

УДК 519.632.4

## О дискретизации двумерного оператора Лапласа в гладкой двумерной области\*

С.Д. Алгазин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
просп. Вернадского, 101-1, Москва, 119526, Россия

E-mail: algazinsd@mail.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 14, 2021.

**Алгазин С.Д.** О дискретизации двумерного оператора Лапласа в гладкой двумерной области // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 3. — С. 253–259.

Наиболее распространенным в настоящее время методом решения задач механики деформируемого твердого тела является метод конечных элементов. Его недостатки общеизвестны: аппроксимируя перемещение кусочно-линейной функцией, мы получаем, что напряжения разрывные. Вместе с тем следует заметить, что большинство задач механики деформируемого твердого тела описывается уравнениями эллиптического типа, которые имеют гладкие решения. Представляется актуальным разработать алгоритмы, которые учитывали бы эту гладкость. Идея таких алгоритмов принадлежит К.И. Бабенко. Эта идея высказана им в начале 70-х годов прошлого века. Многолетнее применение этой методики в эллиптических задачах на собственные значения автором настоящей работы доказало их высокую эффективность. Однако в этой методике матрица конечномерной задачи получается не симметричной, а только близкой к симметризуемой. Ниже, применением при дискретизации метода Бубнова–Галеркина, этот недостаток устраняется. Отметим, что симметричность матрицы конечномерной задачи важна при исследовании устойчивости. В отличие от классических разностных методов и метода конечных элементов, где зависимость скорости сходимости от числа узлов сетки степенная, здесь имеем экспоненциальное убывание погрешности.

**DOI:** 10.15372/SJNM20210302

**Ключевые слова:** численные методы без насыщения, задачи на собственные значения, оператор Лапласа.

**Algazin S.D.** About sampling of the two-dimensional Laplace operator in a smooth two-dimensional area // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 3. — P. 253–259.

Currently the finite element method is most widespread technique for solving problems of mechanics of a deformable solid body. Its shortcomings are well-known: approximating a displacement by a piecewise-linear function, we obtain the tension to be discontinuous. At the same time, it is necessary to notice that most problems of mechanics of a deformable solid body are described by the elliptic type equations which have smooth decisions. It seems to be relevant to develop algorithms which would take this smoothness into account. The idea of such algorithms belongs to K.I. Babenko. This idea was stated in the early seventies of the last century. A long-lasting application of this technique in elliptic tasks to eigenvalues has proved their high performance to the author of this study. However, in this technique the matrix of the finite-dimensional task turns out to be not symmetric but only close to that to be symmetrized. Below, the application when sampling the Bubnov–Galyorkina method, this defect is eliminated. Let us note that the symmetry of the matrix of the finite-dimensional task is important when studying the stability. Unlike classical difference methods and the finite element method where the dependence of the convergence ratio on the number of nodes of the grid is power, we have an exponential decrease of the error.

**Keywords:** numerical methods without saturation, problems on eigenvalues, Laplace operator.

---

\*Работа выполнена по теме Государственного задания № АААА-А20-120011690132-4.

## 1. Введение

Краткое изложение основ теории ненасыщаемых численных методов содержится в первом издании книги К.И. Бабенко [1]. Отметим, что исследования в вычислительной математике в этом направлении недостаточно пропагандировались в России и мире, и до сих пор за рубежом практически неизвестны. Подтверждением тому служит тот факт, что уже в наши дни началось фактическое “переоткрытие” (по-видимому, независимое) этих же вычислительных методов на западе под названием “спектральных” методов (S. Orszag, D. Gotlieb [2], E. Tadmor<sup>1</sup>, США), а также в виде современных  $(h - p)$ -специализаций метода конечных элементов (O. Widlund [3], США и S. Schwab [4, 5], Швейцария), в которых при измельчении сетки (т.е. при  $h \rightarrow 0$ ) одновременно увеличивается степень  $p$  полиномов, используемых при аппроксимации функций внутри одного конечного элемента. Остается лишь сожалеть, что к этому моменту работы К.И. Бабенко и его учеников оказались практически забыты. При дискретизации методом без насыщения К.И. Бабенко задачи Дирихле для оператора Лапласа в круге получается матрица, имеющая следующую блочную структуру:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11}h_{12} \dots h_{1m} \\ h_{21}h_{22} \dots h_{2m} \\ \dots \dots \dots \dots \\ h_{m1}h_{m2} \dots h_{mm} \end{bmatrix},$$

где  $h_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, m$ , — симметричные циркулянты размера  $N \times N$ ,  $N = 2m + 1$ , т.е. матрицы, первая строка которых имеет вид:  $b_0, b_1, \dots, b_m, b_m, \dots, b_1$ , а остальные строки получаются из первой циклической перестановки. Для краткости будем называть матрицы такого вида  $h$ -матрицами. Здесь  $m$  и  $N$  — параметры в круге,  $m$  — число окружностей сетки, а  $N = 2(m + 1)$  — число точек на каждой окружности. Теорема о свойствах этой матрицы доказана в [6].

