eta)$  при  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 2,5$ ,  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = 2$ ,  $Pe_h = 4$ ,  $Ec = 5$  и различных значениях  $Pe_m$ :  
 1 —  $Pe_m = 0$ , 2 —  $Pe_m = 0,3$ , 3 —  $Pe_m = 0,6$ , 4 —  $Pe_m = 0,9$ , 5 —  $Pe_m = 1,2$

**Закключение.** С учетом вязкой диссипации в работе исследовано ламинарное течение микрополярной жидкости через резистивную пористую среду, находящуюся в канале с плоскими стенками. С использованием преобразования подобия система дифференциальных уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решена численно методом квазилинеаризации. Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие выводы. С увеличением числа Рейнольдса и параметров микрополярной жидкости коэффициент поверхностного трения, скорости тепло- и массопереноса на нижней и верхней стенках канала уменьшаются. С увеличением параметров микрополярной жидкости скорость потока, скорость микровращения и температура увеличиваются, а с увеличением параметра пористости — уменьшаются. С увеличением как числа Эккерта, так и числа Пекле скорость теплопереноса на обеих стенках канала увеличивается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Eringen A. C.** Theory of micropolar fluids // J. Math. Mech. 1966. V. 16. P. 1–18.
2. **Eringen A. C.** Theory of thermo-microfluids // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 38. P. 480–496.
3. **Ariman T., Turk M. A., Sylvester N. D.** Microcontinuum fluids mechanics — a review // Intern. J. Engng Sci. 1973. V. 11. P. 905–930.
4. **Ariman T., Turk M. A., Nicholas D. S.** Applications of microcontinuum fluid mechanics // Intern. J. Engng Sci. 1974. V. 12. P. 273–293.
5. **Ziabakhsh Z., Domairry G.** Homotopy analysis solution of micro-polar flow in a porous channel with heat mass transfer // Adv. Theor. Appl. Mech. 2008. V. 1. P. 79–94.
6. **Mirzaaghaian A., Ganji D. D.** Application of differential transformation method in micropolar fluid flow and heat transfer through permeable walls // Alexandria Engng J. 2016. V. 55. P. 2183–2191.
7. **Ali K., Ashraf M.** Numerical simulation of the micropolar fluid flow and heat transfer in a channel with a shrinking and a stationary wall // J. Theor. Appl. Mech. 2014. V. 52, N 2. P. 557–569.

8. **Fakour M., Vahabzadeh A., Ganji D. D., Hatami M.** Analytical study of micropolar fluid flow and heat transfer in a channel with permeable walls // *J. Molecular Liquids*. 2015. V. 204. P. 198–204.
9. **Mirgolbabaee H., Ledari S. T., Ganji D. D.** Semi-analytical investigation on micropolar fluid flow and heat transfer in a permeable channel using AGM // *J. Assoc. Arab Univ. Basic Appl. Sci.* 2017. V. 24. P. 213–222.
10. **Sheikholeslami M., Hatami M., Ganji D. D.** Micropolar fluid flow and heat transfer in a permeable channel using analytical method // *J. Molecular Liquids*. 2014. V. 194. P. 30–36.
11. **Xinhui Si, Liancun Zheng, Ping Lin, et al.** Flow and heat transfer of a micropolar fluid in a porous channel with expanding or contracting walls // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2013. V. 67. P. 885–895.
12. **Nwabuzor P. O., Ngiangia A. T., Chukwuocha E. O.** MHD flow of micropolar fluid in a porous medium provoked by heat function and radiation // *Asian J. Phys. Chem. Sci.* 2018. V. 6, N 2. P. 1–20.
13. **Ashraf M., Kamal M. A., Syed K. S.** Numerical study of asymmetric laminar flow of micropolar fluids in a porous channel // *Comput. Fluids*. 2009. V. 38, N 10. P. 1895–1902.
14. **Shrestha G. M., Terrill R. M.** Laminar flow with large injection through parallel and uniformly porous walls of different permeability // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1968. V. 21, N 4. P. 413–432.

*Поступила в редакцию 1/IV 2019 г.,  
после доработки — 1/IV 2019 г.  
Принята к публикации 24/VI 2019 г.*

---