

3. Подстригач Я. С. Диференціальні рівняння дифузійної теорії деформації твердого тіла.— ДАН УССР, 1963, № 3.
4. Подстригач Я. С. Диффузионная теория неупругости металлов.— ПМТФ, 1965, № 2.
5. Stuke B. Allgemeine Rahmgleichungen der Kontinuumsdynamik.— Physics Letters, 1966, vol. 21, N 6.
6. Stuke B. Tensorielle chemische Potentiale — eine notwendige Erweiterung der Gibbs'schen Thermodynamik.— Z. Naturforschung, 1975, Bd 30a, N 11.
7. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
8. Delhaye J. M. Jump conditions and entropy sources in two—phas systems. Local instant formulation.— Intern. J. Multiphase Flow, 1974, vol. 1, N 3.
9. Ghez R. A generalized Gibbsian surface.— Surface Sci., 1966, vol. 4, N 2.
10. Herring C. Surface tension as a motivation for sintering.— In: The Physics of Powder Metallurgy. N. Y.: McGraw—Hill, 1951.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1970.
12. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974.
13. Kovac J. Non-equilibrium thermodynamics of interfacial systems.— Physica, 1977, vol. A86, N 1.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.

УДК 539.3 .5 : 678

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР РЕЛАКСАЦИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ВОЛНОВОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Н. М. Иванов, В. П. Музыченко

(Даугавпилс)

Для полного описания механического поведения полимерных материалов, обладающих выраженными вязкоупругими свойствами, необходимо проведение соответствующих экспериментов в широком интервале изменения времен. В подобных экспериментах рассматривается реакция материала на нагрузки, изменение которых во времени может охватывать диапазон от одного периода в час до десятков мегагерц и до нескольких месяцев и даже лет при ползучести [1]. В последнее время опубликовано много работ, посвященных исследованиям механических свойств линейных вязкоупругих сред. В [2—7] приведена обширная литература, в которой описываются методика и результаты таких исследований.

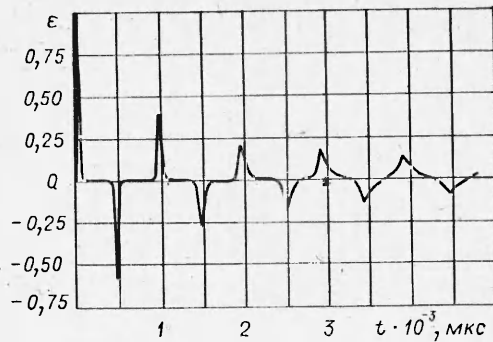
Для решения краевых задач теории вязкоупругости, связанных с распространением нестационарных волн, необходимо разрабатывать теоретико-экспериментальные методы построения вязкоупругих моделей, соответствующие условиям, наиболее близко приближающимся по длительности и интенсивности к нагрузкам, инициирующим переходные процессы.

Наряду с традиционными экспериментальными динамическими методами определения параметров вязкоупругих моделей [8—13] предлагается использовать метод численного решения обратной задачи для нестационарного стержня, нагружаемого коротким импульсом продольной деформации. Исходными данными для такой задачи могут служить продолжительность входного сигнала, а также координаты характерных точек на осциллограммах, зафиксировавших переходной процесс в определенном сечении полимерного образца-стержня, захватывающий несколько отраженных (на-пример, до десяти), желательнее не взаимодействующих друг с другом волн.

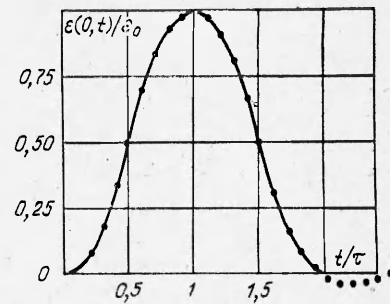
Предлагаемый метод является существенной модификацией метода бегущих волн [1], а по своей экспериментальной реализации наиболее схож с методом «волны удара» (МВУ), применяемым [14] при дефектоскопии строительных конструкций. Соответствующий верхний предел частот метода лежит выше 10—20 кГц, максимально возможных для метода свободных колебаний или резонансного метода [11—13], ограниченных высшей гармоникой, которая может быть возбуждена в образце при помощи наименьшей присоединенной массы из-за возбуждения «стоячей» волны [1], и ниже методов ультразвукового прозвучивания, которым свойственны крайне низкие уровни, не соответствующие реальным, действующим интенсивностям нагрузок. В отличие от резонансного метода предлагаемый метод избавлен от наличия электромеханического момента сил от взаимодействия «возбуждающей» катушки с магнитным полем, приводящего к большим ошибкам [15].

