

УДК 532.516:532.516.5

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА В СЛОЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВИЖУЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНО ПЛАСТИНАМИ

А. Г. Петров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119516 Москва
E-mail: petrov@ipmnet.ru

Исследуются точные решения уравнений Навье — Стокса для слоя между параллельными пластинами, расстояние между которыми увеличивается пропорционально квадратному корню из времени. Получены счетное множество точных решений и порождаемый ими счетный набор непрерывных семейств точных решений. Показано, что на некоторых интервалах параметра Рейнольдса существует два решения, на некоторых — одно.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, точные решения, движущиеся параллельно пластины.

Введение. Точные решения уравнений Навье — Стокса имеют большое значение в теоретической гидродинамике. Их описание приведено во многих работах по гидродинамике (см., например, [1–3]). Получение точных решений на основе систематического изучения свойств симметрии систем дифференциальных уравнений описано в работе [4]. Обзор точных решений и методов их построения приведен в [5]. Наиболее близкой к данной работе является работа [6], в которой получена группа точных решений, подробно описанная в обзоре [7] и монографиях [3, 8]. Решение Хименца [6] описывает натекание жидкости из бесконечности на плоскость с условием прилипания на плоскости. Аналогичное решение построено в работе [9]. Установившееся течение между двумя параллельными плоскостями рассмотрено в [10]. В данной работе построено точное решение, в котором на одной пластине скорость равна нулю, а на второй пластине продольная скорость меняется пропорционально продольной координате.

Нестационарный аналог уравнений Хименца, описывающий течение жидкости между двумя движущимися пластинами, впервые получен Д. Рябушинским [11] и изложен в [12]. Теоретико-групповая природа решений типа решений Хименца и Рябушинского раскрыта в работе [13]. Более полный обзор точных решений уравнений Навье — Стокса с аналогичной симметрией приведен в [14]. Построенные ниже автомодельные решения этих уравнений описывают течение между движущимися параллельными пластинами с условием прилипания на них. Данные решения позволяют продемонстрировать важные свойства краевых задач для уравнений Навье — Стокса, обусловленные существованием и единственностью решений. От известных решений полученные решения отличаются тем, что их можно реализовать в лабораторной установке.

Работа выполнена в рамках ведомственной целевой аналитической программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.2/3604) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00535).

Постановка задачи. Рассматривается двумерное течение вязкой жидкости с компонентами скоростей $v_x(t, x, y)$, $v_y(t, x, y)$ и давлением $p(t, x, y)$ в слое жидкости $0 < y < h$, $-\infty < x < \infty$ между двумя параллельными пластинами. Пластина $y = 0$ является неподвижной, вторая пластина $y = h$ движется по закону $h(t)$. Краевая задача с условиями прилипания на пластинах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$v_x(t, x, 0) = v_x(t, x, h) = 0, \quad v_y(t, x, 0) = 0, \quad v_y(t, x, h) = \dot{h},$$

где ν — кинематическая вязкость; плотность жидкости принимается равной единице.

Компоненты вектора скорости и давления представим в следующем виде:

$$v_x = \frac{\dot{h}}{h} x U(\eta), \quad v_y = \dot{h} V(\eta), \quad p = \alpha(t) P_1(x) + \beta(t) P_2(\eta), \quad \eta = \frac{y}{h}. \quad (2)$$

Подставляя равенства (2) в уравнения (1), для функций $U(\eta)$, $V(\eta)$, $P_1(x)$, $P_2(\eta)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} U + V' &= 0, \\ x \left[\left(\frac{\ddot{h}h}{\dot{h}^2} - 1 \right) U - \eta U' + U^2 + V U' - \frac{\nu}{\dot{h}h} U'' \right] + \frac{h^2}{\dot{h}^2} \alpha(t) P_1'(x) &= 0, \\ \frac{\ddot{h}h}{\dot{h}^2} V - \eta V' + V V' - \frac{\nu}{\dot{h}h} V'' + \frac{\beta(t)}{\dot{h}^2} P_2'(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

В случае если движение пластины описывается законом

$$h = k \sqrt{|t|},$$

можно подобрать функции $\alpha(t) = (c - 3)/(4t^2)$, $\beta(t) = k^2/(4|t|)$ и $P_1(x) = x^2/2$ таким образом, что для функций $U(\eta)$, $V(\eta)$ из первых двух уравнений (1) получим краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} U + V' &= 0, \quad -2U - \eta U' + U^2 + V U' + c - 3 = -r U'', \\ U(0) = U(1) &= 0, \quad V(0) = 0, \quad V(1) = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$r = -\frac{\nu}{\dot{h}h} = -\frac{2\nu}{k^2} \operatorname{sign} t,$$

а из третьего уравнения (1) найдем давление

$$P_2(\eta) = \eta V - \frac{1}{2} V^2 - r V'(\eta), \quad p = \frac{c - 3}{4t^2} x^2 + \frac{k^2}{4|t|} P_2(\eta)$$

(параметр r — обратное число Рейнольдса). Из решения краевой задачи при заданном числе Рейнольдса необходимо определить коэффициент давления c .