Симметричный циркулянт можно представить в виде

$$B_{ij} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n {}' \lambda_k \cos[k2\pi(i - j)/N], \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , — собственные значения этой матрицы,

$$\lambda_j = b_0 + 2 \sum_{k=1}^n b_k \cos \frac{2\pi k}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n,$$

штрих у знака суммы означает, что слагаемое при  $k = 0$  берется с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ . Далее

$$B_{ij}^{-1} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n {}' \lambda_k^{-1} \cos[k2\pi(i - j)/N], \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Эти утверждения обобщаются на матрицу  $H$  следующим способом:

$$H = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n {}' \Lambda_k \otimes h_k, \quad H^{-1} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n {}' \Lambda_k^{-1} \otimes h_k,$$

<sup>1</sup>Eitan Tadmor Distinguished University, Professor Department of Mathematics Institute for Physical Science & Technology Director, Center for Scientific Computation and Mathematical Modeling (CSCAMM). Email: tadmor@cscamm.umd.edu

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое при  $k = 0$  берется с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ ;  $\Lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , — матрица размера  $m \times m$ , элемент  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, m$ , которой  $k$ -е собственное значение матрицы  $h_{\mu, \nu}$ ;  $h_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , — матрица размера  $N \times N$ :  $h_{kij} = \cos[k2(i-j)/N]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , через  $\otimes$  обозначено кронекерово произведение матриц.

Позднее стало ясно, что матрицы такого вида и некоторые их обобщения широко встречаются в задачах математической физики. Их можно использовать при дискретизации так, что дискретизация двумерной задачи сводится к дискретизации одномерной задачи, а дискретизация трехмерной задачи сводится к дискретизации двумерной задачи. Можно сказать, что дискретная задача наследует свойство разделения переменных соответствующей бесконечномерной задачи. Таким образом, при периодическом краевом условии по одной переменной (тело вращения) можно описанным выше аппаратом  $h$ -матрицы свести дискретизацию двумерной задачи к одномерной, а трехмерной — к двумерной. Для умножения  $h$ -матрицы на вектор можно при  $N = 3^r$  применить быстрое преобразование Фурье, тогда число операций составит  $O(m^2 r N)$ .

1. Для примера рассмотрим одномерную задачу на собственные значения для нулевого уравнения Бесселя:

$$(xy')' + \lambda xy = 0, \quad x \in (0, 1) = 0, \quad |y(0)| < \infty. \quad (1)$$

Пусть

$$y(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) y_j, \quad y_j = y(x_j), \quad l_j(1) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где  $l_j(x)$  — фундаментальные функции интерполяции,  $x_j$  — узлы интерполяции [1].

Подставляя (2) в (1) и применяя обычную процедуру Бубнова–Галеркина (используется интегрирование по частям и квадратурная формула с коэффициентами  $c_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) получим конечномерную задачу на собственные значения:

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{\nu=1}^n l'_i(x_\nu) l'_j(x_\nu) x_\nu c_\nu \right) y_j = \lambda \sum_{\nu=1}^n x_\nu c_\nu y_\nu. \quad (3)$$

Для того, чтобы перейти к двумерной задаче, воспользуемся аппаратом  $h$ -матрицы, описанном во введении. Из (3) получаем клетку  $h$ -матрицы  $\Lambda_0$ , остальные матрицы  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , получаются из  $\Lambda_k$  прибавлением диагональной матрицы (это следует из уравнений Бесселя):

$$-[y''(x) + (1/x)y'(x)] + (k/x)^2 y(x) = \lambda y(x), \quad y(1) = 0, \quad |y(0)| < \infty.$$

Таким образом,

$$H = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n \Lambda_k \otimes h_k, \quad H^{-1} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n \Lambda_k^{-1} \otimes h_k$$

суть оператор Лапласа (точнее говоря —  $\Delta$ ) и обратный к нему в круге единичного радиуса. Случай произвольной области сводится к кругу конформным отображением  $z = \varphi(\zeta)$ ,  $|\zeta| \leq 1$ , — единичного круга на рассматриваемую гладкую область  $\Gamma$ . Для этого нужно умножить матрицу  $H$  на диагональную матрицу слева

$$Z^{-1} H U = \lambda U.$$

Здесь  $U = (u_1, \dots, u_M)'$ ,  $M = mN$ , — вектор, компоненты  $u_i$  которого являются приближенными значениями собственной функции  $u(\zeta)$  в  $i$ -м узле сетки (узлы в круге нумеруются, начиная с первой окружности сетки против часовой стрелки), т. е.  $u_i \approx u(\zeta_i)$ , а  $\lambda$  — приближенное значение соответствующего собственного значения;  $Z$  — диагональная матрица, на диагонали у которой стоят значения соответствующих функций  $z = |\varphi'(\zeta)|$  в узлах сетки [6].