В излагаемой ниже постановке метод описан в [16], но был ориентирован только на нахождение параметров ядер Работнова [17] лишь по одному сигналу, что снижало точность метода.

На фиг. 1 приводится графическая зависимость продольной деформации от времени, зафиксированная измерительной системой для свободно подвешенного стержня из ПММА длиной 0,985 м, толщиной 0,0095 м при выстреле в торец пулей из пневматической винтовки.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Предполагается, что зависимость продольных смещений u , деформаций ε и напряжений σ от времени t и лагранжевой координаты x описывается при нулевых начальных условиях системой уравнений:

$$(1) \quad \varepsilon = \partial u / \partial x, \quad \partial \sigma / \partial x = \rho \partial^2 u / \partial t^2;$$

$$(2) \quad \frac{\sigma}{E_0} = \varepsilon - \int_0^t T(t - \tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau,$$

где ρ — плотность материала; E_0 — мгновенный модуль упругости; $T(t)$ — функция скорости релаксации напряжения. При задании граничных условий будем использовать следующее приближение:

$$(3) \quad \varepsilon(L, t) = 0;$$

$$(4) \quad \frac{\varepsilon(0, t)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 2(t/\tau)^2 & \text{при } 0 \leq t/\tau < 1/2, \\ 1 - 2(t/\tau - 1)^2 & \text{при } \frac{1}{2} \leq t/\tau \leq 3/2, \\ 2(t/\tau - 2)^2 & \text{при } \frac{3}{2} \leq t/\tau \leq 2, \\ 0 & \text{при } t/\tau > 2, \end{cases}$$

где 2τ — продолжительность входного импульса (фиг. 2, сплошная линия); ε_0 — максимальное значение деформации.

Применяя операционный метод, решение задачи (1) — (4) можно представить аналогично [18] в виде суперпозиции прямых и обратных волн. Преобразование Лапласа для деформации в сечении x получим в виде

$$(5) \quad \bar{\varepsilon}(x, p) = \sum_{k=0}^l [\bar{W}(t_{k1}, p) e^{-i k_1 p} - \bar{W}(t_{k2}, p) e^{-i k_2 p}],$$

где l — рассматриваемое число отражений волны от свободного конца стержня;

$$(6) \quad \bar{W}(t_k, p) = \bar{\varepsilon}(0, p) e^{-\frac{t_k p \bar{T}(p)}{1 - \bar{T}(p) + \sqrt{1 - \bar{T}(p)}}},$$

$$(7) \quad \frac{\bar{\varepsilon}(0, p)}{\varepsilon_0} = \frac{4}{\rho^3 \tau^2} (1 - e^{-p\tau}) \left(1 - e^{-\frac{pt}{2}}\right),$$

$$t_{k1} = \frac{2Lk + x}{C_0}, \quad t_{k2} = \frac{2L(k-1) - x}{C_0}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}.$$

Задача существенно упрощается, если продолжительность входного импульса значительно меньше промежутка времени L/C_0 , за который волна пробегает длину стержня. В этом случае, ограничиваясь рассмотрением только прямых волн, зафиксированных в верхней полуплоскости

фиг. 1, вместо (5) получим

$$\bar{\varepsilon}_1(x, p) = \sum_{k=1}^l \bar{W}\left(\frac{2Lk}{C_0}, p\right) e^{-\frac{2Lk}{C_0} p},$$

проводя отсчет времени с момента x/C_0 . Входным сигналом будем считать первый импульс, зарегистрированный измерительной системой в сечении x . Используя известную теорему запаздывания, находим

$$(8) \quad \varepsilon_1(x, i) = \sum_{k=1}^n W(t_k, t - t_k) h(t - t_k),$$

где $t_k = 2Lk/C_0$; $h(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Таким образом, расчет деформаций в модельной задаче сводится к обращению изображения (6). Для решения этой проблемы предлагается использовать экономичный алгоритм, построенный с помощью аппроксимации оригинала $f(t)$ тригонометрической системой [19]:

$$(9) \quad f(t) \approx f_n(t) = \sum_{m=1}^n C_m \sin[(2m-1) \arccos e^{-\sigma t}],$$

где $\sigma > 0$ — произвольный параметр. Коэффициенты C_m определяются из линейной системы

$$(10) \quad \sum_{i=1}^m a_{mi} C_i = \frac{4^m}{\pi} \sigma \bar{f}(p_m), \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

где $p_m = (2m-1)\sigma$; $\bar{f}(p)$ — заданное изображение. Элементы треугольной матрицы $\|a_{mi}\|$ являются постоянными величинами, их значения приводятся, например, в [19].

