

УДК 621.9.047

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТИ ДВУМЯ НЕСИММЕТРИЧНЫМИ КАТОДАМИ-ПЛАСТИНАМИ

В. В. Клоков, Д. Е. Сергеев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008 Казань
E-mail: windes@rambler.ru

С использованием метода гидродинамической аналогии решена задача стационарного электрохимического формообразования с помощью двух полубесконечных катодов-пластин при их произвольном расположении относительно направления подачи. Особенностью задачи является неоднолиственность годографа скорости.

Ключевые слова: метод гидродинамической аналогии, электрохимическая размерная обработка, неоднолистный годограф, краевая задача с неизвестными границами.

Введение. В современном машиностроении размерная электрохимическая обработка [1] является основным методом получения деталей из токопроводящих твердых и жаропрочных материалов [2, 3], применяемых при изготовлении несущих элементов конструкций, микро- и нанодеталей, двигателей летательных аппаратов, ковочных штампов, радиотехнического оборудования, печатных плат и т. д. В данной работе проведено математическое моделирование процесса размерной электрохимической обработки металла [3–6], а именно определена форма анодной границы при стационарном электрохимическом формообразовании с помощью системы полубесконечных катодов-пластин нулевой толщины, расположенных несимметрично относительно направления подачи. В стационарном режиме, который используется при прошивке, протягивании, резке, шлифовании и в других технологических процессах [1, 2], форма межэлектродного зазора при удалении металла с анодной поверхности не изменяется. При решении задачи используются методы годографа скорости и гидродинамической аналогии [4]. Ранее были получены решения [6, 7] только в случае однолистного годографа [8]. В данной работе годограф является двулиственным.

Постановка задачи. Схема рассматриваемой задачи представлена на рис. 1 (AFE , EDC — катоды-инструменты, совершающие движение в направлении, противоположном направлению оси y ; U — вектор подачи). Расстояние d , высота h , углы наклона $\pi\alpha$ ($-1/2 < \alpha < 1/2$) и $\pi\beta$ ($-1/2 < \beta < 1/2$) считаются заданными. Требуется определить форму анодной границы $A'BC'$.

Поставленная задача является существенно неоднородной и сводится к нахождению потенциала ψ электростатического поля, являющегося гармонической функцией, и границы области его определения по следующим краевым условиям:

- 1) $\psi = 0$ на границе $A'BC'$ (условие эквипотенциальности на аноде);
- 2) $\psi = 1$ на границах AFE и JDC (условие эквипотенциальности на катоде);

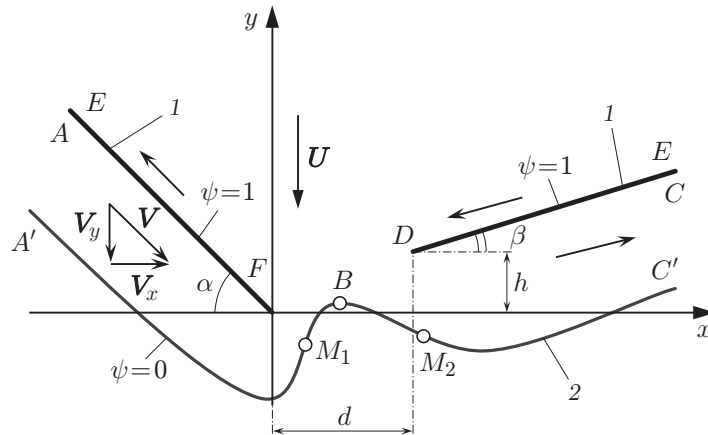


Рис. 1. Схема задачи:
 1 — катоды-инструменты; 2 — анод-деталь

3) $\partial\psi/\partial n = \cos\theta$ на границе $A'BC'$ (условие стационарности обработки), где $\partial/\partial n$ — производная по направлению нормали; θ — угол наклона касательной к искомой границе [2].

Решение задачи. Для решения задачи применяются методы годографа скорости и гидродинамической аналогии (см. рис. 1), в соответствии с которыми определяется граница фиктивного потенциального плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой жидкости. Как известно, при анализе такого течения используются методы комплексного анализа (см., например, [4]).