То, что выполненные выше замены приводят уравнения Навье — Стокса к обыкновенной системе дифференциальных уравнений, было известно [5–14]. Однако краевая задача

для уравнений Навье — Стокса с учетом прилипания на обеих пластинах ранее не исследовалась.

Построение решений. Выполнив замены

$$\eta = (Y + 1)/2, \quad U = -1 + u, \quad V = (Y + w)/2,$$

для функций $u(Y)$, $w(Y)$, определенных на отрезке $-1 \leq Y \leq 1$, получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} u + w' &= 0, & wu' + u^2 - 4u + c + 4ru'' &= 0, \\ u(-1) &= u(1) = 1, & w(-1) &= w(1) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) является автономной, инвариантной по отношению к сдвигу $Y \rightarrow Y + b$ и более простой для анализа, чем система (3). Возможность приведения системы типа (3) к автономному виду отмечена в [13]. Заметим, что система (4) инвариантна по отношению к преобразованиям $Y \rightarrow -Y$, $u \rightarrow u$, $w \rightarrow -w$, поэтому решение можно искать в классе четных $u(Y)$ и нечетных $w(Y)$ по аргументу Y функций.

Простейшими решениями задачи (4) являются следующие решения:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{n\pi} (-1)^n \sin n\pi Y, & u &= (-1)^n \cos n\pi Y, \\ r &= -\frac{1}{n^2\pi^2}, & c &= -1. \end{aligned} \quad (5)$$

Каждое решение (5) порождает однопараметрическое семейство решений, зависящих от r . Таким образом, получаем n однопараметрических семейств решений по параметру Рейнольдса r . В частности, определяются n зависимостей коэффициента давления от числа Рейнольдса $c = f_n(r)$, поэтому $f_n(r_n) = -1$, $r_n = -1/(n^2\pi^2)$. Определить эти зависимости можно с помощью следующих утверждений.

1. В силу нечетности функций $w(Y)$ и $u'(Y)$ в задаче (4) можно заменить условия $u(1) = 1$, $w(1) = 0$ на условия $u'(0) = 0$, $w(0) = 0$.

2. Аргумент решения можно сдвигать на постоянную величину.

3. Преобразование $Y = \tilde{Y}/a$, $u = \tilde{u}$, $w = \tilde{w}/a$, $u' = \tilde{u}'a$, $r = \tilde{r}/a^2$ не меняет уравнения (4).

4. Если построено решение уравнений (4) с условиями $u(0) = 1$, $u'(0) = u_0$, $w(0) = 0$, $u'(a) = w(a) = 0$ и параметрами c_0 и r_0 , то решение искомой задачи можно получить из решения задачи Коши для системы уравнений (4) с условиями $u(0) = 1$, $u'(0) = au_0$, $w(0) = 0$ и параметрами $c = c_0$, $r = r_0/a^2$.

Можно предложить следующий алгоритм продолжения семейства решения по параметру c . Пусть имеется точное решение системы уравнений (4) с условиями $u(0) = 1$, $u'(0) = u_0$, $w(0) = 0$, $w(1) = u'(1) = 0$ и параметрами c_0 , r_0 . В качестве начального решения можно выбрать одно из точных решений (5). Меняя параметр $c = c_0$ на $c = c_0 + \Delta c$, решаем задачу Коши с условиями $u(0) = 1$, $u'(0) = u_0$, $w(0) = 0$. Для полученного решения равенство $w(Y) = u'(Y) = \varepsilon$ достигается в точке $Y = 1 + \delta$ при достаточно малых значениях ε и δ . Изменяя начальное условие u_0 , последовательно уменьшаем значение $|\varepsilon|$, доводя его до нуля с заданной точностью. Тогда, полагая $a = 1 + \delta$ и используя утверждение 4, определяем начальные значения задачи Коши для искомого решения и значение параметра $r = r_0/a^2$.

Результаты первой и второй серий расчетов приведены в таблице. По данным, приведенным в таблице, с использованием решения задачи Коши можно построить функции $u(Y)$, $w(Y)$ и показать, что на втором конце интервала выполняются необходимые условия.