Решение системы (10) можно найти, учитывая, что $a_{mn} = 1$, с помощью рекуррентных соотношений:

$$C_1 = \frac{4}{\pi} \sigma \bar{f}(p), \quad C_m = \frac{4^m}{\pi} \sigma \bar{f}(p_m) - \sum_{i=1}^{m-1} a_{mi} C_i, \quad m = 2, 3, \dots, n.$$

При этом для расчета на ЭВМ одного значения \bar{f}_n требуется выполнить $(n^2 + 3n)/2 + 1$ операций умножения, $n^2 - n + 1$ операций сложения — вычитания и n вычислений функций $\bar{f}(p_m)$ и $\sin[(2k-1) \arccos e^{-\sigma t}]$. Если время, затраченное ЭВМ на выполнение каждой из указанных операций, обозначать соответственно t_1, t_2, t_3, t_4 , то затраты времени на расчет одного значения \bar{f}_n составят:

$$t_0 = \left(\frac{n^2 + 3n}{2} + 1\right) t_1 + (n^2 - n + 1) t_2 + (t_3 + t_4) n.$$

Предлагаемая модификация позволяет сократить это время до минимальной величины $(t_1 + t_2 + t_3)n$.

Представим решение системы (10) в общем виде

$$C_m = \sum_{i=1}^m A_{mi} \frac{4^i}{\pi} \sigma \bar{f}(p_i) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m A_{mi} \frac{4^i}{2^i - 1} p_i \bar{f}(p_i), \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

где A_{mi} — элементы матрицы $\|a_{mi}\|^{-1}$. Подставляя коэффициенты в (9) и полагая $\sigma = z/t$ (при $z = \text{const}$), получаем

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \sin[(2m-1)\theta] \sum_{i=1}^m A_{mi} \frac{4^i}{2^i - 1} p_i \bar{f}(p_i) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n p_m \bar{f}(p_m) \times \\ \times \frac{4^m}{2^m - 1} \sum_{i=m}^n A_{im} \sin[(2i-1)\theta],$$

m	$\delta_m^{16}(\frac{\pi}{4})$	m	$\delta_m^{16}(\frac{\pi}{4})$
1	0	9	0,540885164359385 · 10 ⁹
2	-0,960337403900965 · 10 ¹	10	-0,118170226784452 · 10 ¹⁰
3	0,968020103132123 · 10 ³	11	0,184242612102173 · 10 ¹⁰
4	-0,338807036096242 · 10 ⁵	12	-0,203553615840318 · 10 ¹⁰
5	0,592489764710707 · 10 ⁶	13	0,155639872641486 · 10 ¹⁰
6	-0,606984127342018 · 10 ⁷	14	-0,783211919492181 · 10 ⁹
7	0,397567629286954 · 10 ⁸	15	0,233343137393532 · 10 ⁹
8	-0,175666085691838 · 10 ⁹	16	-0,311841059189513 · 10 ⁸

где $\theta = \arccos e^{-z}$ — постоянная величина. Постоянными при фиксированных n, z являются также коэффициенты

$$\delta_m^i(\theta) = \frac{1}{\pi} \frac{4^{im}}{2m-1} \sum_{i=m}^n A_{im} \sin[(2i-1)\theta],$$

значения которых можно заранее определить и ввести в ЭВМ в виде таблицы. Таким образом, получена возможность вычислить приближенное значение оригинала $f_n(t)$ по заданному операторному изображению $\bar{F}(p) = p\bar{f}(p)$ с помощью простой формулы

$$f_n(t) = \sum_{m=1}^n \delta_m^n(\theta) \bar{F}(p_m).$$

Значения коэффициентов $\delta_m^{16}(\frac{\pi}{4})$ сведены в таблицу. Рекомендуемые значения параметров $n = 16, z = (1/2) \ln 2$ определены в результате вычислительных экспериментов на контрольных примерах. В качестве одного из них рассматривалось численное обращение изображения (7). Точность приближения к оригиналу (4) иллюстрирует фиг. 2, где кружками показаны одновременно экспериментальные точки и приближение, сплошной линией — кусочно-параболическая аппроксимация (4).