Введем гармоническую функцию φ , сопряженную с функцией ψ . Согласно краевым условиям область значений комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ представляет собой полосу. Область изменения комплексно-сопряженной скорости $\bar{V} = dW/dz = V_x - iV_y$ строится в соответствии со следующими условиями:

- 1) $V_y/V_x = -\text{tg}(\pi\alpha)$ на границе AF ;
- 2) $V_F = \infty, V_E = 0, V_y/V_x = \text{tg}(\pi\alpha)$ на границе FE ;
- 3) $V_y/V_x = -\text{tg}(\pi\beta)$ на границе ED ;
- 4) $V_y/V_x = \text{tg}(\pi\beta)$ на границе DC .

В плоскости значений годографа скорости искомой линии $A'BC'$ соответствует дуга окружности радиусом $1/2$ с центром в точке $(1/2, 0)$, точки M_1, M_2 на этой дуге — возможные образы точек перегиба анодной границы. При наличии точек перегиба область годографа скорости становится двулистной (рис. 2).

Необходимое для получения решения конформное соответствие областей изменения W и \bar{V} определяется с помощью преобразования инверсии $\zeta = 1/\bar{V} = e^{i\theta}/|V| = \zeta_1 + i\zeta_2$ относительно окружности единичного радиуса. Область изменения ζ представляет собой двулиственный многоугольник (рис. 3).

Введем вспомогательную верхнюю полуплоскость переменной t , так чтобы выполнялись условия $t_A = \infty, t_{M_1} = \mu_1, t_{M_2} = \mu_2, t_C = -1, t_D = \delta, t_E = 1, t_F = f$ (рис. 4). В этом случае конформное отображение областей изменения W и ζ друг на друга осуществляется с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца [9]

$$W = -\frac{1}{\pi} \int_f^t \frac{ds}{s+1} + i = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{t+1}{f+1} + i,$$

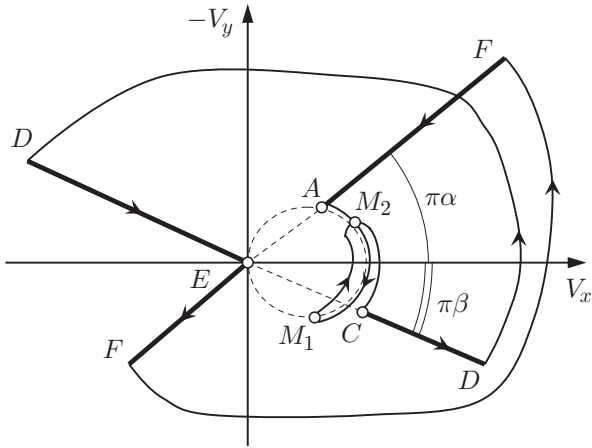


Рис. 2

Рис. 2. Область годографа скорости

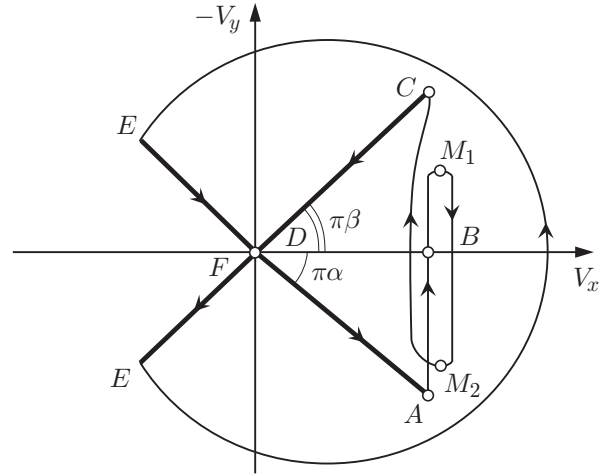


Рис. 3

Рис. 3. Область инверсии годографа скорости

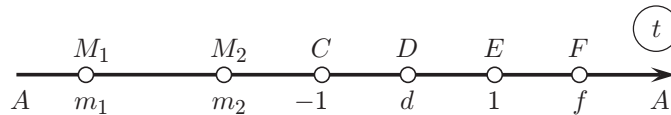


Рис. 4. Область изменения вспомогательного параметра t

а для связи дифференциалов dZ и dt имеет место формула

$$dZ = \zeta \frac{dW}{dt} dt = C_1 \int_f^t \frac{(t - \mu_1)(t - \mu_2) ds}{(t + 1)^{1/2+\beta}(t - 1)^{3-\alpha-\beta}} \frac{dW}{dt} dt. \tag{1}$$