Продолжение семейства решений по параметру c

Серия 1			Серия 2		
c	u_0	$r\pi^2$	c	u_0	$r\pi^2$
-0,001	-1,234 84	-1,373 54	-1	0	-0,25
-0,01	-1,226 14	-1,368 93	-1,1	-0,356 617	-0,253 649
-0,05	-1,186 88	-1,348 68	-1,2	-0,431 016	-0,254 241
-0,1	-1,136 40	-1,323 98	-1,3	-0,411 895	-0,253 852
-0,2	-1,030 84	-1,276 65	-1,4	-0,337 825	-0,252 939
-0,4	-0,801 822	-1,190 58	-1,5	-0,224 806	-0,251 701
-0,6	-0,551 029	-1,116 14	-1,7	0,086 9768	-0,248 662
-0,8	-0,282 236	-1,052 93	-2	0,707 835	-0,243 505
-1	0	-1	-3	3,395 65	-0,228 413
-1,3	0,438 739	-0,937 026	-4	6,149 36	-0,219 7894
-1,6	0,884 938	-0,889 629	-6	10,9679	-0,212 571
-2	1,4773	-0,843 763	-8	15,1447	-0,210 04
-2,5	2,199 98	-0,8048	-9	17,0794	-0,209 4454
-3	2,896 66	-0,778 515	-9,6	18,2025	-0,209 2084
-4	4,212 27	-0,746 781	-10	18,9374	-0,209 089
-6	6,5931	-0,719 358	-12	22,4708	-0,208 811
-8	8,7382	-0,709 585	-15	27,4254	-0,208 959
-10	10,7203	-0,706 338	-20	35,043	-0,209 773
-15	15,2019	-0,708 05			
-25	22,9735	-0,720 623			
-40	33,0514	-0,739 103			
-80	55,6842	-0,772 452			
-100	65,7448	-0,783 553			
-200	109,966	-0,815 669			
-300	148,574	-0,831 810			
-500	217,103	-0,849 543			
-700	278,705	-0,860 058			
-1000	363,158	-0,870 448			

На рис. 1, *a* представлена зависимость $r(c)$ для двух серий расчетов (см. таблицу). Видно, что функция $r(c)$ является немонотонной. Это означает, что в области $r \in (r_2, r_1)$ для каждого значения r существует два решения, а в области $r \in (r_3, r_2)$ — одно решение, где $r_1\pi^2 \approx -0,706$, $r_2\pi^2 \approx -0,88$, $r_3\pi^2 \approx -1,38$ (см. рис. 1, *a*).

На рис. 2 представлены зависимости $u(Y)$ и $w(Y)$ для двух решений при $r\pi^2 \approx -0,87$. Видно, что в этих решениях максимальные скорости по абсолютной величине различаются в 30 раз. В точке минимума $r = r_1$ два решения совпадают.

Поведение функций $u(Y)$ и $w(Y)$ для второй серии решений аналогично (см. рис. 2, *b*). В областях $r \in (r_2, r_1)$ и $r \in (r_4, r_3)$ существует два решения, а в области $r \in (r_3, r_2)$ — одно решение, где $r_1\pi^2 \approx -0,208$, $r_2\pi^2 \approx -0,210$, $r_3\pi^2 \approx -0,250$, $r_4\pi^2 \approx -0,255$.

Выводы. Исследованы точные решения уравнений Навье — Стокса для слоя между параллельными пластинами, расстояние между которыми увеличивается по закону $h = k\sqrt{t}$. Получены дискретное семейство точных решений $c_n = -1$, $r_n = -1/(n^2\pi)$ и порожаемый ими счетный набор непрерывных семейств $c = f_n(r)$, такой что $f_n(r_n) = -1$. Каждой точке семейств соответствуют функции $u(Y)$, $w(Y)$. В некоторых интервалах параметра Рейнольдса r существует два решения, в некоторых — одно.