По результатам численного обращения изображения (6) определяются значения максимума ε_{1k} функции (8), а также промежутки времени τ_k (при $k = 1, 2, \dots, l$), через которые он повторяется. Аналогичные данные $\varepsilon_k^*, \tau_k^*$ получаются из эксперимента (см. фиг. 1). Значения ε_{1k}, τ_k можно рассматривать как функции, зависящие от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ ядра релаксации T из уравнения (3), а также от параметра $C_0 = \sqrt{E_0/\rho}$.

Используя метод наименьших квадратов, построим нормированное среднеквадратичное отклонение теоретических и экспериментальных точек максимума:

$$(11) \quad S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, C_0) = \sum_{k=1}^l \left[\frac{\varepsilon_{1k} - \varepsilon_k^*}{\varepsilon_0} \right]^2 + \left[(\tau_k - \tau_k^*) \frac{C_0}{2L} \right]^2.$$

Таким образом, расчет параметров ядра релаксации по результатам волнового эксперимента сводится к нахождению точки минимума функции (11), зависящей от $N+1$ переменной. По-видимому, эта математическая задача имеет единственное решение, но не стоит забывать, что величины $\varepsilon_{1k}, \varepsilon_k^*, \tau_k, \tau_k^*$ на практике определяются с некоторыми относительными ошибками, значения которых обозначим соответственно $\beta_\varepsilon, \beta_\varepsilon^*, \beta_\tau, \beta_\tau^*$. Отсюда следует, что при выполнении условия

$$(12) \quad S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, c_0) < [(\beta_\varepsilon + \beta_\varepsilon^*)^2 + (\beta_\tau + \beta_\tau^*)^2]^{-1/2}$$

нет смысла проводить дальнейшее уточнение параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, C_0$, т. е. обратная задача теряет единственность решения.

Условие (12) может служить критерием, подходит ли выбранное ядро для описания динамических процессов применительно к конкретному материалу. Если при данной точности измерений и расчета условие (12) в точке минимума функции (11) не выполняется, следует перейти к рассмотрению более сложной модели.

Предлагаемый метод опробован на примерах расчета параметров некоторых вязкоупругих моделей, соответствующих ПММА плотностью 1180 кг/м³. Исследовалась возможность применения в этом случае модели прямоугольного спектра [10] (модель 1) при

$$T(t) = \frac{1 - \alpha_1}{t \ln \frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \left(e^{-\frac{t}{\alpha_3}} - e^{-\frac{t}{\alpha_2}} \right), \quad \bar{T}(p) = \frac{1 - \alpha_1}{\ln \frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \frac{\ln p + \frac{1}{\alpha_2}}{\ln p + \frac{1}{\alpha_3}};$$

ядра Ржаницына [20] (модель 2) при

$$T(t) = \frac{1 - \alpha_1}{t \Gamma(\alpha_2)} (\alpha_2 t)^{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t}, \quad \bar{T}(p) = \frac{1 - \alpha_1}{(1 + \alpha_2 p)^{\alpha_2}}$$

и ядра Работнова [17] (модель 3) при

$$\bar{T}(p) = (1 - \alpha_1) / (1 + (\alpha_2 p)^{\alpha_2}).$$

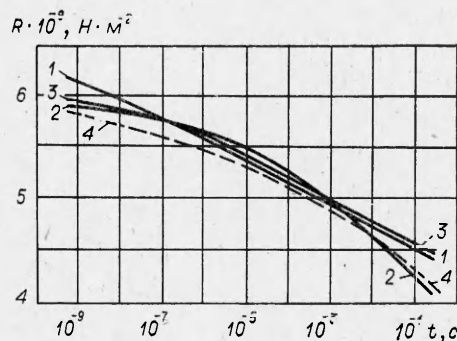
В качестве исходных данных использовались значения $L = 0,985$ м, $\tau = 25$ мкс, $\tau_1^* = \tau_2^* = \tau_3^* = \tau_4^* = 950$ мкс, $\epsilon_1/\epsilon_0 = 0,45$, $\epsilon_2/\epsilon_0 = 0,25$, $\epsilon_3/\epsilon_0 = 0,18$, $\epsilon_4/\epsilon_0 = 0,15$ (см. фиг. 1). В результате расчета для модели 1 получены значения параметров $\alpha_2 = 10^{-9}$ с, $\alpha_3 = 10^3$ с; для модели 2 — $\alpha_2 = 1$ с, $\alpha_3 = 0,1$; для модели 3 — $\alpha_2 = 10^{-3}$ с, $\alpha_3 = 0,15$. Значения остальных параметров для всех трех моделей оказались приблизительно одинаковыми: $C_0 = 2300$ м/с, $\alpha_1 = 0,6$. Близкими оказались также и значения функции (11) в точке минимума.