В результате подстановки $t = (f + \delta)/2 + ((f - \delta)/2) e^{iv}$ параметры μ_1, μ_2 определяются из следующей системы равенств:

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^\pi \frac{(t - \mu_1)(t - \mu_2) e^{iv} dv}{(t + 1)^{1/2+\beta}(t - 1)^{3-\alpha-\beta}} \right) = 0, \quad \operatorname{Im} \left(\int_0^\pi \frac{(t - \mu_1)(t - \mu_2) e^{iv} dv}{(t + 1)^{1/2+\beta}(t - 1)^{3-\alpha-\beta}} \right) = 0.$$

Интегрируя выражение (1) с учетом условия $Z_F = 0$, получаем равенство

$$Z = C_1 C \int_f^t \int_f^s \frac{(u - \mu_1)(u - \mu_2) du}{(u + 1)^{1/2+\beta}(u - 1)^{3-\alpha-\beta}} \frac{ds}{s + 1}. \tag{2}$$

Для определения координат точек границы интегрирование проводится по дуге полуокружности в плоскости t от точки F до искомой точки N на границе, при этом формула (2) принимает вид

$$\tilde{Z} = -C_1 C \int_0^\pi \int_0^\theta \frac{(t_1 + \rho e^{i\tau} - \mu_1)(t_1 + \rho e^{i\tau} - \mu_2) \rho e^{i\tau} (\theta/\pi) d\lambda}{(t_1 + \rho e^{i\tau} + 1)^{1/2+\beta}(t_1 + \rho e^{i\tau} - 1)^{3-\alpha-\beta}} \frac{\rho e^{i\theta} d\theta}{s(\theta) + 1},$$

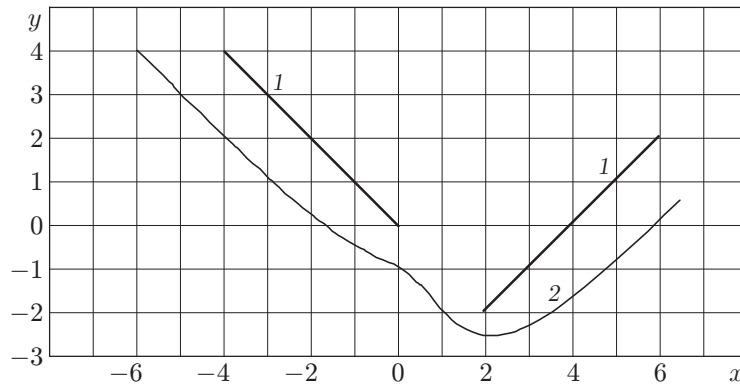


Рис. 5. Моделирование процесса обработки гладкого профиля ($x_d = 1,965\ 55$, $y_d = -1,9643$, $\pi\alpha = 45^\circ$, $\pi\beta = 45^\circ$, $f = 9,4$, $\delta = -0,97$, $\mu_1 = -21,2302$, $\mu_2 = -1,616\ 44$):
1 — катоды; 2 — анод

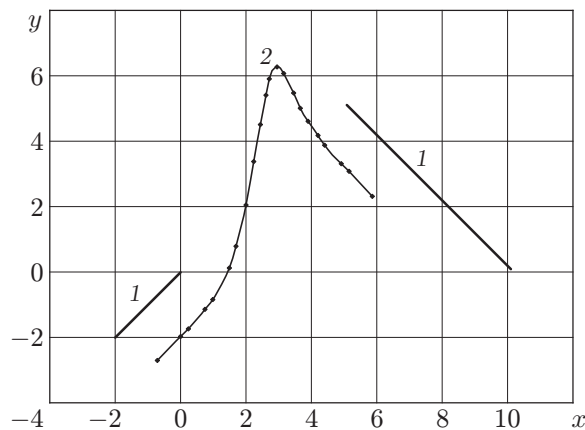


Рис. 6. Моделирование процесса обработки острой кромки ($x_d = 5,0981$, $y_d = 5,1043$, $\pi\alpha = -45^\circ$, $\pi\beta = -45^\circ$, $f = 122$, $\delta = -0,9137$, $\mu_1 = -17,5965$, $\mu_2 = -1,486\ 74$):
1 — катоды; 2 — анод