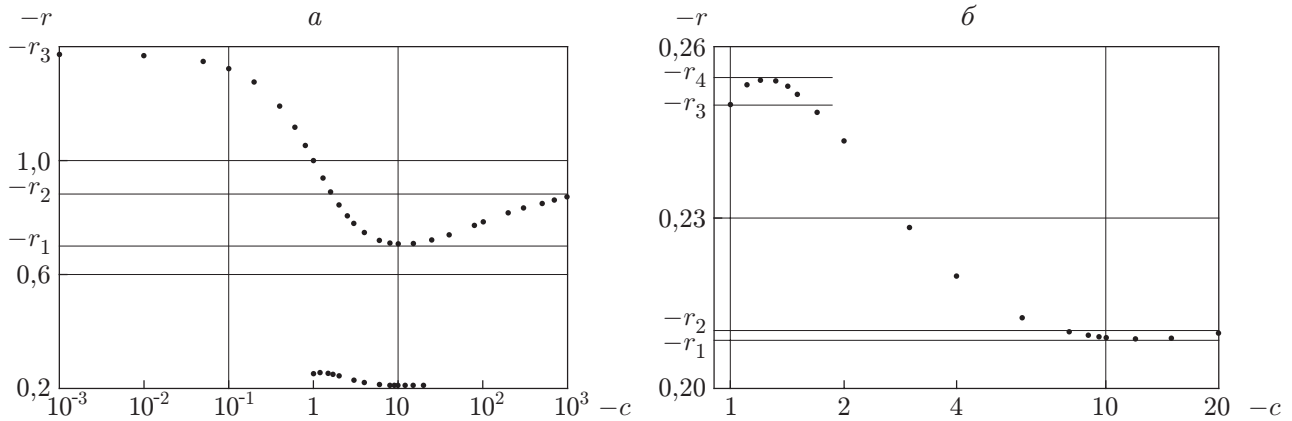


Рис. 1. Зависимость $r(c)$:
 а — для двух серий точных решений, б — для второй серии точных решений в большем масштабе

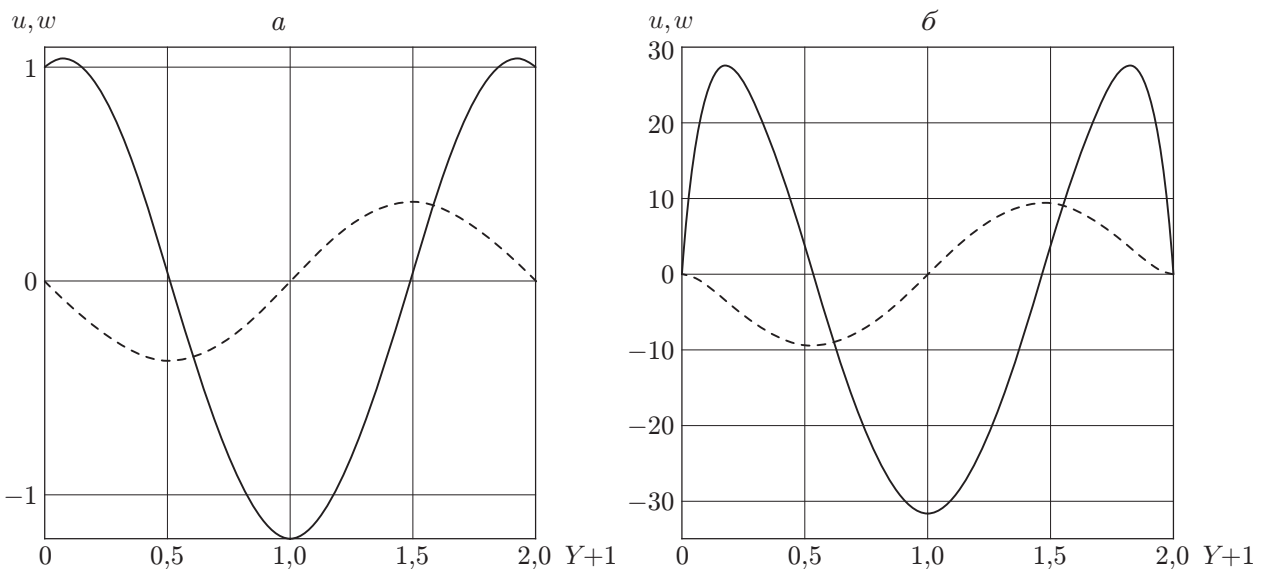


Рис. 2. Функции распределения скорости между пластинами:
 а — первое решение, б — второе решение; сплошная линия — $u(Y)$, штриховая линия — $w(Y)$

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963.
2. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
3. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Пухначев В. В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6–76.

6. **Hiemenz K.** Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // Dinglers Politech. J. 1911. V. 326. P. 321.
7. **Wang C. Y.** Exact solution of the steady Navier — Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 159–177.
8. **Шкадов В. Я.** Течения вязкой жидкости / В. Я. Шкадов, З. Д. Запрянов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
9. **Howarth L.** On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream // Aeronaut. Res. Counс. Rep. Memoranda. 1935. V. 1. P. 16–32.
10. **Acrivos A., Brady J. F.** Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier — Stokes equations with reverse flow // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 127–150.
11. **Riabouchinsky D.** Quelques considerations sur les mouvements plans rotationnels d' un liquide // C. R. Hebdomadaires Acad. Sci. 1924. V. 179. P. 1133–1136.
12. **Galaktionov V. A.** Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics / V. A. Galaktionov, S. R. Svirshchevskii. Boca Raton: Chapman and Hall / CRC, 2007.
13. **Пухначев В. В.** Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае // ПМТФ. 1960. № 1. С. 83–90.
14. **Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д.** Точные решения уравнений Навье — Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.

Поступила в редакцию 31/1 2012 г.