2. Наибольшую погрешность вносит в (3) дифференцирование интерполяционной формулы (2). Пусть  $P(x)$  есть интерполирующий многочлен, имеющий степень не выше  $n+1$ , и  $R(x)$  — остаток интерполирования, так что  $y(x) = P(x) + R(x)$ . Здесь

$$R'(x_j) = y'(x_j) - P'(x_j), \quad R'(x_j) = \frac{\omega'(x_j)}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi) \quad (x_1 < \xi < 1),$$

где  $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)(x - 1)$ . Выберем  $\omega(x) = T_n(2x - 1)(x + 1)$ , узлы интерполяции на интервале  $(0, 1)$  выбираем так, что  $2x_j - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , — нули многочлена Чебышева  $T_n(x)$ . Тогда

$$\omega'(x_j) = T'_n(x_j)(x_j - 1), \quad x_j = \cos \theta_j, \quad \theta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad T'_n(x_j) = n \frac{(-1)^{j-1}}{\sin \theta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом,  $\omega'(x_j) \sim \frac{2}{\pi} n^2$  при больших  $n$ .

Оценим теперь  $y^{(n+1)}(\xi)$ . Воспользуемся интегральным представлением  $J_0$  [7, с. 82]:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) d\theta.$$

Откуда получаем  $y^{(n+1)}(\xi) \sim \lambda^{(n+1)/2}$ , где  $\lambda$  — собственное значение в (1), а  $y$  — соответствующая собственная функция. Осталось оценить  $(n-1)!$ . Так как  $\Gamma(n+1) = n!$  [7, с. 81], а

$$\Gamma(az + b) \sim \sqrt{2\pi} e^{-az} (az)^{az+b-1/2} \quad (|\arg z| < \pi, a > 0)$$

[7, с. 83], то видим, что  $(n-1)!$  растет по экспоненте, т. е. быстрее любой степени. Следовательно, сходимость алгоритма вычисления собственных значений (1) обеспечена см. [8].

3. Рассмотрим примеры численных расчетов двумерной задачи. Для аналитически заданного конформного отображения вычисления в [9, 10] проводились для эпитрохоиды, т. е. области, получающейся из круга конформным отображением  $z = \zeta(1 + \varepsilon \zeta^{n_p})$ ,  $|\zeta| \leq 1$ ,  $\varepsilon < 1/(n_p+1)$ ;  $\varepsilon = 1/6$ ,  $n_p = 4$ . Жирным шрифтом выделены знаки, совпавшие с расчетом на сетке  $70 \times 81$  (см. таблицу).

Таблица.  $n_p = 4$ ,  $\varepsilon = 1/6$ 

| №   | $90 \times 101$                            |
|-----|--------------------------------------------|
| 1   | <b>2.38444650949604970517317502</b> 179474 |
| 2   | <b>3.73481160264336270303800592883238</b>  |
| 3   | <b>3.73481160264336270303800592967501</b>  |
| 4   | <b>4.60299170636341650906486674922128</b>  |
| 5   | <b>5.21305408447636594415170768430741</b>  |
| 6   | <b>5.40987176983340399646015860904061</b>  |
| 100 | <b>19.6935982073949172845427275838215</b>  |
| 200 | <b>27.5366268437632376985348539305461</b>  |
| 300 | <b>33.4891610185522664152764002680301</b>  |

По методике, описанной выше, получен результат на сетке  $M = 30$ ,  $N = 41$ :

2.38444531874224857136763886180291  
 3.73481081545149123353790768858156  
 3.73481081545149123353790768858156  
 4.60298881486874133317875276197628  
 5.21305001599421899462842912202896  
 5.40987000567489544884328278176097

## 2. Выводы

Было обнаружено, что природа матриц, получаемых при ненасыщаемых дискретизациях задач, имеет блочную структуру, состоящую из симметричных циркулянтов, т. е. матриц, строки которых определяются циклической перестановкой первой строки. Это важное свойство является большим преимуществом ненасыщаемых дискретизаций и не только в эллиптических задачах. Для краткости назовем эту матрицу  $h$ -матрицей. После того, как не стало Бабенко Константина Ивановича, пришло понимание о свойствах этих матриц. Оказывается, что  $h$ -матрица — дискретная модель оператора с разделяющимися переменными, и ее можно использовать для дискретизации этого оператора, так, что дискретизация двумерного оператора сводится к дискретизации одномерного (уравнения Бесселя для оператора Лапласа). Это подробно описано в статье.