Координаты анодной границы гладкого профиля

t_N	x	y	t_N	x	y	t_N	x	y
-1,000 000 01	6,457 54	0,570 187	-1,2	1,106 350	-2,043 12	-2000	-1,825 23	0,113 443
-1,000 000 1	5,724 60	-0,129 666	-1,5	0,814 687	-1,719 65	-3000	-1,954 35	0,214 811
-1,000 001	4,991 66	-0,803 773	-2	0,594 051	-1,459 15	-5000	-2,116 99	0,346 251
-1,000 01	4,258 73	-1,432 090	-2,29	0,512 996	-1,368 25	-10 000	-2,337 66	0,530 458
-1,0001	3,525 79	-1,979 000	-2,5	0,464 988	-1,316 85	-50 000	-2,849 98	0,978 925
-1,0005	3,013 49	-2,280 780	-4	0,244 352	-1,111 55	-100 000	-3,070 62	1,179 050
-1,001	2,792 86	-2,381 200	-6	0,081 751	-0,995 13	-500 000	-3,582 93	1,655 440
-1,002	2,572 22	-2,458 940	-10	-0,105 350	-0,890 17	-1 000 000	-3,803 56	1,864 530
-1,005	2,280 56	-2,519 640	-20	-0,343 190	-0,779 64	-3 000 000	-4,153 26	2,199 590
-1,01	2,059 92	-2,527 320	-50	-0,644 750	-0,641 37	-10 000 000	-4,536 50	2,570 790
-1,02	1,839 29	-2,495 780	-100	-0,868 620	-0,526 40	-50 000 000	-5,048 80	3,071 730
-1,05	1,547 62	-2,383 770	-500	-1,383 480	-0,209 40	-100 000 000	-5,269 43	3,288 710
-1,1	1,326 99	-2,239 500	-1000	-1,604 440	-0,052 95	-1 000 000 000	-6,002 37	4,013 210

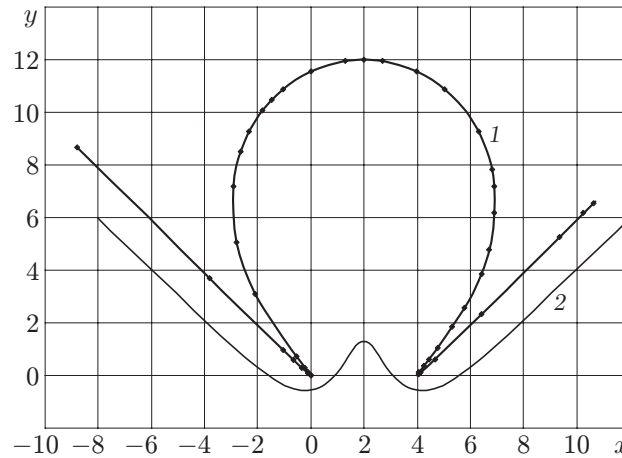


Рис. 7. Эквипотенциальная линия в окрестности катодов-пластин в случае их симметричного расположения ($\psi = 0,95$, $x_d = 3,978\,37$, $y_d = 0,000\,021$, $\pi\alpha = 45^\circ$, $\pi\beta = 45^\circ$, $f = 450,5$, $\delta = -0,9911$, $\mu_1 = -15,9674$, $\mu_2 = -1,267\,25$):

1 — эквипотенциальная линия; 2 — анод

где

$$C_1 = \frac{e^{-i\pi\alpha}}{\cos(\pi\alpha) I_1}, \quad I_1 = \int_f^\infty \frac{(s - \mu_1)(s - \mu_2)}{(s + 1)^{1/2+\beta}(s - 1)^{3-\alpha-\beta}} ds,$$

$$t_1 = \frac{f + \delta}{2}, \quad \rho = \frac{f - \delta}{2}, \quad s(\theta) = t_1 + \rho e^{i\theta}, \quad \tau = \theta \frac{\lambda}{\pi}.$$