На фиг. 3 приводятся графики 1—3 функции релаксации напряжения

$$(13) \quad R(t) = \left(1 - \int_0^t T(y) dy \right) E_c,$$

построенные на основании полученных результатов для моделей 1—3 соответственно, а также по данным [9], где аналогичные параметры модели 2 определялись из статических экспериментов (кривая 4). По расположению кривых можно сделать вывод, что значения функции (13), соответствующие трем ядрам релаксации, при указанных выше значениях параметров удовлетворительно согласуются между собой и не противоречат литературным данным. Вместе с тем расчеты с использованием модели 2 показывают, что параметры ядра релаксации, найденные по предлагаемой методике, обеспечивают при решении ряда динамических задач более точное совпадение результатов теории и эксперимента, чем аналогичные параметры, приведенные в [9].

Следует отметить, что реализация данного метода требует больших затрат как по трудоемкости при составлении программы для ЭВМ, так и машинному времени при вычислениях (расчет четырех параметров одной модели на ЭВМ ЕС-1050 занимает 15 с). Несмотря на это,



Фиг. 3

имеются определенные преимущества перед традиционными методами определения параметров ядер.

Базовый эксперимент предлагаемого метода носит существенно волновой нестационарный характер, причем при обработке по предлагаемой методике можно исключить первый всплеск, появляющийся на развернутой картине деформаций, опосредованный первым проходом длины стержня-образца, когда искажения из-за трехмерных эффектов, имеющие место в районе удара по торцу, еще достаточно выражены, что повышает точность получаемых данных, например, по сравнению с [16]. Следует также отметить, что экспериментальное обеспечение, нужное для реализации метода, принципиально позволяет, варьируя длиной и толщиной стержней-образцов, интенсивностью и длительностью вводимых в них импульсов напряжений за счет уменьшения массы и скорости полета ударников, максимально приближать базовый эксперимент по фигурирующим в нем нагрузкам к тем, под которые требуется вести расчеты конкретных конструкций на ударно-взрывные воздействия. Кроме того, метод, захватывая временной диапазон проявления релаксационных свойств приблизительно с 200 мкс до 20 мс и даже выше, ранее перекрывавшихся другими методами с большими погрешностями либо на основе аналогий [7], позволяет совместно с другими неволновыми методами, в том числе статическими, находить параметры ядер релаксационных соотношений, наиболее адекватно описывающие физико-механические свойства жестких полимеров при применении комплексной обработки [21] результатов ряда разных по своей природе экспериментов за счет взаимодополнения данных.

Таким образом, предложен новый экспериментальный метод определения констант наследственных соотношений Больцмана — Вольтерра, базирующийся на волновом эксперименте на стержне. Авторы признательны В. Н. Гривкову и В. И. Шляхову за полезные обсуждения, а также А. М. Козловцеву.

Поступила 15 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Кольский Г. Экспериментальное изучение механического поведения линейных вязкоупругих сред. — Сб. пер. Механика, 1969, № 3.
2. Алфрей Т. Механические свойства высокополимеров. М.: ИЛ, 1952.
3. Реология. Теория и приложения/Под ред. Ф. Эйриха. М.: ИЛ, 1962.
4. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: ИЛ, 1963.
5. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. М.: Химия, 1964.
6. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972.
7. Огибалов П. М., Малинин П. И., Нетребко В. П., Кишкин Б. П. Конструкционные полимеры (Методы экспериментального исследования). Кн. 1-я. М.: Изд-во МГУ, 1972.
8. Nunziato Jace W. and Sutherland Herbert J. Acoustical determination of stress relaxation functions for polymers. — J. Appl. Phys., 1973, vol. 44, p. 184.
9. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976.
10. Косошвили С. М., Тамуж В. П., Янсон Ю. С. Вычисление релаксационных спектров по результатам динамических испытаний. — Механика полимеров, 1971, № 2.
11. Lethersich W. The rheological properties of dielectric polymers. — Brit. J. Appl. Phys., 1950, vol. 1, N 11.
12. Benbow J. J. The dynamic mechanical properties of some organic glasses. — Proc. Phys. Soc., section B, 1954, vol. 67, pt 2.
13. Испытание материалов. Справочник/Под ред. Х. Блюменауэра. М.: Металлургия, 1979.
14. Зацук И. В. Электроника и акустические методы испытания строительных материалов. М.: Высшая школа, 1968.
15. Hillier K. W. A vibrating cantilever method for the investigation of the dynamic elasticity of high polymers. — Proc. Phys. Soc., section B, 1951, vol. 64, pt 11.
16. Музыченко В. П. Волны напряжения в элементах конструкций. Даугавпилс: ВИНТИ, деп. № 1775—79, 1979.
17. Работнов Ю. И. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
20. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.—Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1949.
18. Музыченко В. П., Иванов П. М. Алгоритм расчета полимерного изделия на неуставившееся воздействие заданного вида. — В кн.: Нестационарное нагруже-