Количество верных знаков в собственных значениях приведено в таблице. Это — результаты старых расчетов. Эта дискретизация приводит к несимметричной матрице (но матрица дискретной задачи близка к симметризуемой) [9, 10]. Это большой недостаток методики, так как могут появляться комплексные собственные значения с малой мнимой частью, что неприемлемо в задачах устойчивости [11].

Применение метода Бубнова–Галеркина, описанное в статье, исправляет положение, но точность падает по сравнению с таблицей. Это происходит из-за того, что приходится дифференцировать фундаментальные функции интерполяции, что вносит дополнительную погрешность в решение.

Метод вычисления собственных значений оператора Лапласа, описанный выше, приводит к симметричной матрице конечномерной задачи, но он менее точен, чем описанный в [9, 10]. Однако он проще в реализации. Подробно методика работы с  $h$ -матрицей описана в [6].

## Литература

1. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
2. **Orszag S.A., Gotlib D.** Numerical Analysis of Spectral Methods. Theory and Applications. — Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1977.
3. **Toselli A., Widlund O.** Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory. Springer Series in Computational Mathematics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
4. **Schwab Cristoph.** p- and Hp- Finite Element Methods: Theory and Application to Solid and Fluid Mechanics. — Oxford: Oxford University, 1998.
5. **Schwab C., Suri M., Xenophontos C.** The *hp* finite element method for problems in mechanics with boundary layers // J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1998. — Vol. 157, iss. 3–4. — P. 311–333.
6. **Алгазин С.Д.** *h*-матрица — новый математический аппарат для дискретизации многомерных уравнений математической физики. — М.: “URSS”, 2019.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами; Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
8. **Алгазин С.Д.** О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 2. — С. 3–8. Перевод: Localization of eigenvalues closed linear operators // Siberian Mathematical J. — 1983. — Vol. 24, № 2. — P. 155–159.
9. **Алгазин С.Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. Изд. 3-е, переработанное и дополненное. — М.: “Агентство Интеллектуальной собственности на Транспорте”, 2016.
10. **Алгазин С.Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. Изд. 4-е, переработанное. — М.: “URSS”, 2019.
11. **Алгазин С.Д., Кийко И.А.** Флаттер пластин и оболочек. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. — М.: “URSS”, 2016.

*Поступила в редакцию 16 марта 2020 г.*

*После исправления 05 июня 2020 г.*

*Принята к печати 14 апреля 2021 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Babenko K.I.** Osnovy chislennoy analiza. — M.: Nauka, 1986.
2. **Orszag S.A., Gotlib D.** Numerical Analysis of Spectral Methods. Theory and Applications. — Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1977.
3. **Toselli A., Widlund O.** Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory. Springer Series in Computational Mathematics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
4. **Schwab Cristoph.** p- and Hp- Finite Element Methods: Theory and Application to Solid and Fluid Mechanics. — Oxford: Oxford University, 1998.
5. **Schwab C., Suri M., Xenophontos C.** The *hp* finite element method for problems in mechanics with boundary layers // J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1998. — Vol. 157, iss. 3–4. — P. 311–333.
6. **Algazin S.D.** *h*-matritsa — novyi matematicheskii apparat dlya diskretizatsii mnogomernykh uravnenii matematicheskoi fiziki. — M.: “URSS”, 2019.
7. Spravochnik po spetsial’nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami; Pod red. M. Abramovitsa i I. Stigan. — M.: Nauka, 1979.

8. **Algazin S.D.** O lokalizatsii sobstvennykh znachenii zamknutykh lineinykh operatorov // Sib. matem. zhurn. — 1983. — T. 24, № 2. — S. 3–8. Perevod: Localization of eigenvalues closed linear operators // Siberian Mathematical J. — 1983. — Vol. 24, № 2. — P. 155–159.
9. **Algazin S.D.** Chislennye algoritmy bez nasyscheniya v klassicheskikh zadachah matematicheskoi fiziki. Izd. 3-e, pererabotannoe i dopolnennoe. — M.: “Agentstvo Intellektual’noi sobstvennosti na Transporte”, 2016.
10. **Algazin S.D.** Chislennye algoritmy bez nasyscheniya v klassicheskikh zadachah matematicheskoi fiziki. Izd. 4-e, pererabotannoe. — M.: “URSS”, 2019.
11. **Algazin S.D., Kiiko I.A.** Flatter plastin i obolochek. Izd. 2-e, pererabotannoe i dopolnennoe. — M.: “URSS”, 2016.