Задача содержит параметры δ и f , для определения которых используется система нелинейных уравнений

$$\operatorname{Re} \tilde{Z} = x_d, \quad \operatorname{Im} \tilde{Z} = y_d.$$

В несимметричном случае для получения решения задачи необходимо решать систему четырех нелинейных уравнений для нахождения параметров δ , f , μ_1 , μ_2 . Два из этих параметров δ и f задавались, а параметры μ_1 и μ_2 вычислялись методом Ньютона. Отметим, что параметр d , равный расстоянию между кромками катодов, зависит главным образом от значения δ . Окончательные значения параметров δ и f определялись методом пристрелки в соответствии с заданными координатами кромки D правого электрода. При этом подбор параметра δ осуществлялся с точностью до 10^{-3} .

При определении координат точек анодной границы T_N значения t_N задаются существенно неравномерно. Результаты расчетов представлены на рис. 5, 6 и в таблице.

Частный случай данной задачи — симметричное расположение электродов (рис. 7) — был рассмотрен в работе [8]. Сравнение решений, полученных в данной работе и в [8], показало, что анодные границы совпадают.

Разработанный алгоритм расчета позволяет получать параметрические уравнения всех эквипотенциальных линий в межэлектродном зазоре. Эти линии могут рассматриваться в качестве границы катода-инструмента сложной конфигурации. На рис. 7 приведены результаты расчета формы симметричного скругленного инструмента, на границе которого $\psi = 0,95$.

Заключение. Представленный в работе алгоритм показывает возможность расчета анодной границы в задачах с многолистной областью годографа скорости, что существенно расширяет область применения метода годографа. Это актуально при изготовлении

острых кромок турбинных лопаток, особенностью которых является несимметричное расположение границ относительно хорды [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Артамонов Б. А.** Размерная электрохимическая обработка металлов / Б. А. Артамонов, А. Л. Вишницкий, Ю. С. Волков, А. В. Глазков. М.: Высш. шк., 1978.
2. **Артамонов Б. А.** Электрофизические и электрохимические методы обработки металлов: В 2 т. / Б. А. Артамонов, Ю. С. Волков, В. И. Дрожалова, Ф. В. Седыкин, В. П. Смоленцев, В. М. Ямпольский. М.: Высш. шк., 1983.
3. **Давыдов А. Д.** Высокоскоростное электрохимическое формообразование / А. Д. Давыдов, Е. Козак. М.: Наука, 1990.
4. **Каримов А. Х.** Методы расчета электрохимического формообразования / А. Х. Каримов, В. В. Клоков, Е. И. Филатов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990.
5. **Житников В. П.** Математическое моделирование электрохимической размерной обработки / В. П. Житников, А. Н. Зайцев. Уфа: Уфим. гос. авиац. техн. ун-т, 1996.
6. **Котляр Л. М.** Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ / Л. М. Котляр, Н. М. Миназетдинов. М.: Academia, 2005.
7. **Klokov V. V., Filatov E. I., Timbakova K. S., et al.** Mathematical simulation of the steady electrochemical shaping and the hydrodynamics of electrolyte in a working gap // Proc. of the conf. "Advances in production engineering APE-2007". Warsaw: S. n., 2007. P. 532–540.
8. **Клоков В. В., Сергеев Д. Е.** Расчет стационарного анодного формообразования вогнутой и выпуклой кромки // Современная электротехнология в промышленности центра России: Материалы 9-й Регион. науч.-техн. конф., Тула, 15 мая 2008 г. Тула: Тул. гос. ун-т, 2008. С. 8–16.
9. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. СПб.: БХВ, 2010. Т. 3, ч. 1.
10. **Клоков В. В., Сергеев Д. Е.** Стационарная ЭХО системой катодов-инструментов // Сб. тр. 7-й Междунар. науч.-практ. конф. "Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности", Санкт-Петербург, 28–30 апр. 2009 г. СПб.: Изд-во С.-Петербур. политехн. ун-та, 2009. Т. 2. С. 187–189.

*Поступила в редакцию 3/II 2012 г.,
в окончательном варианте — 4/IV 2012 г.*