ние полимерных композиционных конструкций. Вып. 2. Рига: изд. ВВАИУ, 1972.

19. Papoulis A. A new method of inversion of the Laplace transform. Quart. Appl. Mathem., 1957, vol. 14, N 4.
21. Козловцев А. М., Музыченко В. П., Брагов А. М. Теоретико-экспериментальный способ определения вязкоупругих характеристик полимерных композитных материалов. — В кн.: Тезисы докладов V Всесоюз. конф. по композиционным материалам. Вып. 2. М.: Изд-во МГУ, 1981.

УДК 662.215.5+539.374.1

ДИНАМИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОРЫ В ПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

А. В. Аттетков, В. В. Селиванов, В. С. Соловьев

(Москва)

Локальные области высокой температуры («горячие точки») оказывают определяющее влияние на процесс возбуждения химического разложения в гетерогенных взрывчатых веществах (ВВ) высокой плотности. Из общих закономерностей динамики деформирования пористых сред следует, что специфика их деформации определяется конкуренцией двух механизмов разрушения: созданием трещин (или полос скольжения) и деформацией (схлопыванием) пор [1]. Следовательно, образование очагов локальных разогревов при ударно-волновом инициировании гетерогенных ВВ может быть связано с процессом деформирования пор, сдвигового разрушения и относительного скольжения частиц ВВ.

Данная работа посвящена рассмотрению общих закономерностей деформирования поры в пластическом материале и разогрева ее поверхности в процессе схлопывания.

Определяющее уравнение уплотняющегося пористого материала предложено в [2]. Пористый материал представлен идеальным гомогенным континуумом с дополнительной кинематической переменной α , определяемой как отношение удельного объема пористого материала к удельному объему материала матрицы. Аналогичный подход используется для исследования деформирования гранулированных (зернистых) материалов [3]. Это позволяет рассматривать деформацию пористого вещества в рамках модели сплошной среды. Описанию поведения параметра α посвящены теоретические исследования [4, 5]. Задача сводится к рассмотрению процесса схлопывания полой сферы под действием приложенного к внешней поверхности давления, где соотношение между ее внутренним и внешним радиусами определяет пористость данного материала. Полученные результаты показали, что сжимаемость материала и значение модуля сдвига G , определяющего упругую и упругопластическую фазы процесса схлопывания поры, не оказывают существенного влияния. Изменение пористости происходит, когда все вещество переходит в состояние пластического течения. Таким образом, в области нагрузок, интенсивность которых на порядок выше предела текучести материала Y , с достаточной точностью можно принять жестко-пластическую модель среды.

Рассмотрим процесс деформирования поры в пластическом материале под действием давления p , равномерно распределенного по внешней поверхности. Пусть a_0 и a — соответственно начальное и текущее значения радиуса поры, b_0 и b — начальное и текущее значения радиуса сферы. Начальную пористость вещества m_0 будем характеризовать отношением удельного объема пор к объему сплошного материала. Тогда

$$(1) \quad m_0 = (a_0/b_0)^3.$$

Материал предполагаем гомогенным, изотропным и несжимаемым с плотностью ρ , удовлетворяющим условию текучести Мизеса — Генки или Треска — Сен-Венана с постоянным пределом текучести Y .

Используя предположение о несжимаемости материала ($\rho = \text{const}$), определим интеграл уравнения неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho v) / \partial r + 2\rho v / r = 0$$

в виде

$$(2) \quad v = a(\dot{a}/r)^2,$$

где r — эйлерова координата; v — скорость радиального движения; $\dot{a} = da/dt$ — скорость движения границы поры.